УДК 539.3

Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Збірник наукових праць / Дніпропетровський національний університет. – Дніпропетровськ, 2008. – Вип. 12. – 202 с.

Наведені нові результати теоретичних, чисельних і експериментальних досліджень в області математичного і комп'ютерного моделювання задач механіки деформівного твердого тіла. Детально розглянуті питання прикладного характеру, що пов'язані із теоретичним обґрунтуванням технологічних і проектних рішень. Ефективність розроблених алгоритмів і методів розрахунку показана на прикладах розв'язування конкретних задач.

Для наукових співробітників, аспірантів і інженерів-механіків.

Рекомендовано до друку Вченою радою
Дніпропетровського національного університету
(протокол №6 від 27 листопада 2008 р.).

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. **С.О. Каіров**,
д-р фіз.-мат. наук **О.А. Зевін**.

Адреса редколегії:
49010, м. Дніпропетровськ, пр. Гагаріна, 72,
Дніпропетровський національний університет, корп. 3, кім. 41.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації серія КВ № 5613 від 14.11.2001 р.

ISBN 978-966-87-36-09-9

УДК 539.3

О. Г. Василенко

ОПТИМІЗАЦІЯ ЕЛЕМЕНТІВ ФЕРМОВИХ КОНСТРУКЦІЙ З УРАХУВАННЯМ СПІЛЬНОЇ ДІЇ СИЛОВИХ НАВАНТАЖЕНЬ ТА АГРЕСИВНОГО СЕРЕДОВИЩА

Проведено обобщение алгоритма оптимального проектирования, полученного ранее для случая изгибаемых стержней, на решение задач оптимизации элементов ферменных конструкций, функционирующих в условиях одновременного действия неравномерного силового нагружения и агрессивной среды. Демонстрация работы алгоритма осуществляется на примере решения задачи оптимального проектирования статически определимой фермы.

OPTIMUM DESIGNING OF TRUSS ELEMENTS TAKING INTO ACCOUNT SIMULTANEOUS INFLUENCE OF LOADS AND AGGRESSIVE ENVIRONMENT

Here is made generalization of optimum designing algorithm described in the previous article for bent rods. This algorithm is used for solving problems of truss elements optimum designing, which are under simultaneous influence of irregular external loads and corrosive environment. Demonstration of opportunities of this approach is shown on example of solving the problem of optimum designing the statically defining truss.

Вступ. Стержневі системи широко використовуються у будівництві та багатьох галузях промисловості і часто знаходяться в умовах високих термосилових навантажень та різноманітних агресивних середовищ, які є частиною технологічних процесів. Це призводить до значного зменшення несучої здатності та скорочення терміну служби таких конструкцій внаслідок їх корозійної деградації. Слід зазначити, що для підвищення "витривалості" конструкцій, які експлуатуються в умовах впливу агресивного середовища, при їх проектуванні доводиться вводити так званий "жертовний" шар з додаткового матеріалу, який, як правило, призначається, виходячи лише із досвіду експлуатації конструкції у подібних випадках. Оскільки такий підхід призводить до значного завищення витрат матеріалу, то очевидною є необхідність науково обґрунтованого прогнозування довговічності конструкцій, що працюють в екстремальних умовах та раціональний вибір їх основних параметрів.

В останні роки проблемі оптимального (за різними критеріями) проектування елементів конструкцій, що зазнають механічного і хімічного руйнування, приділяється значна увага. У [2] подано огляд цілого ряду робіт, присвячених вирішенню зазначеної проблеми, у яких проводиться аналіз стану проблеми у цілому, формулюються і обговорюються різні математичні моделі, нові підходи та алгоритми проектування окремих видів конструкцій, призначених для експлуатації в агресивних середовищах, досліджуються шляхи зниження матеріаломісткості таких конструкцій та досліджується їх довговічність.

З огляду літератури очевидно, що більшість з існуючих на сьогодні досліджень в галузі оптимального проектування конструкцій з урахуванням впливу агресивного середовища присвячені розгляду спрощених розрахункових схем і все ще далекі від вимог практики. Слід зважити при цьому на те, що оптимізація параметрів реальної конструкції, яка працює в умовах екстремальних зовнішніх навантажень та одночасного впливу агресивного середовища, вимагає виконання цілої низки залежних від часу обмежень, де особливу складність становить вдоволення умовам довговічності. Труднощі пов'язані з необхідністю перевірки виконання відповідних обмежень в кінцевий момент часу, а отже проведення прямого розрахунку всієї конструкції у вузлових точках інтегрування рівнянь прийнятої математичної моделі корозії на кожному кроці пошукового алгоритму. А це, як наслідок, призводить до накопичення обчислювальних похибок та значної трудовитратності розв'язання задачі у цілому. Таким чином, проблема розробки нових більш ефективних підходів до розв'язання таких задач оптимального проектування є досить актуальною.

Постановка задачі. Загальноприйнята постановка задачі вагової оптимізації конструкцій з урахуванням спільної дії силового навантаження та агресивного середовища, адаптована на випадок ферм, може бути подана у вигляді [2, 3, 8]:

$$\min V(F_s(t_0)) \quad (s = 1, 2, ..., S); \tag{1}$$

$$\sigma_{\max}(t, F_s(t)) \le [\sigma]; \tag{2}$$

$$w_{\max}(t, F_s(t)) \le \Delta; \tag{3}$$

$$F_s(t_0) \ge F_{s,0} \quad (a), \quad F_s(t_n) \ge F_{s,n} \quad (b); \tag{4}$$

$$P_{s^*} \le P_{кр,s^*} \quad (s^* \in S); \tag{5}$$

$$t_0 \le t \le t_n, \tag{6}$$

де V – об'єм кожного з S елементів конструкції в початковий момент часу $t=t_0$; $F_s(t_0)$, $F_s(t_n)$ – площі поперечних перерізів елементів ферми (варійовані змінні) у моменти часу $t=t_0$ і $t=t_n$ відповідно; $F_{s,0}$, $F_{s,n}$ – мінімальні припустимі значення варійованих змінних у початковий момент t_0 та момент t_n втрати несучої здатності конструкції відповідно; σ_{max} – найбільше нормальне напруження, яке виникає в елементах конструкції в будь-який момент t її функціонування; $[\sigma]$ – максимальне припустиме значення нормального напруження; w_{max}, Δ – відповідно найбільший прогин та його максимально припустиме значення; P_{s^*} – навантаження у стиснутих стержнях s^*; $P_{кр,\ s^*}$ – критичне значення цього навантаження. Отже, (1) представляє собою критерій оптимальності; (2), (3), (4), (5), (6) – відповідно обмеження міцності, жорсткості, конструктивні вимоги, обмеження стійкості та умови довговічності. Вважається, що вичерпання несучої здатності конструкції наступає при порушенні хоча б однієї з вимог (2) – (5) в період часу $t_0 \le t \le t_n$.

Узагальнена схема ітераційного оптимізаційного алгоритму відшукання варійованих змінних $F_s(t_0)$ [8] може бути подана у вигляді

$$F_s^{r+1}(t_0) = F_s^r(t_0) + \Delta F_s^r(t_0) \quad (s = 1, 2, ..., S), \tag{7}$$

де r=0,1,2,...,R – номер ітерації пошукового ітераційного алгоритму, а вигляд $\Delta F_s^r(t_0)$ визначається у відповідності до вибраного методу оптимізації.

Оскільки для перевірки виконання обмежень (2), (3) у моменти часу (6) і, зокрема, при $t=t_n$ необхідно неодноразово (для кожного кроку r пошукового алгоритму (7)) інтегрувати диференціальні рівняння, які описують корозійну деградацію поверхні силового елементу конструкції, то розв'язання цієї задачі може виявитися досить трудовитратним. Це одна з причин того, що у відомих на сьогодні наукових публікаціях розв'язки задач оптимального проектування елементів конструкцій, які функціонують в умовах одночасної дії силових навантажень та агресивного середовища, були отримані лише для деяких простих розрахункових схем, а часто ще і з введенням різних спрощуючих припущень. Тому, як було зазначено вище, можливості їх застосування для оптимального проектування реальних конструкцій є досить обмеженими.

Нехай за розрахункову модель корозійного ураження прийнята будь-яка із відомих моделей, що враховує вплив напруження на швидкість корозії, наприклад, у вигляді [3], записана для фермових конструкцій

$$\frac{d\delta_s}{dt} = f(\delta_s, \sigma_s, \overline{B}, t); \quad \delta_s(t_0) = 0 \ (s = 1, 2, ..., S), \tag{8}$$

де $\delta_s(t)$ – глибина шару зношування поверхні s-го стержня конструкції в момент часу t; $\sigma_s(t, F_s(t_0))$ – напруження, залежні від змінних в часі варійованих площ перерізів F_s стержнів ферми, вибраних у початковий момент часу t_0; $\overline{B}$ – вектор коефіцієнтів, що характеризують корозійний опір матеріалу в конкретному середовищі.

При цьому, як було зазначено в роботах [3, 8], в конструкції одночасно існують два взаємопов'язаних процеси: деформування і корозійного ураження. Тобто, з одного боку, напруження, які виникають в конструкції, викликають прискорення корозійного пошкодження її поверхні, а з іншого, наслідком корозії є зменшення геометричних розмірів, у даному випадку площ перерізу стержнів, що, в свою чергу, призводить до перерозподілу (у бік збільшення) напружень і деформацій в елементах конструкції.

Для інтегрування рівнянь (8) обрано один з відомих методів, зокрема, в найпростішому вигляді, метод Ейлера розв'язання задачі Коші, який дозволяє визначити значення невідомих функцій на даному кроці за її значеннями на попередньому, у формі:

$$\delta_{s,j+1} = \delta_{s,j} + f(\delta_{s,j}, \sigma_{s,j}, t_j) \cdot \Delta t \quad (j = 0, 1, ..., n;\ s = 1, 2, ..., S), \tag{9}$$

де n – кількість вузлових точок t_j інтегрування в період часу $t_0 \le t \le t_n$ рівнянь (8); $t_j = t_0 + j \cdot \Delta t$; $\Delta t = (t_n - t_0)/n$; $\sigma_{s,j} = f(t_j, F_s(t_j))$; $\delta_{s,j} = \delta_s(t_j)$.

Очевидно, що з метою відшукання компонент вектора $\overline{\sigma}_j$ пряма задача розрахунку конструкції повинна розв'язуватися на кожному r-ому (r=0,1,...,R) кроці алгоритму (7) відшукання варійованих змінних (у даному випадку $F_s(t_j)$ (s=1,2,...,S; j=1,2,...,n)) для кожної вузлової точки t_j інтегрування в період часу $t_0 \le t \le t_n$ математичної моделі корозії у вигляді (8) (тобто $R \times n$ разів) для кожного із S стержнів фермової конструкції.

Алгоритм комп'ютерного моделювання. У цьому підрозділі, з метою демонстрації ефективності та розширення сфери застосування, проводиться узагальнення запропонованого в [2] підходу на випадок розв'язання задачі вагової оптимізації статично визначених фермових конструкцій, які функціонують в умовах одночасної дії нерівномірного силового навантаження та впливу агресивного середовища. При цьому, як і в [2], врахування вимог довговічності пропонується здійснювати шляхом всього одного зворотного інтегрування рівнянь математичної моделі (8) корозійної деградації (зміни положення протягом зазначеного періоду часу) поверхні матеріалу певної, оптимальної в кінцевий момент часу, фермової конструкції. Такий підхід дозволяє значно скоротити обчислювальні витрати на розв'язання оптимізаційної задачі, оскільки, на відміну від традиційного способу, у цьому випадку вдається уникнути необхідності багаторазового розрахунку конструкції, який доводиться проводити на кожному кроці ітераційного оптимізаційного алгоритму з метою перевірки виконання обмежень довговічності.

Варійованими параметрами при цьому приймаються площі $F_s(t_0)$ перерізів стержнів ферми у початковий момент часу. Вважається, що корозійне ураження є рівномірним по довжині (поверхні) стержневого елементу ферми, оскільки з (8) та (9) випливає, що значення корозійного пошкодження $\delta_{s,j}$ для кожного із S стержнів залежить від величини напруження $\sigma_s(t_j)=N_{p,s}/F_{j,s}$ у них. Таким чином, виходячи з того, що на кожному кроці j інтегрування в межах часу $t_0 \le t \le t_n$ величини внутрішніх зусиль $N_{p,s}$ у стержнях є сталими по довжині, то і товщина ураженого шару $\Delta\delta_{s,j}$ буде однаковою по довжині кожного окремого стержня ферми на кожному кроці інтегрування.

Схематично корозійна деградація різних типів поперечних перерізів стержнів подана на рис. 1, де через δ^*, δ^{**}, δ^{***} позначені, відповідно, величини глибин шару зношування для квадратного, круглого та двотаврового типів поперечних перерізів елементів конструкцій, обчислені через деякі фіксовані інтервали часу Δt^* функціонування елементу силової конструкції в деякому агресивному середовищі.

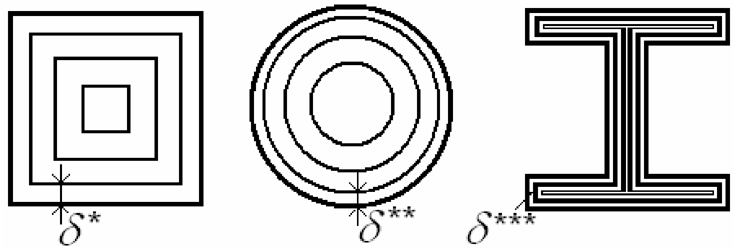

Рис. 1 – Корозійна деградація різних типів перерізів елементів конструкцій: квадратного, круглого та двотаврового

Зазначимо, що при розв'язуванні задачі оптимізації повинно бути враховано те, що, незважаючи на рівномірний (у розглянутому випадку ферми) розподіл корозійного ураження по поверхні (периметру) перерізу стержнів, глибини шару зношування δ для різних типів поперечних перерізів через певний період часу можуть стати різними. Отже, навіть однаково навантажені конструкції з поперечними перерізами рівної площі, так само, як і конструкції з рівнонапруженими перерізами однакової конфігурації, але різної площі з часом втрачають різну (в залежності від довжини контуру) кількість матеріалу перерізу.

Слід прийняти також до уваги, що площа перерізу F, наприклад, для квадратного ($F_{кв}$) та круглого ($F_{кр}$) поперечного перерізів, взаємопов'язана із величиною його ушкодження δ (див. (8)) у момент часу $t+\Delta t^*$, відповідно, у вигляді: $F_{кв}(t+\Delta t^*)=(a(t)-2\delta^*)^2$ та $F_{кр}(t+\Delta t^*)=\pi(r(t)-\delta^{**})^2$, де $a(t)$, $r(t)$ – сторона квадратного та радіус круглого поперечного перерізів.

Загальні принципи побудови алгоритму комп'ютерного моделювання корозійного зношування поверхні (контуру поперечного перерізу) нерівномірно навантаженого силового елементу ферми обрані у відповідності з [3].

Як модель корозійного ураження поверхні матеріалу приймається відома модель В. М. Долинського [4], яка подається у вигляді

$$\frac{d\overline{\delta}}{dt} = V_0(1+K\sigma), \tag{10}$$

де $\overline{\delta}$ – вектор, що складається з величин корозійного ураження кожного з елементів конструкції $\overline{\delta}=(\delta_1,\delta_2,...,\delta_S)$; V_0 – деяка стала величина, що характеризує корозійний опір матеріалу ненапруженої конструкції; K – коефіцієнт, що виражає особливості поведінки конкретного напруженого матеріалу в певному агресивному середовищі; σ – напруження.

Далі, як приклад, розглянута ферма з квадратним поперечним перерізом стержнів. Постановка задачі оптимального проектування такої ферми подається наступним чином:

$$V=\sum_{s=1}^{S} F_s(t_0)\cdot L_s \to \min; \tag{11}$$

$$\sigma_s(t_n)=\frac{N_{p,s}}{F_s}\le[\sigma],\ \ s=1,2,...,S; \tag{12}$$

$$P_{s^*}=\frac{\pi^2 EI_{s^*}}{L_{s^*}{}^2}=\frac{\pi^2 EF_{s^*}^2}{12L_{s^*}{}^2}\le P_{кр,s^*},\ \ s^*\in S; \tag{13}$$

$$\max w\big(F(t_n)\big)=\sum_{s=1}^{S}\frac{N_{p,s}N_{1,s}}{EF_s}\cdot L_s\le\Delta; \tag{14}$$

$$F_s(t_0)\ge F_{s,0}\quad (a),\ \ F_s(t_n)\ge F_{s,n}>0\quad (b); \tag{15}$$

$$t_0\le t\le t_n, \tag{16}$$

де $N_{p,s}$, $N_{1,s}$ – величини внутрішніх зусиль у стержнях s під дією зовнішнього навантаження та одиничного зусилля, прикладеного в місці і напрямку обмежуваного прогину; E – модуль Юнга, характерний для матеріалу конструкції;

$L_{s^*}, I_{s^*}, F_{s^*}$ – відповідно довжина, момент інерції та площа поперечних перерізів стиснутих стержнів s^*; $P_{s^*}, P_{кр,\, s^*}$ – навантаження у стиснутих стержнях та його критичне значення; L_s – довжина кожного з S стержнів ферми; Δ – значення максимально припустимого прогину.

У найпростішому вигляді зміна в часі розмірів перерізів стержнів ферми (корозійна деградація) здійснюється у відповідності до моделі В. М. Долинського (10) і може бути подана із застосуванням методу Ейлера (9)

$$\delta_s(t_{j+1}) = \delta_s(t_j) - V_0(1 + K \cdot \sigma_s(t_j, F_s(t_j)))\Delta t \quad (s = 1,2,...,S;\, j = 0,1,...,n). \tag{17}$$

Складність розв'язання задачі (11)–(16) полягає в суттєвих обчислювальних трудовитратах, особливо при збільшенні кількості S варійованих змінних в (7) та можливому накопичені похибки при обчисленні величини корозійної деградації $\overline{\delta}_{j+1} = (\delta_{1,j+1}, \delta_{2,j+1}, ..., \delta_{S,j+1})$, $\delta_{s,j+1} = \delta_s(t_{j+1})$ в результаті багаторазового інтегрування (8) на кожному кроці оптимізаційного алгоритму (7).

При розв'язуванні задачі оптимального проектування статично визначеної ферми (у цьому випадку зміна жорсткості одного з її елементів не призводить до перерозподілу зусиль і напружень в інших) без урахування зміни її розмірів у часі, зокрема, у початковий момент часу t_0, обчислення оптимальних значень площ перерізів стержнів ферми можна трактувати як відшукання максимальних з варійованих параметрів, що визначаються із виконання кожної з накладених на стержні вимог і обмежень:

$$F_s(t_0) = \max\{F_{s,\sigma}(t_0),\, F_{P_{s^*}}(t_0),\, F_{s,w}(t_0),\, F_{s,0},...\}, \tag{18}$$

де $F_{s,\sigma}(t_0), F_{P_{s^*}}(t_0), F_{s,w}(t_0), F_{s,0}$ – варійовані параметри величин площ перерізів стержнів ферми (s=1,2,...,S; $s^* \in S$), знайдені, відповідно, із обмежень міцності, стійкості, жорсткості і конструктивних вимог (12)–(15) у початковий момент часу $t=t_0$.

Оскільки вибір оптимальних значень варійованих параметрів з урахуванням умов міцності, стійкості і конструктивних вимог є очевидним, то розглянемо окремо питання врахування обмеження жорсткості.

Введемо допоміжну змінну x, що приймає значення $0 \le x_s \le L_s$ послідовно для всіх елементів системи, тобто фермова конструкція інтерпретується як певна послідовність її стержнів [5]. Тоді критерій оптимальності може бути подано у вигляді

$$\int_0^L F(x,t_0)dx = \int_0^{l_1} F(x,t_0)dx + \int_{l_1}^{l_2} F(x,t_0)dx + ... + \int_{l_{S-1}}^{l_S} F(x,t_0)dx, \tag{19}$$

де $L_1=l_1$, $L_2=l_2-l_1$,..,$L_S=l_S-l_{S-1}$ – довжина кожного з S стержнів ферми, а $L = \sum_{i=1}^{S} L_i$.

Для такої інтерпретації ферми, прийнявши до уваги неперервність справа відповідних функцій $N_p(x_i^*)=N_p(x_i^*+0)$, $N_1(x_i^*)=N_1(x_i^*+0)$, у точках стику окремих ділянок $x_i^*=l_i$ (i=1,2,..., S–1), формула (14) може бути записана у формі

$$\int_0^L \frac{N_p(x)N_1(x)}{EF(x,t_0)}dx \le \Delta. \tag{20}$$

Критерій оптимальності (11) ізопериметричної задачі оптимального керування при цьому прийме вигляд

$$V=\int_0^L F(x,t_0)dx \to \min.$$

Записавши Гамільтоніан у формі [1, 5]

$$H=F(x,t_0)+\lambda\frac{N_P(x)N_1(x)}{EF(x,t_0)},$$

за виключенням граничних точок кожного стержня, можна одержати

$$\frac{\partial H}{\partial F_w(x,t_0)}=1-\lambda\frac{N_P(x)N_1(x)}{EF_w^{\,2}(x,t_0)}=0,$$

звідки випливає

$$F_w(x,t_0)=\sqrt{\frac{N_PN_1}{E}}\sqrt{\lambda},$$

і далі з урахуванням (19) – $F_{s,w}(x,\ t_0)=F_w(x,\ t_0)$, $l_{s-1}\le x\le l_s$ (s=1,2,...,S), де λ – множник Лагранжа.

При цьому, значення λ визначається із граничного співвідношення (20)

$$\Delta=\int_0^L \frac{N_{p,s}N_{1,s}}{E\cdot\max\left\{F_{s,\sigma};F_{P^{s*}};F_{s,w}(\lambda);F_{s,0}\right\}}dx.$$

При традиційному підході до розв’язання задачі оптимізації з урахуванням змінності в часі розмірів площ поперечних перерізів стержнів ферми в результаті корозійного ураження виникає необхідність у момент $t=t_0$ підібрати такі значення $F_s(t_0)$, щоб обмеження (12)–(15) не порушувались у момент часу $t=t_n$. Перевірка таких обмежень здійснюється при цьому шляхом інтегрування в часі $t_0\to t_n$ рівнянь однієї з моделей корозійного ураження (8) з метою визначення його величини за час $t=t_n-t_0$ для кожного із елементів конструкції. Тобто, фактично, розв’язання задачі знаходження оптимальних розмірів перерізів елементів конструкції полягає у відшуканні відповідних величин “жертовного” шару їх матеріалу, що забезпечують виконання всіх необхідних для її функціонування вимог і обмежень з мінімальною витратою матеріалу на виготовлення конструкції упродовж заданого відрізку часу від $t{=}t_0$ до моменту $t{=}t_n$ включно.

Оскільки створення методу, який дозволив би надійно прогнозувати оптимальний розподіл матеріалу конструкції у цьому випадку, як вже було зазначено вище, є досить проблематичним, то найчастіше використовуються конструкції постійного поперечного перерізу з однаковим для кожного елементу "жертовним" шаром, який до того ж, зазвичай, призначається, виходячи лише із досвіду експлуатації подібних конструкцій у таких умовах. Більш раціональним можна вважати використання конструкцій з оптимальним у початковий момент часу розподілом матеріалу і аналогічним чином призначеним додатковим шаром. Очевидно, що в обох випадках він виявляється використаним лише частково і конструкція матиме перевитрати матеріалу. У той же час, зваживши на складність підбору оптимальної величини такого "жертовного" матеріалу для кожного з елементів конструкції, на практиці спроектовані таким чином конструкції все ж досить широко використовуються.

У нашому випадку, згідно з запропонованим у [2] підходом, розв'язання задачі (11)–(16) здійснюється шляхом знаходження величин площ перерізів кожного з S стержнів статично визначених ферм мінімальної ваги у момент часу t_n, аналогічно (18) у вигляді

$$F_s(t_n) = \max\{F_{s,\sigma}(t_n),\ F_{P_s^*}(t_n),\ F_{s,w}(t_n),\ F_{s,n},...\}$$

та нарощування матеріалу ("жертовного" шару) на поверхні цих конструкцій у зворотному напрямі в часі $t_n \to t_0$ у відповідності до прийнятої моделі корозії (10).

Чисельні дослідження. З метою проведення прозорого порівняльного аналізу оптимальних проектів, отримуваних за допомогою зазначеного вище підходу в умовах спільної дії силових навантажень та корозійної деградації поверхні їх стержнів, а також демонстрації їх ефективності і оптимальності, розглянемо конфігурації наступних проектів ферми, геометрична схема якої представлена на рис. 2, позначених далі як A, B, C:

– A – проект ферми (див. рис. 2), параметри якого отримані у відповідності із запропонованим підходом, тобто за умов її оптимальності та виконання обмежень (11) – (15) в кінцевий момент часу $t{=}t_n$ і подальшого нарощування матеріалу поверхні конструкції до початкового моменту $t_n \to t_0$ (за допомогою обраної математичної моделі корозійної деградації (8));
– B – проект, параметри якого одержані як результат розв'язання задачі оптимізації в початковий момент часу $t{=}t_0$ при забезпеченні виконання обмежень (12) – (15) шляхом прямого інтегрування в часі рівняння (9) до моменту $t{=}t_n$ для кожного із S стержнів ферми;
– C – проект, що складається із стержнів однакового (у початковий момент часу $t{=}t_0$) поперечного перерізу, параметри яких підібрані з урахуванням прогнозованого "жертовного" шару, що забезпечує виконання вимог (11) – (15) в кінцевий момент $t{=}t_n$.

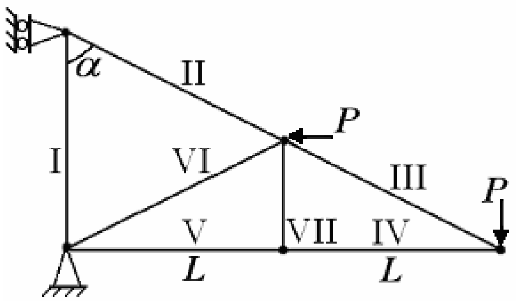

Рис. 2 – Геометрична схема ферми

Чисельні результати розв'язання оптимізаційних задач були при цьому отримані для таких даних: P=800 *кг*; L=0,2 *м*; α=60^o; E=2·10^3 *МПа*; V_0=0,001 *м/рік*; K=0,1 (*МПа*)$^{-1}$; [σ]=2 *МПа*; t_n=8 *років*; $\Delta_{max(t=tn)}$=0,005 *м*; $h_{0(t=0)}$=0,005 *м*.

Результати розв'язання задачі вагової оптимізації за запропонованим та традиційним підходами для проектів *A*, *B* статично визначеної ферми (рис. 2) приведені на рис. 3. Лінії I–VII на цьому рисунку відображають траєкторії зміни у часі $t_0 \rightarrow t_n$ в результаті корозійної деградації площ поперечних перерізів відповідних стержнів, отриманих для конфігурацій проектів *A*, *B* ферми.

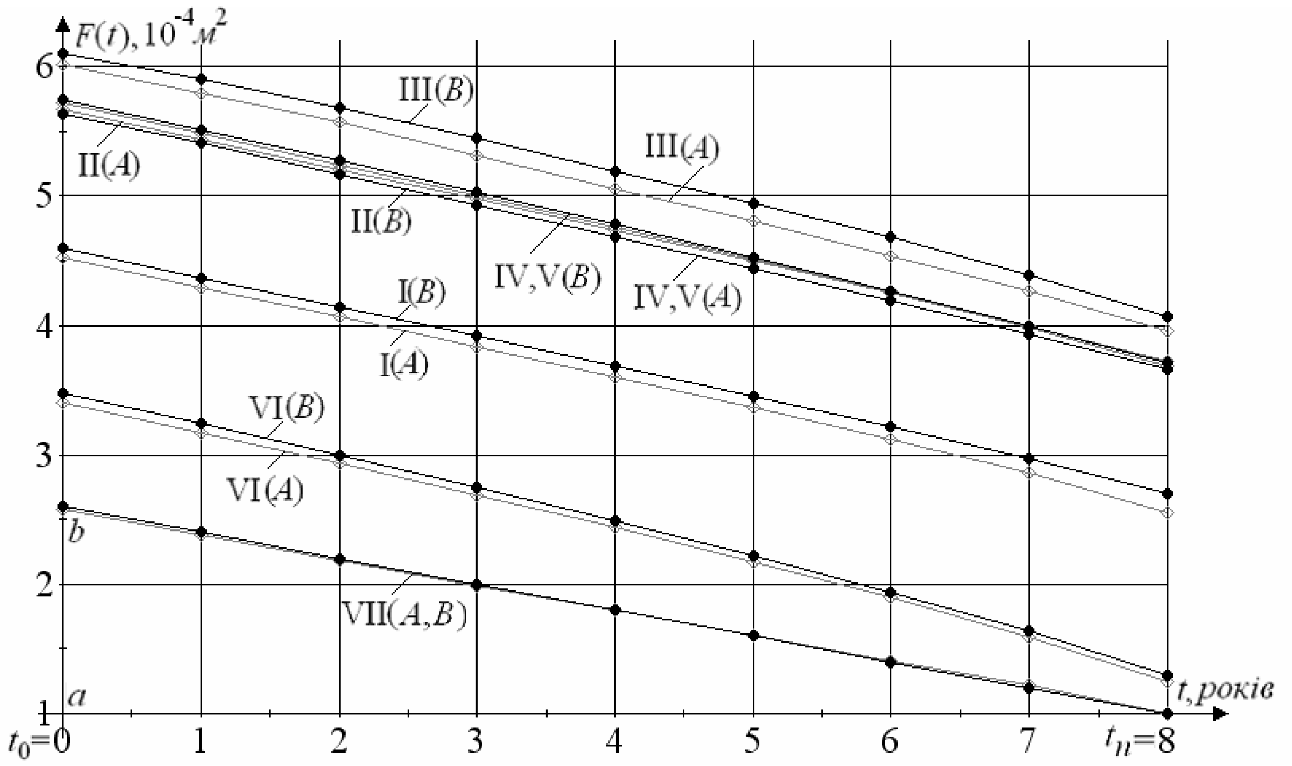

Рис. 3 – Зміна в часі площ поперечних перерізів стержнів проектів *A*, *B* статично визначеної ферми

Проекції ліній I – VII на вертикальну вісь $F(t)$ дають уявлення про глибину зношування додаткового ("жертовного") шару матеріалу відповідних стержнів за час t_j (j=1, 2,..., n) в результаті корозійного ураження. Так, відрізок *ab* на рис. 3 позначає глибину корозійного ураження VII стержня проектів ферм *A*, *B* упродовж часу *t*.

Аналіз наведених на рис. 3 результатів дозволяє стверджувати, що застосування запропонованого у статті та традиційного підходів до розв'язання задачі (11)–(16) дає фактично однакові результати, оскільки різниця ε між проектами A і B, обчислена за формулою

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{s=1}^{S} (F_s^{\,A}(t_0) - F_s^{\,B}(t_0))^2} \cdot \frac{100\%}{S},$$

де $F_s^{\,A}(t_0)$, $F_s^{\,B}(t_0)$ – площі, відповідно, кожного з S стержнів проектів A, B у початковий $t=t_0$ момент часу, і становить лише 2,03%.

Незначна відмінність між результатами, отриманими для проектів A і B, пояснюється накопиченням похибки при багаторазовому інтегруванні рівнянь (17) протягом розв'язування задачі (11) – (16) за традиційним підходом.

На рис. 4 приведені результати розв'язання задачі для проекту C (однакової з конструкціями A, B довговічності) ферми, геометрична схема якої показана на рис. 2, із стержнями постійного перерізу. Лінії I–VII на рисунку відображають траєкторії зміни у часі $t_0 \rightarrow t_n$ в результаті корозійної деградації площ поперечних перерізів відповідних стержнів ферми C.

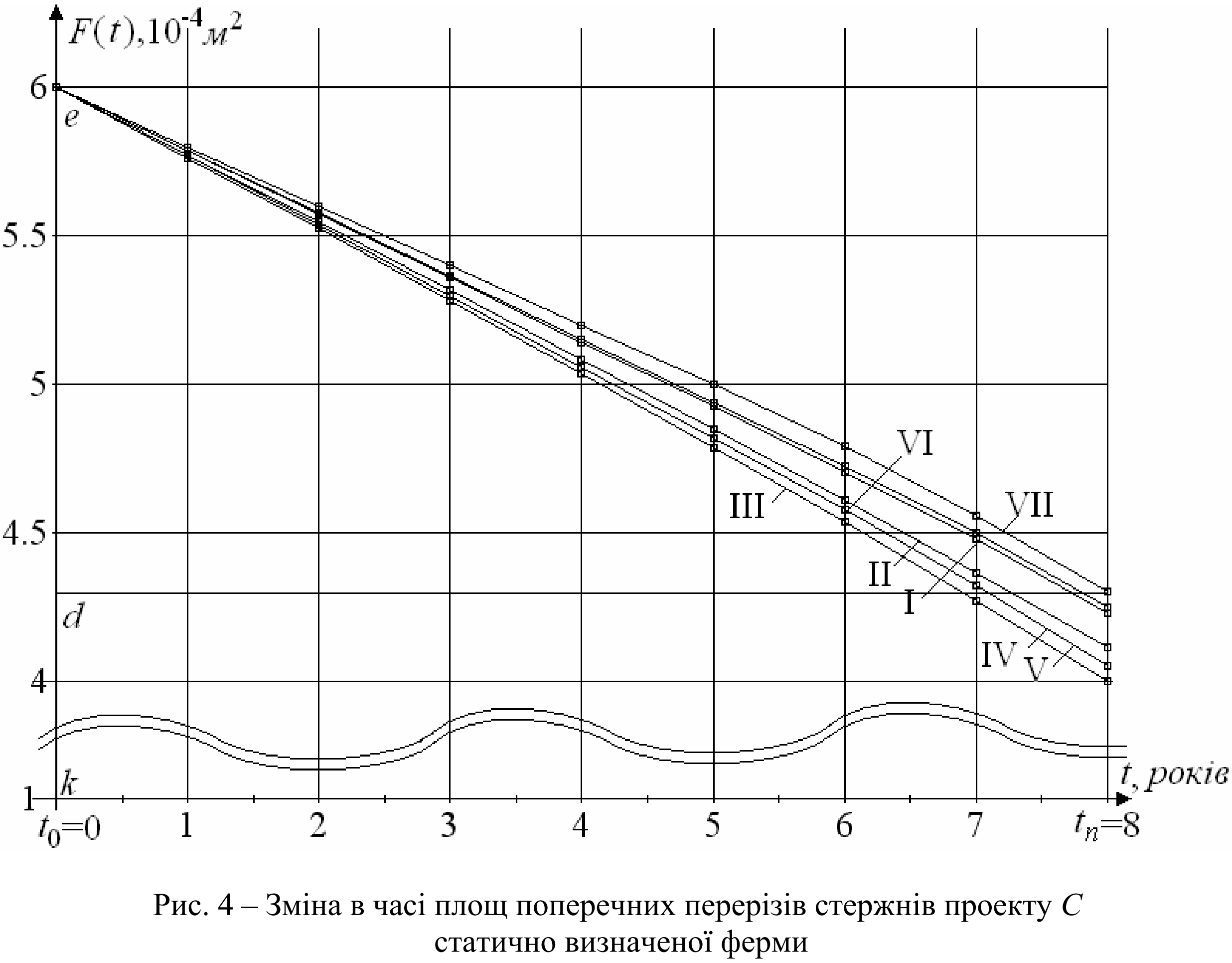

Рис. 4 – Зміна в часі площ поперечних перерізів стержнів проекту C статично визначеної ферми

Відрізок *ed* позначає глибину шару зношування VII стержня ферми *C*, а *dk* – глибину зайвої частини "жертовного" шару, яка залишилася після втрати несучої здатності конструкції.

Порівнюючи рис. 3 з рис. 4 очевидно, що „жертовний" шар матеріалу на корозійне ураження для проектів *A*, *C* суттєво відрізняється. Дійсно, для проектів ферми *A*, *C* при $t_0 \le t \le t_n$ співпадають лише площі стержня III, тобто для конструкції типу *C* всі стержні, крім III мають помітний зайвий шар матеріалу. Найбільш очевидно це для стержня VII, де величина "жертовного" шару, витраченого на виготовлення проектів *A*, *B*, становить добуток $ab \times L_{\mathrm{VII}}$ (рис. 3), в той час, як для *C*, вона дорівнює $ke \times L_{\mathrm{VII}}$ (рис. 4). При цьому на корозійне пошкодження використовується лише частина $de \times L_{\mathrm{VII}}$ (рис. 4), а решту ж матеріалу ($dk \times L_{\mathrm{VII}}$, яка складає 73% від загального об'єму цього стержня) слід віднести до перевитрат. Як наслідок, на виготовлення такої конструкції *C* (при рівній довговічності відповідних ферм) витрачено на 40% більше матеріалу, ніж на раціональні проекти *A*, *B*, причому об'єм невикористаного матеріалу для *C* виявляється в 1,64 рази більшим, ніж для конструкцій *A*, *B*.

Далі проведено порівняльний аналіз результатів, отриманих при застосуванні методу Ейлера, який, як відомо, має недостатню точність [7], що може призвести до похибок у обчисленні величини корозійної деградації поверхні конструкцій під напругою, із методом Адамса 4-го порядку точності з метою перевірки вірогідності одержаних даних.

Порівняння проводиться для випадку використання рівномірної сітки, за якої формула методу Адамса подається наступним чином [7]:

$$
\begin{aligned}
\delta_{s,j+1} &= \delta_{s,j} + f(F_{s,j},\sigma_{s,j},t_j)\Delta t + \frac{f(F_{s,j},\sigma_{s,j},t_j) - f(F_{s,j-1},\sigma_{s,j-1},t_{j-1})}{2}\Delta t + \\
&+ 5\Delta t\,\frac{f(F_{s,j},\sigma_{s,j},t_j) - 2f(F_{s,j-1},\sigma_{s,j-1},t_{j-1}) + f(F_{s,j-2},\sigma_{s,j-2},t_{j-2})}{12} + \qquad (21)\\
&+3\Delta t\,\frac{f(F_{s,j},\sigma_{s,j},t_j) - 3f(F_{s,j-1},\sigma_{s,j-1},t_{j-1}) + 3f(F_{s,j-2},\sigma_{s,j-2},t_{j-2}) - f(F_{s,j-3},\sigma_{s,j-3},t_{j-3})}{8} \\
&(j = 0,1,\ldots,n;\ s = 1,2,\ldots,S),
\end{aligned}
$$

де $\overline{\delta}_{j+1} = (\delta_{1,j+1},\delta_{2,j+1},\ldots,\delta_{S,j+1})$ – вектор, який складається з величин корозійного ураження для кожного з *S* елементів конструкції; $f(F_{s,j},\sigma_{s,j},t_j)$ знаходиться у відповідності до формули розрахункової моделі В. М. Долинського (10).

При спрощенні (21) за допомогою приведення подібних доданків отримаємо:

$$
\begin{aligned}
\delta_{s,j+1} &= \delta_{s,j} + [55f(F_{s,j},\sigma_{s,j},t_j) - 59f(F_{s,j-1},\sigma_{s,j-1},t_{j-1}) + \\
&+ 37f(F_{s,j-2},\sigma_{s,j-2},t_{j-2}) - 9f(F_{s,j-3},\sigma_{s,j-3},t_{j-3})]\frac{\Delta t}{24} \qquad (22)\\
&(j = 0,1,\ldots,n;\ s = 1,2,\ldots,S).
\end{aligned}
$$

У (22) порівняно з формулою Ейлера (9) присутні доданки, які враховують значення функції f на трьох попередніх кроках алгоритму, тобто для розв'язання задачі методом Адамса у вузлі j+1 необхідно знати значення її розв'язків у j попередніх вузлах. Тому відшукання цих невідомих площ перерізів стержнів $F_s(t_0)$ з (18) в трьох початкових точках (при j=0, 1, 2) все ж доводиться виконувати за допомогою методу Ейлера. Слід зазначити при цьому, що розв'язання задачі (18) повинно проводитись для кожного із s (s=1,2,...,S) стержнів конструкції, незалежно від методу інтегрування, обраного для рівняння моделі корозійного ураження (10).

З метою оцінки впливу точності методу інтегрування на результати та підтвердження зроблених раніше висновків відносно проектів A, C (рис. 3, 4) були одержані площі (у момент t=t_0) поперечних перерізів вищезгаданих конструкцій та проекту A', побудованого за алгоритмом з використанням методу Адамса 4-го порядку точності. Для оцінки похибки застосування методу Ейлера отримані проекти A для кроків інтегрування $2\Delta t$ та $4\Delta t$ (див. (9)).

Лінії A, C на рис. 5 ілюструють площі поперечних перерізів стержнів I–VII відповідних проектів ферми при t=t_0, для яких інтегрування рівняння (10) проводилося за допомогою методу Ейлера, а лінії $A(2\Delta t)$ і $A(4\Delta t)$ відображають площі поперечних перерізів елементів ферми A, отриманих із використанням, відповідно, у 2 та 4 рази більшого кроку методу інтегрування Ейлера (9). Лінії A' відповідають величинам площ перерізів стержнів ферми A, знайдених із використанням методу Адамса.

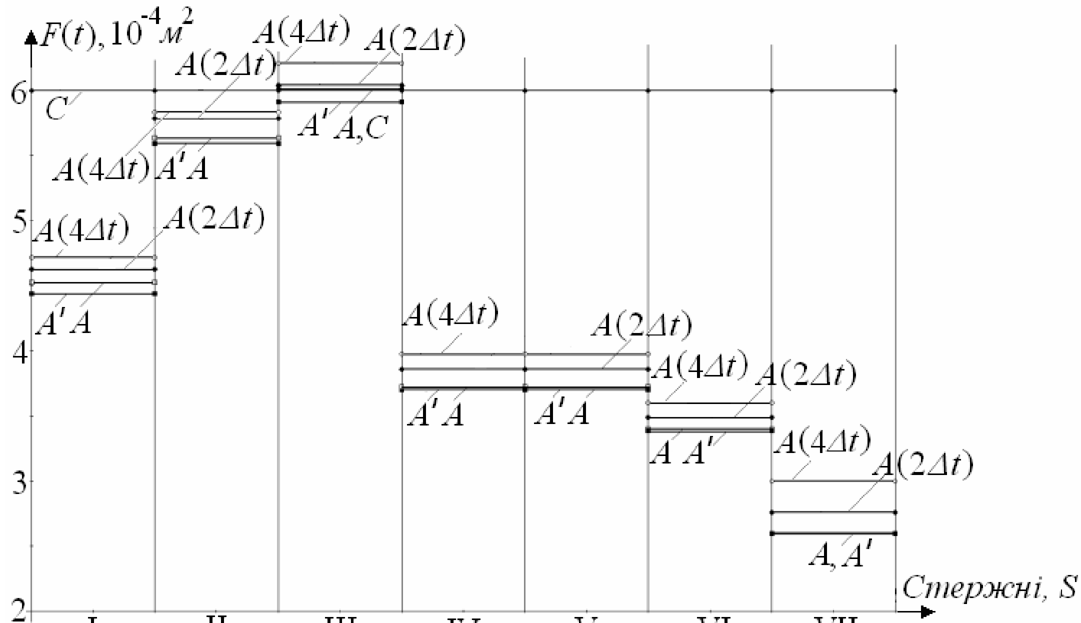

Рис. 5 – Порівняння площ поперечних перерізів стержнів проекту A ферми, отриманих за допомогою методу Ейлера та методу Адамса з проектами B та C

Для оцінки розбіжності між знайденими величинами площ поперечних перерізів раціональних проектів A та A' (в початковий момент часу t=t_0) використовується наступна формула:

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{s=1}^{S} (F_s{}^{A}(t_0) - F_s{}^{A'}(t_0))^2} \cdot \frac{100\%}{S},$$

де F_s^A (t_0) та $F_s^{A}{}'(t_0)$ площі S стержнів проекту A статично визначеної ферми, знайдені відповідно за допомогою методу Ейлера та методу Адамса.

Знайдене ε складає лише 2,7%, що, зауваживши на багатокроковість методу Адамса, підтверджує можливість і доцільність використання методу Ейлера з малим кроком для таких задач. З рис. 5 видно, що похибка ε досить суттєво зростає при збільшенні кроку Δt. Так, похибки для проектів ферми, зображених лініями $A(2\Delta t)$ і $A(4\Delta t)$, складають, відповідно, 6% та 13%.

Висновки. Запропонований в [2] підхід узагальнено для розв’язання задач оптимізації статично визначених фермових конструкцій в умовах спільної дії силових навантажень та агресивного середовища.

Використання зазначеного підходу дозволяє у тисячі разів скоротити кількість прямих розрахунків, необхідних для знаходження оптимального проекту конструкції, яка функціонує в агресивному середовищі. Так, наприклад, для одержання проекту, який вдовольняє усім умовам, включаючи і вимоги довговічності, авторам роботи [6] знадобилося більше, ніж 16000 ітерацій (з урахуванням необхідності постійного контролювання вдоволення цих обмежень), у той час як для перевірки виконання умов довговічності у відповідності з новим підходом, достатньо розв’язати задачу оптимізації всього один раз в кінцевий момент часу та наростити матеріал конструкції до моменту $t=t_0$.

Показано, що результати, отримані при розв’язуванні задачі за традиційним та альтернативним підходами, співпадають з відхиленням біля 2%, що пояснюється накопиченням похибки при багаторазовому інтегруванні рівняння моделі (10), потрібному для знаходження раціонального проекту конструкції за стандартним алгоритмом.

Проведений в роботі порівняльний аналіз характеристик раціональних проектів із проектом однакової з ними довговічності, який складається із стержнів рівного в початковий момент поперечного перерізу, довів очевидну доцільність використання конструкцій раціональної конфігурації. Так, на виготовлення проекту ферми з однаковою площею усіх стержнів було витрачено на 40% більше матеріалу, ніж для запропонованої в роботі оптимальної ферми. При цьому об’єм зайвого “жертовного” шару матеріалу, який залишився після втрати несучої здатності у момент часу $t=t_n+0$, склав майже 39% початкового об’єму ферми зі стержнями постійного поперечного перерізу.

Оцінка результатів, отриманих під час використання при інтегруванні рівняння моделі корозійної деградації (10) методів Ейлера та Адамса, показала незначну (лише 2,7%) розбіжність результатів. Це дозволяє стверджувати ефективність застосування методу Ейлера з малим кроком до такого типу задач, оскільки незначне уточнення результатів за допомогою методу Адамса не виправдовує додаткових обчислювальних витрат, пов’язаних з багатокроковістю цього методу. Але, слід зауважити, що недостатньо малий крок у методі Ейлера призводить до помітної похибки (див. рис. 5).

Таким чином, запропонований підхід є достатньо вірогідним та ефективним засобом розв'язання задач оптимізації стрижневих конструкцій, які зазнають одночасного впливу силових навантажень та агресивного середовища.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. ***Брайсон А.*** Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-Ши. – М.: Мир, 1972. – 544 с.
2. ***Дзюба А. П.*** Про один підхід до розв'язання задач оптимізації елементів конструкцій з урахуванням спільної дії силових навантажень та агресивного середовища / А. П. Дзюба, О. Г. Василенко, О. А. Дзюба // Методи розв'язання прикладних задач механіки твердого тіла. – Д.: Вид-во "Наука і освіта", 2007. – Вип. 8. – С. 55–67.
3. ***Дзюба А. П.*** Комп'ютерне моделювання корозійної деградації поверхні нерівномірно навантажених елементів конструкції/ А. П. Дзюба, А. П. Колодяжний, О. А. Дзюба // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. – Д.: Вид-во ДНУ, 2006. – Вип. 10. – Т. 2. – С. 56–63.
4. ***Дзюба А. А.*** К задаче сравнительного анализа математических моделей коррозионного износа поверхности изгибаемых стержневых элементов // А. А. Дзюба, А. П. Колодяжный // Theoretical Foundations of Civil Engenieering: Polish–Ukrainian-Lithuanian Transactions. – Warsaw. – 2007. – №15. – P. 167–172.
5. ***Дзюба А. П.*** Оптимальное проектирование конструкций на основе принципа максимума Понтрягина. – Д.: Изд-во ДГУ, 1984. – 136 с.
6. ***Зеленцов Д. Г.*** Напряженно-деформированное состояние стержневых конструкций с нестационарными геометрическими характеристиками / Д. Г. Зеленцов, С. В. Кольчик // Методы решения прикладных задач механики деформируемого твердого тела: Сб. научн. тр. – Д.: Изд-во ДГУ, 1997. – С. 37–42.
7. ***Мусіяка В. Г.*** Основи чисельних методів механіки. – Д.: Вид-во ДДУ, 1993. – 156 с.
8. ***Петров В. В.*** Расчет элементов конструкций, взаимодействующих с агресивной средой /В. В. Петров, И. Г. Овчинников, Ю. М. Шихов. – Саратов: Вид-во Саратов. ун-та, 1987. – 285 с.

Дніпропетровський національний університет *Надійшла до редколегії 01.06.2008*

З М І С Т

Наукове видання

ПРОБЛЕМИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МЕХАНІКИ І МІЦНОСТІ КОНСТРУКЦІЙ

Збірник наукових праць. Вип. 12

Технічний редактор Л.М. Машталір
Комп′ютерна верстка І.А. Сафронова

Видавництво „Наука і освіта”
Свідотство про держ. реєстрацію ДК №919 від 21.05.2002.
49081, Україна, м. Дніпропетровськ, вул. Бердянська, 61,б, тел. 8(056)370-13-13

Підписано до друку 05.12.2007, Формат 60x84 1/16.
Умов. друк. арк. 12,6. Друк лазерний. Замовлення № 201. Тираж 300 прим.