Академия наук Республики Таджикистан
Институт математики им. А. Джураева АН РТ
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет
им. первого Президента России Б. Н. Ельцина

ТРУДЫ

МЕЖДУНАРОДНОЙ ЛЕТНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ-КОНФЕРЕНЦИИ С. Б. СТЕЧКИНА ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

(Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа 2016 года)

PROCEEDINGS

OF THE INTERNATIONAL SUMMER MATHEMATICAL STECHKIN SCHOOL-CONFERENCE ON FUNCTION THEORY

(Tajikistan, Dushanbe, August 15–25, 2016)

Душанбе
2016

Академия наук Республики Таджикистан
Институт математики им. А. Джураева
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина

ТРУДЫ
МЕЖДУНАРОДНОЙ ЛЕТНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ-КОНФЕРЕНЦИИ С. Б. СТЕЧКИНА ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

(Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа 2016 года)

Посвящается 25-летию
н е з а в и с и м о с т и
Республики Таджикистан

PROCEEDINGS
OF THE INTERNATIONAL SUMMER MATHEMATICAL STECHKIN SCHOOL-CONFERENCE ON FUNCTION THEORY

(Tajikistan, Dushanbe, August 15–25, 2016)

Душанбе
2016

УДК 517

Труды Международной летней математической Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций. Полиграфия ООО «Офсет», 2016. — 283 с.

ISBN 978-9-9975-9175-3

Сборник трудов содержит работы участников Международной летней математической Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций, организованной Институтом математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан, Институтом математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Уральским федеральным университетом им. первого Президента России Б. Н. Ельцина и проходившей с 15 по 25 августа 2016 года, в ущелье Варзоб, вблизи города Душанбе Республики Таджикистан.

Сборник рассчитан на специалистов по теории функций и теории аппроксимации, а также докторантов, аспирантов и студентов старших курсов математических специальностей.

UDC 517

Proceedings of International Summer Mathematical Stechkin School-Conference on Function Theory. Dushanbe: Publishing House of OOO «Ofset», 2016. — 283 p.

ISBN 978-9-9975-9175-3

Proceedings contain works of participants of International Summer Mathematical Stechkin School-Conference on Function Theory that was organized by A. Juraev's Institute of Mathematics Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, and Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin and was held in Varzob gorge near city Dushanbe of the Republic of Tajikistan on August 15–25, 2016.

The collection is designed for specialists in the theory of functions and approximation theory, as well as doctoral students, post-graduate students and students of mathematical specialities.

© Авторы трудов, 2016
© Полиграфия ООО «Офсет», 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 6–10

Школа С. Б. Стечкина. Историческая справка

В. И. Бердышев[1], В. В. Арестов[2], М. Ш. Шабозов[3]

[1] *Институт математики и механики УрО РАН,*
[2] *Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия*
[3] *Институт математики им. А. Джураева АН РТ, Душанбе, Таджикистан*

Сергей Борисович Стечкин. Рисунок В. И. Бердышева

Школа Стечкина — уникальное явление в научной жизни России и ряда бывших республик Советского союза. Начиная с начала семидесятых годов прошлого века, группа ученых из нескольких десятков человек ежегодно собирается, обычно на одну или две недели, чтобы обсудить полученные результаты и выработать планы развития теории функций. Профессор С. Б. Стечкин был ее Организатором, Научным Руководителем, Верховным Судьей и Мудрым Наставником.

Основным инициатором и вдохновителем проведения Школы на протяжении многих лет является Институт математики и механики УрО РАН. В последние годы в процессе организации и проведения Школы активное участие принимает Уральский федеральный университет. В 2007 г. ведущую роль по организации и проведению Школы играл Тульский

© В. И. Бердышев, В. В. Арестов, М. Ш. Шабозов, 2016

государственный университет, а в 1995 г. — МГУ. В 2009 г. Школу организовали два китайских университета, расположенные в Пекине: Normal Beijing University, University of Aeronautics and Astronautics. Для Школы как правило выбирается живописное место в санаториях и домах отдыха в окрестностях больших городов, где находятся научные учреждения Академии наук СССР, России и бывших советских республик. Тридцать лет назад, в 1986 году Школа проходила недалеко от Душанбе в Доме Отдыха АН Республики Таджикистан в Ромитском ущелье. В этом году Международная летняя математическая Школа-Конференция С. Б. Стечкина по теории функций вновь пройдет недалеко от столицы Таджикистана. Председателем оргкомитета Школы-Конференции является академик АН РТ М. Ш. Шабозов. Нынешняя Школа-Конференция посвящается 25-й годовщине независимости Республики Таджикистан.

С момента основания в Школе действуют следующие принципы: эффективность, дисциплина и безопасность. Работой Школы управляет «Совет Министров» (Оргкомитет), состоящий из «министров» науки (программный комитет), культуры и спорта, финансов и дошкольного образования. В течении многих лет «премьер-министром» был профессор Н. И. Черных. Существуют различные титулы, которые присваивают за особые заслуги участникам Школы. Так в разные годы было присвоено звание «профессор» (Ю. Н. Субботин), «молоток» (В. В. Арестов, В. И. Бердышев, А. В. Маринов), «академик» (С. В. Конягин).

Как правило, заседания Школы проходят днем на открытом воздухе, на поляне, на лужайке или на берегу озера, с небольшими перерывами на обед или купание. По вечерам проводятся соревнования по бадминтону, шахматам, футболу, плаванию, в выходные добавляются экскурсии. Особым успехом пользовались соревнования по футболу между командами «родителей и детей» и «зеленых новичков», которые судил «главный судья» С. В. Конягин.

Приведем хронологию дат и мест проведения Школы. Подробные описания Школ в период с 1971 по 2006 годы были опубликованы в исторических обзорах [1, 2].

1971 г. Турбаза «Верхняя Сысерть» (окрестности г. Свердловска).
1972 г. Турбаза «Черданцево» (окрестности г. Свердловска).
1974 г. Турбаза «Черданцево» (окрестности г. Свердловска).
1975 г. Калуга.
1976 г. Турбаза «Кытлым» (северный Урал).
1977 г. Турбаза «Юхнов» (окрестности г. Калуги).
1978 г. Турбаза «Волга» (окрестности г. Саратова).
1979 г. Миасс, Ильменский государственный заповедник.
1981 г. Турбаза «Улыбышево» (окрестности г. Владимира).
1982 г. (*Юбилейная, 10-я Школа*) Миасс, Ильменский государственный заповедник.
1983–1985 гг. Миасс, Ильменский государственный заповедник.
1986 г. Дом отдыха АН РТ в близи г. Душанбе, Таджикистан.

Участники Школы: С. Б. Стечкин, В. В. Арестов, В. М. Бадков, В. И. Бердышев, Ю. Н. Субботин, А. А. Женсыкбаев, А. Ф. Сидоров, М.-Б. А. Бабаев, С. В. Конягин, И. Г. Царьков, Н. Н. Холщевникова, А. Г.Бабенко, С. Туляганов, В. И. Иванов, А. Ю. Шадрин, А. В. Резцов, Н. Л. Зматраков, С. П. Байбородов, Ал. А. Привалов, В. А. Кощеев, П. М. Сахненко.

Новые участники: А. Гафаров, Н. Гафуров, О. Ш. Шабозов, М. Ш. Шабозов, Ш. Шогунбеков, Д. Исмаилов, Н. Айнуллоев, Г. Б. Бабаев, М. М. Каримова, Г. Джангибеков, Ю. Солехов.

Приглашенный лектор: В. Н. Темляков.

Основные темы: экстремальные задачи для полиномов; n-поперечники классов функций многих переменных; аппроксимация в банаховых пространствах; свойства сплайн-функций; теория дифференциальных и интегральных уравнений; аналитическая теория чисел.

Культурная программа: экскурсия в живописный Дом Отдыха Обигарм, расположенный в ущелье Варзоб на высоте 2100 метров над уровнем моря; а также посещение самой высокой в мире плотины (300 метров) Нурекской ГЭС.

Школа С. Б. Стечкина (Душанбе, август 1986 г.)

1987 г., 1989 г. Миасс, Ильменский государственный заповедник.

1990 г. Турбаза «Хрустальная» (окрестности г. Екатеринбурга).

1993 г. Турбаза «Агидель» (окрестности г. Белорецка).

1994 г. Турбаза «Арский камень» (окрестности г. Белорецка).

1995 г. *20-я Школа — последняя из Школ с участием С. Б. Стечкина,* состоялась в МГУ. На нее наложен горький отпечаток — болезнь Сергея Борисовича. Из 40 докладов 10 были обзорными и посвящены современному состоянию вопроса о распределении простых чисел (С. Б. Стечкин, А. Ю. Попов), взаимосвязи задач о неравенствах для производных, вложении, гладкости и аппроксимации (В. М. Тихомиров), экстремальным задачам теории приближений (В. А. Юдин, В. И. Иванов, Н. Ильясов), геометрическим вопросам теории приближений (А. Л. Гаркави, С. В. Конягин, И. Г. Царьков, В. С. Балаганский). В Школе учавствовали один из первых учеников Сергея Борисовича профессор А. Л. Гаркави, а также профессор В. М. Тихомиров с учениками. Среди новичков Школы — В. Ю. Протасов, А. Ю. Попов, Н. Ю. Антонов, Р. Р. Акопян, Н. Н. Андреев. На закрытии Сергей Борисович выступил с напутственным словом [3, 4]. Роли С. Б. Стечкина в теории приближений посвящена статья [5].

Школы с 21 по 31 (**1996–2006 гг.**) проходили в Миассе (Челябинская область) в Ильменском государственном заповеднике им. В. И. Ленина.

2007 г. Алексин Тульской области (32-я Школа, где в том числе участвовали ученики профессора Сунь Юн Шена из Китайской Народной Республики — одного из первых учеников С. Б. Стечкина).

2008 г. Миасс (33-я Школа).

2009 г. Пекин. 34-я Школа называлась Школой Стечкина – Сунь Юн Шена, Sun – Stechkin Summer School, Beijing (2009, August 13–23).

Школы с 35 по 40 (**2010–2015 гг.**) проходили в г. Миассе Челябинской области в Ильменском государственном заповеднике.

Научная программа предстоящей Школы-конференции охватывает основные направления современной теории функций, теории приближений и применения аппроксимационных методов при решении задач в других областях математики:

◦ общие вопросы теории функций;

◦ наилучшее приближение функций и операторов;

◦ экстремальные задачи теории функций и теории приближений;

◦ современные методы аппроксимации: сплайны, всплески и их применение к проблемам сжатия информации, медицинской тематике;

◦ проблемы навигации по геодезическим полям;

◦ геометрические вопросы теории приближений;

◦ вопросы численного анализа.

Несколько слов об организационной стороне Школы. Сергей Борисович на своей последней Школе 1995 г. высказал В. И. Бердышеву надежду, что Школа не прекратит существование. Школа продолжает жить благодаря взаимодействию и участию трех ветвей научной Школы Стечкина — уральской, московской и тульской. В 2016 году большую работу по организации и проведению Школы-Конференции осуществляют Академия наук Республики Таджикистан и Институт математики им. А. Джураева. Число участников Школы колеблется от 30 до 40 человек, в большинстве своем это ученики С. Б. Стечкина и его научные внуки из Москвы, Екатеринбурга, Уфы, Тулы, Челябинска, Саратова, Воронежа и др. городов. На всех Школах около трети участников — молодежь — студенты и аспиранты. С докладами выступают не только взрослые участники, но и дети; так в разные годы делали доклады Олег Матвеев, Сережа Бердышев, Юра Малыхин, Коля Барабошкин. В этом году много участников из Душанбе и других городов Таджикистана, в том числе специалисты по теории приближения функций, в основном — ученики М. Ш. Шабозова.

Список литературы

1. *Berdyshev V. I.* Stechkin's workshop — what is it? // East J. Approx. 1996. V. 2, № 2. P. 135–142.
2. *Бердышев В. И.* Хронология Школы С. Б. Стечкина 1971–2006 // Труды Международной летней математической Школы С. Б. Стечкина по теории функций. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 7–14.
3. *Stechkin S. B.* The concluding address by S. B. Stechkin // East J. Approx. 1996. V. 2, № 2. P. 233–234.
4. Выступление С. Б. Стечкина на Школе по теории функций и приближений 8 августа 1995 г. // Фунд. и приклад. матем. 1997. Т. 3, вып. 4. С. 959–960.
5. *Арестов В. В.*, *Бердышев В. И.*, *Субботин Ю. Н.*, *Черных Н. И.* С. Б. Стечкин и теория приближений // Труды Института математики и механики УрО РАН. 1996. Т. 4. С. 3–16.

Международная летняя математическая Школа-Конференция С. Б. Стечкина по теории функций (г. Душанбе, 15–25 августа 2016 года)

Председатель Школы-Конференции — Президент АН РТ Ф. К. Рахими.

Сопредседатели — академик РАН В. И. Бердышев и профессор В. В. Арестов.

Оргкомитет: академик АН РТ М. Ш. Шабозов (председатель), академик АН РТ Л. Г. Михайлов, академик АН РТ З. Д. Усманов, академик АН РТ М. Илолов, академик АН РТ Н. Раджабов, член-корр. АН РТ З. Х. Рахмонов, член-корр. АН РТ И. Курбанов, член-корр. РАН Ю. Н. Субботин, заслуженный деятель науки РФ Н. И. Черных, член-корр. РАН С. В. Конягин, доктор физ.-мат. наук А. Г. Бабенко, профессор В. И. Иванов, профессор И. Г. Царьков, доцент Г. А. Юсупов (секретарь).

Программный комитет: профессор В. В. Арестов (председатель), доктор физ.-мат. наук Н. Ю. Антонов, профессор С. А. Исхоков, доцент М. В. Дейкалова (секретарь), доцент М. С. Саидусайнов (секретарь).

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 11–14

О порядках приближения функций многих переменных в пространстве Лоренца

Г. Акишев

Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова, Караганда, Казахстан
Институт математики и компьютерных наук Уральского федерального университета им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

Аннотация. В докладе приведены точные по порядку оценки приближения функций из класса Никольского – Бесова тригонометрическими полиномами в пространстве Лоренца с анизотропной нормой.

Пусть $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $I^m = [0, 2\pi)^m$, $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $\bar{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ и числа $\theta_j, p_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, \ldots, m$. Через $L^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$ обозначим пространство Лоренца всех измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$, определенных на $\mathbb{R}^m$, имеющих период 2π по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} = \left[\int_0^{2\pi} t_m^{\frac{\theta_m}{p_m}-1}\left[\ldots\left[\int_0^{2\pi}\left(f^{*_1,\ldots,*_m}(t_1,\ldots,t_m)\right)^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{p_1}-1} dt_1\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\ldots\right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} dt_m\right]^{\frac{1}{\theta_m}}$$

конечна, где $f^{*_1,\ldots,*_m}(t_1,\ldots,t_m)$ – невозрастающая перестановка функции $|f(\bar{x})|$ по каждой переменной x_j при фиксированных остальных переменных (см. [1]).

В случае $p_1 = \ldots = p_m = \theta_1 = \ldots = \theta_m = p$ пространство $L^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_p(I^m)$ (см. [2], с. 11).

Введем обозначение $\overset{\circ}{L}{}^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$ – множество всех функций $f \in L^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$ таких, что

$$\int_0^{2\pi} f(\bar{x})\, dx_j = 0 \ \ \forall j = 1, \ldots, m.$$

Функции $f \in L_1(I^m) = L(I^m)$ сопоставим ее ряд Фурье $\sum\limits_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^m} a_{\bar{n}}(f)\, e^{i\langle\bar{n},\bar{x}\rangle}$ по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle\bar{n},\bar{x}\rangle}\}_{\mathbb{Z}^m}$, где $\mathbb{Z}^m$ – множество точек из $\mathbb{R}^m$ с целочисленными координатами. Положим

$$\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{n}\in\rho(\bar{s})} a_{\bar{n}}(f)\, e^{i\langle\bar{n},\bar{x}\rangle},$$

где $\rho(\bar{s}) = \left\{\bar{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m \colon 2^{s_j-1} \leqslant |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \ldots, m\right\}$ и $\langle\bar{y}, \bar{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^m y_j x_j$, $s_j = 1, 2, \ldots$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление №211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт №02.A03.21.0006 от 27.08.2013) и гранта 5129/ГФ4 Министерства образования и науки Республики Казахстан.

© Г. Акишев, 2016

Числовая последовательность $\{a_{\bar n}\}_{\bar n\in\mathbb{Z}^m,}\in l_{\bar p}$, если

$$\|\{a_{\bar n}\}_{\bar n\in\mathbb{Z}^m}\|_{l_{\bar p}}=\left\{\sum_{n_m=-\infty}^{\infty}\left[\dots\left[\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}|a_{\bar n}|^{p_1}\right]^{\frac{p_2}{p_1}}\dots\right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}\right\}^{\frac{1}{p_m}}<+\infty,$$

где $\bar p=(p_1,\dots,p_m)$, $1\leqslant p_j<+\infty$, $j=1,\dots,m$.

Для краткости записи в случае выполнения неравенств $B_n\geqslant C_1A_n$ или $B_n\leqslant C_2A_n$ будем писать $B>>A$ или $B<<A$ соответственно, где C_1,C_2 – положительные числа, независящие от $n\in\mathbb{N}$.

$S_p^{\bar r}H$, $S_{p,\theta}^{\bar r}B$ – пространства функций с доминирующей смешанной производной определены соответственно С. М. Никольским [3] и Т. И. Амановым [4].

В анизотропном пространстве Лоренца $\overset{\circ}{L}{}^*_{\bar p,\bar\theta}(I^m)$ рассмотрим аналогичное пространство. Через $\overset{\circ}{S}{}^{\bar r}_{\bar p,\bar\theta,\bar\tau}B$ обозначим пространство всех функций $f\in\overset{\circ}{L}{}^*_{\bar p,\bar\theta}(I^m)$, для которых

$$\|f\|_{\overset{\circ}{S}{}^{\bar r}_{\bar p,\bar\theta,\bar\tau}B}=\left\|\left\{2^{\langle\bar s,\bar r\rangle}\|\delta_{\bar s}(f)\|^*_{\bar p,\bar\theta}\right\}_{\bar s\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_{\bar\tau}}<\infty.$$

где $\bar p=(p_1,\dots,p_m)$, $\bar\theta=(\theta_1,\dots,\theta_m)$, $\bar\tau=(\tau_1,\dots,\tau_m)$, $1<p_j<\infty$, $1\leqslant\theta_j<\infty$, $1\leqslant\tau_j\leqslant+\infty$, $r_j>0$, $j=1,\dots,m$. В этом пространстве рассмотрим класс (с сохранением обозначения)

$$\overset{\circ}{S}{}^{\bar r}_{\bar p,\bar\theta,\bar\tau}B=\left\{f\in\overset{\circ}{L}{}^*_{\bar p,\bar\theta}(I^m):\ \|f\|_{\overset{\circ}{S}{}^{\bar r}_{\bar p,\bar\theta,\bar\tau}B}=\left\|\left\{2^{\langle\bar s,\bar r\rangle}\|\delta_{\bar s}(f)\|^*_{\bar p,\bar\theta}\right\}_{\bar s\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_{\bar\tau}}\leqslant1\right\}.$$

Пусть дан вектор $\bar\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_m)$, $\gamma_j>0$, $j=1,\dots,m$. Положим

$$Q_n^{\bar\gamma}=\cup_{\langle\bar s,\bar\gamma\rangle<n}\rho(\bar s),\quad T(Q_n^{\bar\gamma})=\{t(\bar x)=\sum_{\bar k\in Q_n^{\bar\gamma}}b_{\bar k}e^{i\langle\bar k,\bar x\rangle}\},$$

$$Y^m(\bar\gamma,n)=\left\{\bar s=(s_1,\dots,s_m)\in\mathbb{Z}^m_+:\sum_{j=1}^m s_j\gamma_j\geqslant n\right\},$$

$E_n^{(\bar\gamma)}(f)_{\bar p,\bar\theta}$ — наилучшее приближение функции $f\in L^*_{\bar p,\bar\theta}(I^m)$ полиномами из множества $T(Q_n^{\bar\gamma})$. $S_n^{\bar\gamma}(f,\bar x)=\sum\limits_{\bar k\in Q_n^{\bar\gamma}}a_{\bar k}(f)\cdot e^{i\langle\bar k,\bar x\rangle}$ — частичная сумма ряда Фурье функции f.

Впервые способ приближения функций многих переменных тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболических крестов предложил К. И. Бабенко. В дальнейшем, приближение различных классов гладких функций этим методом исследовали С. А. Теляковский, Б. С. Митягин, Я. С. Бугров, Н. С. Никольская, Э. М. Галеев, В. Н. Темляков, Динь Зунг, Э. С. Белинский, А. С. Романюк, С. А. Стасюк, Н. Н. Пустовойтов, H.-J. Schmeisser и W. Sickel (см. библиографию в [5], [6]).

Известно, что для пространств Лоренца справедливы включения $L^*_{\bar q,\bar\theta}(I^m)\subset L^*_{\bar p,\bar\theta}(I^m)$ в случае $p_j<q_j$, $j=1,\dots,m$ и $L^*_{\bar p,\bar\theta}(I^m)\subset L^*_{\bar p,\bar q}(I^m)$, если $\theta_j<q_j$, $j=1,\dots,m$.

Точные оценки порядка приближения классов Никольского – Бесова в пространствах Лоренца с анизотропной метрикой случае $p_j<q_j$, $j=1,\dots,m$ установлены в [7], [8], [9].

Цель предлагаемой работы представить оценки величины

$$E_n^{\bar\gamma}\left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar r}_{\bar p,\bar q,\bar\tau}B\right)_{\bar p,\theta}=\sup_{f\in\overset{\circ}{S}{}^{\bar r}_{\bar p,\bar q,\bar\tau}B}E_n^{\bar\gamma}(f)_{\bar p,\theta}$$

в случае $\theta<q_j$, $j=1,\dots,m$.

Пусть $Y_{l_1,\dots,l_m}(f)_{\bar p,\bar\theta}$ наилучшим приближение «углом» функции $f\in L^*_{\bar p,\bar\theta}(I^m)$ тригонометрическими полиномами (см. [10]).

Теорема 1. *Пусть* $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $\bar{q} = (q_1, \ldots, q_m)$, $1 \leqslant p_j < +\infty$, $1 \leqslant \theta < q_j < +\infty$, $j = 1, \ldots, m$. *Если* $f \in L^*_{\bar{p},\bar{q}}(I^m)$ *и*

$$\sum_{n_m=2}^{\infty} \cdots \sum_{n_1=2}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{n_j (\ln n_j)^{\frac{\theta}{q_j}}} \Big(Y_{n_1,\ldots,n_m}(f)_{\bar{p},\bar{q}} \Big)^{\theta} < +\infty,$$

то $f \in L^*_{\bar{p},\theta}(I^m)$ *и имеет место неравенство*

$$\|f\|^*_{\bar{p},\theta} << \left\{ \sum_{n_m=2}^{\infty} \cdots \sum_{n_1=2}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{n_j (\ln n_j)^{\frac{\theta}{q_j}}} \Big(Y_{n_1,\ldots,n_m}(f)_{\bar{p},\bar{q}} \Big)^{\theta}. \right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Теорема 2. *Пусть* $1 < \theta \leqslant \min\{2, p\}$, $p \leqslant q_j$, $j = 1, \ldots, m$. *Если* $f \in L^*_{p,\bar{q}}(I^m)$ *и*

$$\sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} s_j^{\theta(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_j})} \big(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{p,\bar{q}} \big)^{\theta} < \infty, \qquad (20)$$

то $f \in L^*_{p,\theta}(I^m)$ *и*

$$\|f\|^*_{p,\theta} << \Big(\sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} s_j^{\theta(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_j})} \big(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{p,\bar{q}} \big)^{\theta} \Big)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < +\infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \min\{p, 2\}$, $0 < r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots \ldots \leqslant r_m$, $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$, $j = 1, \ldots, m$.

1. *Пусть* $\theta < \tau_j$, $j = 1, \ldots, m$. *Если* $1 < \theta \leqslant \min\{p, 2\}$ *и* $p \leqslant q_j$, $j = 1, \ldots, m$, *то*

$$E_n^{(\bar{\gamma})} \left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{p,\bar{q},\bar{\tau}} B \right)_{p,\theta} << 2^{-nr_1} n^{\sum\limits_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_j}\right) + \sum\limits_{j=2}^{m} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tau_j}\right)}.$$

Если $1 < q_j \leqslant p$, $j = 1, \ldots, m$, $\max\{p, 2\} \leqslant \theta < \infty$, *то*

$$E_n^{(\bar{\gamma})} \left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{p,\bar{q},\bar{\tau}} B \right)_{p,\theta} >> 2^{-nr_1} \cdot n^{m\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_j}\right) + \sum\limits_{j=2}^{m} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tau_j}\right)}.$$

2. *Пусть* $1 \leqslant \tau_j \leqslant \theta$, $j = 1, \ldots, m$. *Если* $1 < \theta \leqslant \min\{p, 2\}$ *и* $p \leqslant q_j$, $j = 1, \ldots, m$, *то*

$$E_n^{(\bar{\gamma})} \left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{p,\bar{q},\bar{\tau}} B \right)_{p,\theta} << \sup_{\bar{s} \in Y^m(\bar{\gamma}, n)} \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j r_j} s_j^{\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_j}}$$

Если $1 < p_j < \infty$, $1 < \theta_j < q_j < \infty$, $j = 1, \ldots, m$, *то*

$$E_n^{(\bar{\gamma})} \left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{q},\bar{\tau}} B \right)_{\bar{p},\bar{\theta}} >> \sup_{\bar{s} \in Y^m(\bar{\gamma}, n)} \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j r_j} s_j^{\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{q_j}}.$$

Список литературы

1. *Blozinski A.P.* Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms// Transac. Amer. Math. Soc. 1981. Vol. 263, no. 1. C. 146–167.
2. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. 456 с.
3. *Никольский С.М.* Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // Сиб. мат. жур. 1963. Т. 4. С. 1342–1364.
4. *Аманов Т. И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{\bar{r}}_{p,\theta}B(R_n)$ и $S^{\bar{r}}_{p,\theta}B, (0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi, j = 1, \ldots, n)$ // Труды Мат. инст. им. В. А. Стеклова. 1965. Т. 77. С. 5–34.
5. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды мат. инс. им. В.А. Стеклова. 1986. Т. 178. С. 3–112.

6. *Dinh Dung, Vladimir N. Temlyakov, Tino Ullrich* Hyperbolic cross approximation // arXiv: 1601. 03978v1[math.NA] 15 Jan. 2016. 154 p.
7. *Акишев Г.* Приближение функциональных классов в пространствах смешанной нормой// Мат. сб. 2006. Т. 197, № 8. С. 17–40.
8. *Akishev G.* On approximation of function classes in Lorentz spaces with anisotropic norm// Anal. Theory and applic. 2013. Vol. 29, №. 4. P. 358–372.
9. *Бекмаганбетов К. А.* О порядках приближения класса Бесова в метрике анизотропных пространств Лоренца // Уфимский матем. ж. 2009. Т. 1, № 2. С. 9–16.
10. *Потапов М.К.* Теоремы вложения в смешанной метрике // Труды мат. инст. им. В. А. Стеклова. 1980. Т. 156. С. 143–156.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 15–19

Квазипоперечники некоторых классов функций двух переменных в L_2

М. О. Акобиршоев

Технологический университет Таджикистана, Душанбе, Таджикистан

Аннотация. В гильбертовом пространстве $L_2(Q)$, $Q = \{0 \leqslant x, y \leqslant 2\pi\}$, найдены точные оценки линейных и колмогоровских квазипоперечников некоторых классов периодических функций двух переменных, у которых усредненные модули непрерывности высших порядков частных производных мажорируются заданными функциями.

Рассмотрим задачу нахождения точных значений квазипоперечников для классов дифференцируемых периодических функций двух переменных в гильбертовом пространстве $L_2(Q)$, $Q = \{0 \leqslant x, y \leqslant 2\pi\}$, с нормой

$$\|f\|_{L_2(Q)} = \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{Q} |f(x,y)|^2 dxdy \right\}^{1/2} < \infty.$$

Напомним необходимые понятия и определения, нужные нам в дальнейшем (см. напр. [1–5]). Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ – линейные нормированные пространства функций одной переменной, а

$$U_m = \mathrm{span}\,\{u_0(x), u_1(x), ..., u_m(x)\}\,, \quad V_n = \mathrm{span}\,\{v_0(y), v_1(y), ..., v_n(y)\}$$

– их конечномерные подпространства, $U_m \subset X$, $V_n \subset Y$. Выражение вида

$$g_{m,n}(x,y) = \sum_{\nu=0}^{m} u_\nu(x) \cdot \psi_\nu(y) + \sum_{\mu=0}^{n} v_\mu(y) \cdot \varphi_\mu(x),$$

где $\{\varphi_\mu(x)\}_{\mu=0}^{n}$ и $\{\psi_\nu(y)\}_{\nu=0}^{m}$ – наборы произвольных функций из пространств X и Y, назовём обобщенным полиномом, порожденным подпространствами U_m и V_n. Указанные обобщенные полиномы образуют подпространство

$$G(U_m, V_n) \stackrel{def}{=} U_m \otimes Y + V_n \otimes X,$$

где операции "$\otimes$" и "$+$" обозначают соответсвенно операции декартова произведения и прямой суммы множеств. Обозначим

$$\mathcal{E}(f; G(U_m, V_n))_Z \stackrel{def}{=} \inf\left\{\|f - g_{m,n}(f)\|_Z : \ g_{m,n}(f) \in G(U_m, V_n)\right\}, \tag{1}$$
$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z \stackrel{def}{=} \sup\left\{\mathcal{E}(f; G(U_m, V_n))_Z : \ f \in \mathfrak{M}\right\}.$$

Величина (1) характеризует наилучшее приближение элемента $f \in \mathfrak{M}$ множеством $G(U_m, V_n)$, а $\mathcal{E}(\mathfrak{M}, G(U_m, V_n))_Z$ – отклонение множества $\mathfrak{M}$ от подпространства $G(U_m, V_n)$ в нормированном пространстве $(Z, \|\cdot\|_Z)$.

Для центрально-симметричного множества $\mathfrak{M} \subset Z$ величину

$$d_{m,n}(\mathfrak{M}, Z) = \inf\left\{\mathcal{E}(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z : \ U_m \subset X, V_n \subset Y\right\} \tag{2}$$

называют квазипоперечником множества $\mathfrak{M}$ по Колмогорову $[1-4]$.

© М. О. Акобиршоев, 2016

Пусть $\mathscr{L}$ – линейный оператор, действующий на функцию $f \in \mathfrak{M}$, образ которого принадлежит множеству $G(U_m, V_n)$.

Положим

$$e(\mathfrak{M}, \mathscr{L})_Z = \sup\left\{\|f - \mathscr{L}(f)\|_Z : \ f \in \mathfrak{M}\right\},$$
$$e(\mathfrak{M}, G(U_m, V_n))_Z = \inf\left\{e(\mathfrak{M}, \mathscr{L})_Z : \ \mathscr{L}(f) \in G(U_m, V_n)\right\}.$$

Следуя [5], величину

$$d'_{m,n}(\mathfrak{M}, Z) = \inf\left\{e(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z : \ U_m \subset X, V_n \subset Y\right\} \tag{3}$$

назовем линейным квазипоперечником множества $\mathfrak{M}$ в пространстве Z. Непосредственно из приведённых определений следуют неравенства

$$e(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z \geqslant \mathcal{E}(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z,$$
$$d'_{m,n}(\mathfrak{M}, Z) \geqslant d_{m,n}(\mathfrak{M}, Z).$$

В задачах (2) и (3) наибольший интерес представляет отыскание экстремальных подпространств $U_m^0 \subset X$, $V_n^0 \subset Y$, для которых выполняется равенство

$$\mathcal{E}\left(\mathfrak{M}, G(U_m^0, V_n^0)\right)_Z = e\left(\mathfrak{M}, G(U_m^0, V_n^0)\right)_Z = d'_{m,n}(\mathfrak{M}, Z) = d_{m,n}(\mathfrak{M}, Z).$$

Далее всюду полагаем $X = Y = L_2[0, 2\pi]$ – пространство суммируемых с квадратом 2π-периодических функций $f(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$, $Z = L_2(Q)$.

В этой работе для некоторых центрально-симметричных множеств периодических функций $\mathfrak{M} \subset L_2(Q)$ вычисляются величины

$$d_{m,n}\left(\mathfrak{M}, L_2(Q)\right) = \inf\left\{\mathcal{E}\left(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n)\right)_{L_2(Q)} : \ U_m, V_n \subset L_2[0, 2\pi]\right\},$$
$$d'_{m,n}(\mathfrak{M}, L_2(Q)) = \inf\left\{e(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_{L_2(Q)} : \ U_m, V_n \subset L_2[0, 2\pi]\right\}.$$

В работе [3] доказано, что если

$$U^*_{2m-1} = \operatorname{span}\left\{(\cos jx)_{j=0}^{m-1}, (\sin jx)_{j=1}^{m-1}\right\},$$
$$V^*_{2n-1} = \operatorname{span}\left\{(\cos ly)_{l=0}^{n-1}, (\sin ly)_{l=1}^{n-1}\right\}$$

– подпространства тригонометрических полиномов порядка $2m-1$ по переменной x и $2n-1$ по переменной y, то

$$\mathcal{E}(f; G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1}))_{L_2(Q)} = \left\{\sum_{|j|\geqslant m}\sum_{|l|\geqslant n} |c_{jl}(f)|^2\right\}^{1/2}, \tag{4}$$

где

$$c_{jl}(f) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{(Q)} f(x,y)e^{-i(jx+ly)}dxdy$$

– коэффициенты Фурье формального разложения $f(x,y)$ в виде двойного ряда Фурье

$$f(x,y) \sim \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{jl}(f)e^{i(jx+ly)}. \tag{5}$$

В частности, из (4) и (5) следует, что если $f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$, то

$$\mathcal{E}(f; G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1}))_{L_2(Q)} = \mathcal{E}(\varphi, U^*_{2m-1})_{L_2[0,2\pi]}\mathcal{E}(\psi, V^*_{2n-1})_{L_2[0,2\pi]}, \tag{6}$$

где

$$\mathcal{E}(g, G_{2p-1})_{L_2[0,2\pi]} = \inf\left\{\|g - T_p(g)\|_{L_2[0,2\pi]} : T_p(g) \in G_{2p-1}\right\}$$

– величина наилучшего среднеквадратического приближения функции $g(x)$ тригонометрическими полиномами $G_{2p-1} = \operatorname{span}\left\{(\cos jx)_{j=0}^{p-1}, (\sin jx)_{j=0}^{p-1}\right\}$ порядка $2p-1$ в пространстве $L_2[0,2\pi]$. Для произвольной функции $f(x,y)\in L_2(Q)$ определим смешанный модуль непрерывности равенством

$$\omega_{k,p}(f;t,\tau)_{L_2(Q)}=\sup\left\{\|\Delta_{u,v}^{k,p}f(x,y)\|_{L_2(Q)}:\ |u|\leqslant t,|v|\leqslant\tau\right\}, \tag{7}$$

где

$$\Delta_{u,v}^{k,p}f(x,y)=\sum_{\nu=0}^{k}\sum_{\mu=0}^{p}(-1)^{\nu+\mu}\binom{k}{\nu}\binom{p}{\mu}f(x+\nu u,y+\mu v).$$

Используя равенство Парсеваля, величину (7) можно записать в следующем виде:

$$\omega_{k,p}^2(f;t,\tau)_{L_2(Q)}=$$
$$=2^{k+p}\sup\left\{\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}|c_{jl}(f)|^2(1-\cos ju)^k(1-\cos lv)^p:\ |u|\leqslant t,|v|\leqslant\tau\right\}. \tag{8}$$

В частности, для функции $f_0(x,y)=\cos mx\cos ny$ из (8) имеем:

$$\omega_{k,p}^2(f_0;t,\tau)_{L_2(Q)}=2^{k+p}(1-\cos mt)^k(1-\cos n\tau)^p.$$

Понимая под $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, обозначим через $C^{(r,s)}(Q),\ r,s\in\mathbb{N}$ – множество функций $f(x,y)$, имеющих в квадрате Q непрерывные частные производные $f^{(\nu,\mu)}(x,y)=\partial^{\mu+\nu}f/\partial x^\nu\partial y^\mu,\ \ \nu\leqslant r,\mu\leqslant s$, а через $L_2^{(r,s)}(Q),\ r,s\in\mathbb{N}$ – множество функций $f(x,y)\in C^{(r-1,s-1)}(Q)$, $r,s\geqslant 1$, у которых частные производные $f^{(r,\mu)}(x,y),\ \mu=\overline{0,s-1},\ f^{(\nu,s)}(x,y),\ \nu=\overline{0,r-1}$ существуют, кусочно-непрерывны, допускают перемену порядка дифференцирования и $f^{(r,s)}(x,y)\in L_2(Q)$. Легко проверить, что для произвольной функции $f(x,y)\in L_2^{(r,s)}(Q)$ выполняется неравенство

$$\mathcal{E}(f;G(U_{2m-1}^*,V_{2n-1}^*))_{L_2(Q)}\leqslant m^{-r}n^{-s}\mathcal{E}(f^{(r,s)};G(U_{2m-1}^*,V_{2n-1}^*))_{L_2(Q)},$$

которое является точным в том смысле, что для функции

$$f_0(x,y)=\cos mx\cos ny\in L_2^{(r,s)}(Q),\ r,s\in\mathbb{N},$$

обращается в равенство.

С нашей точки зрения, определённый интерес представляет изучение экстремальной характеристики

$$\mathcal{K}(\varphi;h,\eta)\overset{def}{=}\mathcal{K}_{m,n,r,s,k,p,q}(\varphi;h,\eta)=\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)}\frac{2^{(k+p)/2}\mathcal{E}(f;G(U_{2m-1}^*,V_{2n-1}^*))_{L_2(Q)}}{\left(\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta\omega_{k,p}^q(f^{(r,s)};t,\tau)\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}},$$

где $m,n,k,p\in\mathbb{N},\ r,s\in\mathbb{Z}_+,\ q\in\mathbb{R}_+\backslash\{0\},\ 0<h\leqslant\pi/m,\ 0<\eta\leqslant\pi/n,\ \varphi(t,\tau)$ – *весовая функция на* $[0,h]\times[0,\eta]$, т.е. неотрицательная суммируемая на $[0,h]\times[0,\eta]$ функция, не эквивалентная нулевой функции. Имеет место следующее общее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $m,n,k,p\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $0<q\leqslant 2$, $0<h\leqslant\pi/n$, $0<\eta\leqslant\pi/n$, $\varphi(t,\tau)$ *– весовая функция на* $[0,h]\times[0,\eta]$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\{A_{k,p}(\varphi)\}^{-1}\leqslant\mathcal{K}(\varphi;h,\eta)\leqslant\left\{\inf_{\substack{k\leqslant\nu<\infty\\ p\leqslant\mu<\infty}}A_{\nu,\mu}(\varphi)\right\}^{-1},$$

где

$$A_{\nu,\mu}(\varphi)\overset{def}{=}A_{\nu,\mu}(\varphi;r,s,q,k,p)=\left(\nu^{rq}\mu^{sq}\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta(1-\cos\nu t)^{kq/2}(1-\cos\mu\tau)^{pq/2}\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}.$$

Следствие. *Пусть выполняются все условия теоремы 1 и $\varphi(t,\tau)\equiv g(t)\psi(\tau)$, причём функции $g(t)$ и $\psi(\tau)$ соответственно на отрезках $[0,h]$ и $[0,\eta]$ являются неотрицательными и дифференцируемыми. Если при некоторых $r,s\in\mathbb{N}$ и любых $t\in(0,h)$ и $\tau\in(0,\eta)$ выполнены дифференциальные неравенства*

$$(rq-1)g(t)-tg'(t)\geqslant 0,\quad (sq-1)\psi(\tau)-\tau\psi'(\tau)\geqslant 0,$$

то имеет место равенство

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)}\frac{2^{k+p}m^rn^s\mathcal{E}(f;G(U^*_{2m-1},V^*_{2n-1}))_{L_2(Q)}}{\left(\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta\omega^q_{k,p}(f^{(r,s)};t,\tau)g(t)\psi(\tau)dtd\tau\right)^{1/q}}=$$

$$=\left(\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta\left(\sin\frac{mt}{2}\right)^{kq}\left(\sin\frac{n\tau}{2}\right)^{pq}g(t)\psi(\tau)dtd\tau\right)^{-1/q}. \tag{9}$$

Существует функция $f_0\in L_2^{(r,s)}(Q)$, для которой верхняя грань в соотношении (9) достигается.

Пусть $\Phi_j(u)$ $(j=1,2)$ – произвольные непрерывные возрастающие при $u\geqslant 0$ функции, причём $\Phi_j(0)=0$ $(j=1,2)$. Через

$$W^{(r,s)}_{k,p,q}(\Phi_{1,2})\overset{def}{=}W^{(r,s)}_q(\Phi_{1,2};\omega_{k,p})$$

обозначим множество функций $f(x,y)\in L_2^{(r,s)}(Q)$, которые при заданных $k,p,r,s\in\mathbb{N}$, $0<q\leqslant 2$ удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta\omega^q_{k,p}(f^{(r,s)};t,\tau)dtd\tau\leqslant\Phi_1^q(h)\Phi_2^q(\eta)\quad\text{сразу для всех}\quad h,\eta\in\mathbb{R}_+.$$

Далее воспользуемся обозначением

$$(\sin t)_*^{\alpha q}\overset{def}{=}\Big\{(\sin t)^{\alpha q},\ \text{если}\ \ 0<t\leqslant\pi/2;\ \ 1,\ \text{если}\ \ t>\pi/2\Big\}.$$

Результат следствия, в частности при $g(t)=\psi(\tau)\equiv 1$, позволяет при выполнении некоторых ограничений относительно мажорант $\Phi_j(u)$ $(j=1,2)$ сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть при заданных $k,p\in\mathbb{N}$, $0<q\leqslant 2$ функции $\Phi_j(u)$ $(j=1,2)$ удовлетворяют условиям*

$$\Phi_1^q(u)\int\limits_0^{\mu\pi}\left(\sin\frac{t}{2}\right)_*^{kq}dt\leqslant\Phi_1^q(\mu u)\int\limits_0^{\pi}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{kq}dt,$$

$$\Phi_2^q(u)\int\limits_0^{\mu\pi}\left(\sin\frac{\tau}{2}\right)_*^{pq}d\tau\leqslant\Phi_2^q(\mu u)\int\limits_0^{\pi}\left(\sin\frac{\tau}{2}\right)^{pq}dt$$

сразу для всех $0<u\leqslant\pi$ и $\mu\in\mathbb{R}_+$. Тогда при любых $m,n,r,s\in\mathbb{N}$ выполняются равенства

$$d_{2m-1,2n-1}\Big(W^{(r,s)}_{k,p,q}(\Phi_{1,2});L_2(Q)\Big)=d'_{2m-1,2n-1}\Big(W^{(r,s)}_{k,p,q}(\Phi_{1,2});L_2(Q)\Big)=$$

$$=2^{(k+p)-(m+n)}\,m^{-r+1/q}\,n^{-s+1/q}\left\{\frac{\Gamma(kq+1)\Gamma(pq+1)}{\Gamma\left(\frac{kq+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{pq+1}{2}\right)}\right\}^{1/q}\Phi_1\left(\frac{\pi}{m}\right)\Phi_2\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Список литературы

1. *Вакарчук С.Б.*, *Шабозов М.Ш.* О точных значениях квазипоперечников некоторых функциональных классов // Укр. мат. журнал. 1996. Т. 48, № 3. С. 301–308.
2. *Вакарчук С.Б.*, *Шабозов М.Ш.* Квазипоперечники и оптимизация методов смешанной аппроксимации многомерных сингулярных интегралов с ядрами типа Гильберта // Укр. мат. журнал. 1996. Т. 48, № 6. С. 753–770.
3. *Шабозов М.Ш.*, *Акобиршоев М.О.* Квазипоперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных // ДАН России. 2005. Т. 404, № 4. С. 460–464.
4. *Шабозов М.Ш.*, *Акобиршоев М.О.* О точных значениях квазипоперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных // Укр. мат. журнал. 2009, Т.61, №6. С.855–864.
5. *Шабозов М.Ш.*, *Акобиршоев М.О.* Точные значения квазипоперечников некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных // Analysis Mathematica. 2009. Т. 35. С. 61–72.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 20–23

Граничная задача оптимального восстановления аналитических функций в круге

Р. Р. Акопян

Озёрский технологический институт НИЯУ МИФИ, Озёрск, Россия
Институт математики и компьютерных наук Уральского федерального университета им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

Аннотация. Рассматривается задача оптимального восстановления аналитической функции на подмножестве единичного круга по заданным с погрешностью, относительно нормы $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$, ее граничным значениям на части γ_1 единичной окружности. Обсуждается задача выбора оптимальной информации – множества γ_1.

1. Обозначения. Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ — открытый единичный круг с границей $\Gamma = \{z = e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$ — единичной окружностью; E_1 — произвольное измеримое подмножество $[0, 2\pi]$, соответственно, γ_1 — измеримое подмножество $\{z = e^{it} : t \in E_1\}$ окружности Γ. Будем предполагать, что мера γ_1 совпадает с мерой E_1 и положительна, $m(\gamma_1) > 0$.

Рассмотрим пространство Харди $H^1(D)$ функций, аналитических в круге D. Для произвольной функции f из пространства $H^1(D)$ почти всюду на Γ существуют некасательные предельные граничные значения, которые составляют функцию из $L^1(\Gamma)$.

Через ϕ обозначим неотрицательную, суммируемую на $[0, 2\pi]$ функцию, а через ϕ_1 и ϕ_0 – её сужения соответственно на E_1 и $E_0 = [0, 2\pi] \setminus E_1$. Для $\eta > 0$ определим функцию Φ_η равенством

$$\Phi_\eta(t) = \begin{cases} \phi_0(t), & t \in E_0, \\ \eta\phi_1(t), & t \in E_1. \end{cases} \tag{1}$$

В случае $\eta = 1$ имеет место равенство $\Phi_1 = \phi$. Также предположим, что функции $\ln \phi_k$ и $1/\phi_k$ соответственно суммируемы на E_k, $k = 0, 1$. Ясно, что в этом случае при всех $\eta > 0$ функции Φ_η и $\ln \Phi_\eta$ из $L^1(0, 2\pi)$. На γ_1 и $\gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1$ определим функции $\psi_k, k = 0, 1$, равенствами

$$\psi_k(e^{it}) = 1/\phi_k(t), \quad t \in E_k, \quad k = 0, 1.$$

Введем $H[\phi_1, \gamma_1]$ — подпространство $L^1(\gamma_1)$ функций, являющихся граничными значениями функций из $H^1(D)$ на γ_1, с конечной L^∞-нормой с весом ψ_1, то есть

$$\|f\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)} = \|f(e^{i\cdot})/\phi_1\|_{L^\infty(E_1)} < +\infty,$$

или, что то же самое, существует M, $0 \leqslant M < +\infty$, такое, что почти всюду на E_1 справедливо неравенство

$$|f(e^{it})| \leqslant M\phi_1(t).$$

Исследования выполнены при поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-9356.2016.1).

© Р. Р. Акопян, 2016

В $H[\phi_1, \gamma_1]$ выделим класс Q функций, для которых граничные значения на γ_0 соответствующей аналитической функции удовлетворяют условию

$$f \in L^\infty_{\psi_0}(\gamma_0), \quad \|f\|_{L^\infty_{\psi_0}(\gamma_0)} = \|f(e^{i\cdot})/\phi_0\|_{L^\infty(E_0)} \leqslant 1,$$

или, другими словами, почти всюду на E_0 справедливо неравенство

$$|f(e^{it})| \leqslant \phi_0(t).$$

Пусть K – подмножество единичного круга D, $(K, \widetilde{m})$ – метрическое пространство с некоторой конечной мерой $\widetilde{m}$. Обозначим через $B = B(K)$ функциональную банахову структуру (функциональную банахову решетку) — банахово пространство функций, измеримых по мере $\widetilde{m}$ на множестве K, с монотонной нормой $\|\cdot\|_B$, т. е. удовлетворяющей утверждению:
если $f_2 \in B(K)$ и почти всюду на K $|f_1(z)| \leqslant |f_2(z)|$, то $f_1 \in B(K)$ и $\|f_1\|_B \leqslant \|f_2\|_B$.
Будем считать, что функция $\epsilon \equiv 1$ принадлежит пространству $B(K)$ и ее норма равна единице, т. е. $\|\epsilon\|_B = 1$. В частности это означает, что все существенно ограниченные функции принадлежат $B(K)$. Более того, далее предполагается справедливость вложения $Q \subset B(K)$.

Введем Υ — оператор из $H[\phi_1, \gamma_1]$ в $B(K)$, ставящий в соответствие граничным значениям на γ_1 аналитической функции из $H^1(D)$ её сужение на K. На классе Q рассматриваются несколько взаимосвязанных экстремальных задач для оператора Υ.

Для неотрицательной функции $\varphi \in L^1(0, 2\pi)$ такой, что $\ln\varphi \in L^1(0, 2\pi)$, функция

$$s(z, \varphi) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, \ln\varphi(t)\, dt\right\}$$

называется функцией Сегё. Для предельных граничных значений почти всюду на $(0, 2\pi)$ имеет место равенство

$$|s(e^{it}, \varphi)| = \varphi(t).$$

Для функции Сегё с граничными значениями Φ_δ (Φ_δ определена равенством (1) при $\eta = \delta$) введем специальные обозначения

$$s_\delta(z) = s(z, \Phi_\delta), \quad s(z) = s_1(z) = s(z, \phi).$$

Пусть $w = w(\cdot, \gamma_1, D)$ — гармоническая в круге D функция, имеющая почти всюду на γ_1 граничные значения, равные единице, и на $\gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1$ — равные нулю. Значение $w(z, \gamma_1, D)$ этой функции в точке $z \in D$ называется (см., например, [7, гл.VIII, §4]) гармонической мерой множества γ_1 относительно точки z и области D. Для гармонической меры γ_1 относительно точки $z = re^{i\tau}$, $0 \leqslant r < 1$, и круга D справедливо представление

$$w(z, \gamma_1, D) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, t-\tau)\, \chi_{E_1}(t)\, dt,$$

в котором P — ядро Пуассона круга D, определяемое равенством

$$P(r, t) = \operatorname{Re}\frac{e^{it} + r}{e^{it} - r} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2},$$

и χ_{E_1} — характеристическая функция множества E_1.

2. Постановка задачи. Пусть для неизвестной функции f из класса Q задана функция $q \in L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ такая, что почти всюду на E_1 справедливо неравенство

$$|f(e^{it}) - q(e^{it})| \leqslant \delta\phi_1(t),$$

или, что то же самое, $\|f-q\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)} \leqslant \delta$. Иными словами, заданы граничные значения функции f с погрешностью на части границы γ_1. Мы хотим наилучшим (оптимальным) способом восстановить по q функцию f на K. В качестве множества методов восстановления $\mathcal{R}$, из которых выбирается оптимальный, будем рассматривать $\mathcal{O}$ — множество всех возможных, $\mathcal{B}$ — ограниченных или $\mathcal{L}$ — линейных операторов из $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ в $B(K)$. Точная постановка задачи следующая. Для числа $\delta \geqslant 0$ и метода восстановления $T \in \mathcal{R}$ определим величину погрешности метода формулой

$$\mathcal{U}(T,\delta) = \sup\left\{\|f - Tq\|_B \colon f \in Q,\ q \in L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1),\ \|f-q\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)} \leqslant \delta\right\}. \tag{2}$$

Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) = \inf\{\mathcal{U}(T,\delta) \colon T \in \mathcal{R}\} \tag{3}$$

есть величина оптимального восстановления аналитической функции на множестве K (или, что то же самое, оптимального восстановления оператора Υ) с помощью методов восстановления $\mathcal{R}$ на функциях класса Q по их граничным значениям на γ_1, заданным с ошибкой δ по норме $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления – оператора, на котором в (3) достигается нижняя грань.

Задача (3) есть частный случай задачи оптимального восстановления операторов на классе элементов банахова пространства по неполной (в частности – неточной) информации. Общие результаты в этой тематике и дальнейшие ссылки можно найти в [6], [3], [9], [4], [5], [10]. Результаты, связанные с оптимальным восстановлением на классах аналитических функций, можно найти в монографии [10]; в работах автора [1], [2].

3. Оптимальное восстановление Υ. Определим оператор $\mathcal{T}_\sigma$ формулой

$$(\mathcal{T}_\sigma q)(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1} P(r,t-\tau)\frac{s_\delta(z)}{s_\delta(e^{it})}\, q(e^{it})\, dt = \tag{4}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1} P(r,t-\tau)\frac{s(z)}{s(e^{it})}\left(\frac{h(z)}{h(e^{it})}\right)^\sigma q(e^{it})\, dt, \quad z = re^{i\tau} \in K.$$

В следующей теореме приведено решение задачи оптимального восстановления оператора Υ.

Теорема 1. *Для произвольного $K \subset D$ и $\delta > 0$ справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \|s\delta^w\|_B. \tag{5}$$

При этом оптимальным методом восстановления является метод $\mathcal{T}_\sigma, \sigma = \ln\delta$, определяемый соотношением (4).

4. Выбор оптимальной информации при восстановлении Υ. В этой части работы рассмотрим задачу оптимального восстановления оператора Υ с наилучшим выбором множества γ_1, на котором заданы (с погрешностью) граничные значения функции. Точная постановка задачи следующая. Пусть для параметров δ, μ справедливы неравенства $0 < \delta \leqslant 1$ и $0 < \mu < 2\pi$. Рассмотрим

$$\mathtt{E}_{\mathcal{R}}(\delta,\mu) = \inf\left\{\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) \ :\ m(\gamma_1) \leqslant \mu\right\}, \tag{6}$$

— точную нижнюю грань величины оптимального восстановления (3) по всевозможным измеримым подмножествам γ_1 единичной окружности Γ, мера которых не превосходит числа μ. В экстремальной задаче (6) кроме значения нижней грани представляет интерес множество, на котором она достигается.

Общую постановку задачи выбора оптимальной информации можно найти в работе [8].

Рассмотрим случай, когда множество K состоит из точки z_0, и, соответственно, Υ является функционалом – значением функции в точке $z_0 \in D$, $\Upsilon f = f(z_0)$. Обозначим через u_μ функцию, определяемую в круге D равенством

$$u_\mu(z) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \operatorname{tg}\frac{\mu}{4}\right).$$

Ясно, что функция u_μ является радиальной, то есть $u_\mu(z) = u(|z|)$, $z \in D$.

Теорема 2. *В случае* $K = z_0 = re^{i\tau}$, $0 < r < 1$, *при* $0 < \delta \leqslant 1$ *и* $0 < \mu < 2\pi$ *для величины* (6) *справедливо равенство*

$$\mathtt{E}_{\mathcal{R}}(\delta, \mu) = |s(re^{i\tau})| \delta^{u_\mu(r)}.$$

При этом нижняя грань в (6) *достигается на дуге окружности*

$$\gamma_1 = \left\{ e^{it} \,:\, |t - \tau| < \frac{\mu}{2} \right\}.$$

Список литературы

1. *Акопян Р.Р.* Оптимальное восстановление аналитической функции в двусвязной области по ее приближенно заданным граничным значениям // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 14–19.
2. *Акопян Р.Р.* Оптимальное восстановление аналитической функции по заданным с погрешностью граничным значениям // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 2. С. 163–170.
3. *Арестов В.В.* О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора // Матем. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 231–244.
4. *Арестов В.В.* Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Сборник трудов Всесоюзной школы по теории функций (Душанбе, август 1986 г.), Тр. МИАН СССР. 189. – М.: Наука, 1989. С. 3–20.
5. *Арестов В.В.*, *Габушин В.Н.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Матем. 1995. № 11. С. 42–68.
6. *Арестов В.В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51. Вып. 6(312). С. 89–124.
7. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.,Л.: ГИТТЛ 1952. М.: Наука, 1966. 628 с.
8. *Магарил-Ильяев Г. Г.*, *Тихомиров В.М.*, *Осипенко К. Ю.* Неопределенность знания об объекте и точность методов его восстановления // Пробл. передачи информ. 2003. Т. 39. Вып 1. С. 18–133.
9. *Micchelli Ch.A.*, *Rivlin Th.J.* A survey of optimal recovery // Optimal estimation in approximation theory. – N.Y. etc.: Plenum Press, 1977. P. 1–54.
10. *Osipenko K.Yu.* Optimal Recovery of Analytic Functions. – Huntington: NJVA Science Publ.Inc. 2000. 229 p.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 24–28

Корни Боаса – Каца положительно определенных функций с компактным носителем

Р. Р. Акопян, А. В. Ефимов

Институт математики и компьютерных наук Уральского федерального университета им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

Аннотация. Для непрерывных вещественнозначных положительно определенных функций m переменных ($m > 1$) с носителем в ограниченном выпуклом центрально симметричном теле пространства $\mathbb{R}^m$ получены необходимые и достаточные условия существования вещественнозначных четных корней Боаса – Каца.

Пусть $\mathbb{R}^m$ — евклидово пространство размерности $m \in \mathbb{N}$ со стандартным скалярным произведением $xt = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k t_k$ элементов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $t = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$ и нормой $|x| = \sqrt{xx}$. Будем обозначать через $\widehat{f}$ преобразование Фурье

$$\widehat{f}(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(t) e^{-2\pi i\, tz}\, dt, \qquad z \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

функции f из пространств $L_1(\mathbb{R}^m)$ или $L_2(\mathbb{R}^m)$ комплекснозначных измеримых функций, соответственно, суммируемых или суммируемых с квадратом на $\mathbb{R}^m$ (см., например, [13, гл. I, §§ 1, 2]). Для пары функций φ_1, $\varphi_2 \in L_2(\mathbb{R}^m)$ определим операцию свертки равенством

$$(\varphi_1 \widetilde{*} \varphi_2)(x) = \int\limits_{t \in \mathbb{R}^m} \varphi_1(t) \overline{\varphi_2(x+t)} dt.$$

В работе исследуется вопрос об условиях существования решения $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^m)$ уравнения

$$\varphi \widetilde{*} \varphi = f. \tag{2}$$

Будем рассматривать уравнение (2) в случае, когда функция $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ положительно определенная, т. е. имеет неотрицательное преобразование Фурье, $\widehat{f}(x) \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^m$, суммируемое на $\mathbb{R}^m$. В этом случае функция φ в представлении (2) всегда найдется. Действительно, в качестве φ можно взять обратное преобразование Фурье функции $\sqrt{\widehat{f}}$. Это классическое утверждение, известное (см., например, [14, гл. 2, §§ 10, 11]) как критерий Винера – Хинчина – Колмогорова: произвольная характеристическая функция распределения f, т. е. преобразование Фурье плотности вероятности, представима в виде самосвертки некоторой (комплекснозначной) функции φ. Или, в терминах теории преобразования сигналов, спектральная плотность мощности сигнала есть преобразование Фурье автокорреляционной функции.

Исследования выполнены при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

© Р. Р. Акопян, А. В. Ефимов, 2016

Нас интересует решение уравнения (2) с определенными дополнительными свойствами. В частности, в предположении компактности носителя f, существование φ с компактным носителем. Ключевым здесь является следующий результат, существенно дополняющий критерий Винера – Хинчина – Колмогорова в одномерном случае. В 1945 году Боас и Кац [4] для $m = 1$ показали, что в случае, когда функция f, имеет носитель в отрезке $[-\sigma, \sigma]$, существует (комплекснозначная) функция $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ с носителем в отрезке $[-\sigma/2, \sigma/2]$, являющаяся корнем уравнения (2). W. Ehm, T. Gneiting и D. Richards [6] назвали такую функцию φ *корнем Боаса – Каца* функции f.

Перейдя в равенстве (2) к преобразованиям Фурье, утверждение Боаса – Каца можно эквивалентно сформулировать [6, § 1.2] как следующую теорему о факторизации целых функций экспоненциального типа. Пусть F — целая (т. е. аналитическая в $\mathbb{C}$) функция экспоненциального типа σ, $\sigma < +\infty$, т. е. удовлетворяющая условию

$$\limsup_{r\to\infty} r^{-1} \log \max_{|z|=r} |F(z)| \leqslant \sigma,$$

является неотрицательной и суммируемой на вещественной оси $\mathbb{R}$. Тогда существует целая функция Ψ экспоненциального типа $\sigma/2$ такая, что справедливо равенство

$$\Psi(z)\overline{\Psi(\overline{z})} = F(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Последнее равенство для целых функций на всей комплексной плоскости справедливо тогда и только тогда, когда справедливо равенство $|\Psi(x)|^2 = F(x)$ на вещественной оси. Такое представление является аналогом теоремы Рисса о неотрицательных тригонометрических полиномах (см., например, [12, гл. VI, теорема 40]): всякий тригонометрический полином T_n порядка n, принимающий лишь неотрицательные значения, может быть представлен в форме $T_n(t) = |P_n(e^{2\pi i t})|^2$, где P_n – алгебраический многочлен степени не выше n.

Через $\mathbb{D}$ обозначим произвольное ограниченное выпуклое центрально симметричное тело в $\mathbb{R}^m$. Рассмотрим класс $G_m(\mathbb{D})$ вещественнозначных функций f, определенных на $\mathbb{R}^m$ и обладающих следующими свойствами:

1) непрерывные на всем пространстве $\mathbb{R}^m : f \in C(\mathbb{R}^m)$;

2) носитель $\mathrm{supp} f$, принадлежит множеству $\mathbb{D}$;

3) положительно определенные, то есть преобразование Фурье функций f неотрицательно: $\widehat{f}(x) \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^m$.

Для произвольной функции $f \in G_m(\mathbb{D})$ ее преобразование Фурье $\widehat{f}$ определенно формулой (1) уже при $z \in \mathbb{C}^m$ и является на $\mathbb{C}^m$ целой функцией, т. е. аналитической (голоморфной) в произвольной точке z пространства $\mathbb{C}^m$. Кроме того, как сама функция f, так и ее преобразование Фурье $\widehat{f}$ являются четными функциями, то есть справедливы равенства

$$f(-t) = f(t),\, t \in \mathbb{R}^m; \qquad \widehat{f}(-z) = \widehat{f}(z),\, z \in \mathbb{C}^m.$$

В работе [6] получены критерии существования вещественнозначных и/или четных корней Боаса – Каца для функции $f \in G_1([-\sigma, \sigma])$ в одномерном случае. При $m > 1$ получены критерии существования (комплекснозначных), существования вещественнозначных и/или радиальных корней Боаса – Каца для радиальной функции $f \in G_m(\mathbb{B}_r)$ с носителем в $\mathbb{B}_r$ — шаре радиуса r с центром в начале координат. Точная формулировка результатов будет приведена ниже в теореме B.

Целью данного исследования является получение критерия существования вещественнозначных и (одновременно) четных корней Боаса – Каца для функции f из класса $G_m(\mathbb{D})$ для произвольного ограниченного выпуклого центрально симметричного тела $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^m$ при $m > 1$. Наш интерес к существованию корней Боаса – Каца вызван исследованиями задачи Турана на классе $G_m(\mathbb{D})$ и близких к ней экстремальных задач. Для всех известных случаев экстремальная функция в задаче Турана являются самосверткой, а точнее самосверткой характеристической функции множества $\mathbb{D}/2$.

Задача Турана в классическом варианте заключается в исследовании величины

$$AE(\mathbb{D}) = \sup_{f\in G_m(\mathbb{D})} \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\,dx = \sup_{f\in G_m(\mathbb{D})} \widehat{f}(0). \tag{3}$$

Эту задачу и ее вариант для тригонометрических рядов называют задачей Турана, так как П. Туран сформулировал ее для 2π-периодических функций одного переменного и отрезка $\mathbb{D} = [-h, h]$, $0 < h \leqslant \pi$, в начале 1970х годов в разговоре с С. Б. Стечкиным. В 1972 г. С. Б. Стечкин [11] решил ее в случае $h = 2\pi/N$, $N = 2, 3, \dots$. Окончательное решение этой задачи получили В. И. Иванов, Д. В. Горбачев, Ю. Д. Рудомазина (см. работу [8] и приведенную там библиографию). Позже выяснилось, что решение задачи (3) для функций одного переменного на числовой оси еще в 1945 году получили R. P. Boas, Jr. и M. Кас [4]. В 1997 г. задача для многомерного куба была решена Н. Н. Андреевым [1]; он также дал оценки величины (3) при $m = 3, 4$ для октаэдра. В 2000 г. Д. В. Горбачев [7] решил задачу Турана для m-мерных евклидовых шаров. В 2001 г. В. В. Арестов и Е. Е. Бердышева решили задачу Турана для правильного шестиугольника на плоскости [2], а в 2002 г. — для класса многогранников, которыми можно покрыть пространство $\mathbb{R}^m$ с помощью сдвигов [3]. Исторический обзор, факты о связи с другими задачами и информацию о случаях, когда точное решение задачи Турана известно, могут быть найдены в обзорной части статьи Sz. Revesz'а [9].

Приведем известные нам результаты о представлении функций класса $G_m(\mathbb{B}_r)$. Напомним, что функция, значения которой зависят только от $|t|$, называется радиальной, т. е. $f(t) = f_0(|t|), t \in \mathbb{R}^m$, где функция f_0 одной переменной определена на $[0, +\infty)$. В работе [10] для бесконечно дифференцируемых радиальных функций класса $G_m(\mathbb{B}_r)$ было получено следующее представление.

Теорема A (Рудин, 1970) *Бесконечно дифференцируемая радиальная функция f из класса $G_m(\mathbb{B}_r)$ может быть представлена в виде не более чем счетной суммы*

$$f = \sum_k \left(\varphi_k \widetilde{*} \varphi_k + \sum_{l=1}^{m} \omega_{kl} \widetilde{*} \omega_{kl} \right), \tag{4}$$

где ω_k и $\varphi_k : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ — радиальные, бесконечно дифференцируемые функции с носителем в шаре радиуса $r/2$,

$$\omega_{kl} = \frac{\partial \omega_k}{\partial x_l}, \qquad l = 1, 2, \dots, m.$$

При этом ряды в правой части (4) *сходятся равномерно.*

В статье [5] получен аналог теоремы A для случая непрерывных (радиальных) функций.

В работе [6] при $m > 1$ получен критерий возможности более простого представления радиальной функции f класса $G_m(\mathbb{B}_r)$: $f = \varphi \widetilde{*} \varphi$, где φ – функция из пространства $L_2(\mathbb{R}^m)$ с носителем в шаре $\mathbb{B}_{r/2}$, то есть является корнем Боаса–Каца функции f. Также при $m \geqslant 1$ получены необходимые и достаточные условия, когда существует корень Боаса–Каца вещественнозначный и/или радиальный. Преобразование Фурье $\widehat{f}$ радиальной функции f класса $G_m(\mathbb{B}_r)$ также является радиальной функцией. Условия сформулированы в терминах нулей аналитического продолжения радиальной части $\widehat{f}$, то есть функции одной комплексной переменной $F_0(z) = \widehat{f}(z, 0, \dots, 0)$.

Условие (a). Если F_0 имеет нуль в начале координат, то его порядок кратен четырем.

Условие (b). Любой чисто мнимый нуль F_0 имеет четный порядок.

Условие (c). Любой нуль F_0, который не является ни вещественным, ни чисто мнимым имеет четный порядок.

Теорема B (Эм, Гнейтинг, Ричардс, 2004)

Пусть радиальная (четная при $m = 1$) функция $f \in G_m(\mathbb{B}_r)$.

1) *Если $m = 1$, то вещественнозначный корень Боаса – Каца существует. Четный корень Боаса – Каца существует тогда и только тогда, когда $\widehat{f}$ удовлетворяет условиям (a) и (b). Вещественнозначный и четный корень Боаса – Каца существует тогда и только тогда, когда $\widehat{f}$ удовлетворяет условиям (a), (b) и (c).*

2) *Если $m = 2$, то корень Боаса – Каца существует тогда и только тогда, когда F_0 удовлетворяет (b). Корень Боаса – Каца может быть выбран как радиальная функция тогда и только тогда, когда F_0 удовлетворяет (a) и (b).*

3) *Если $m \geqslant 3$, то корень Боаса – Каца существует тогда и только тогда, когда F_0 удовлетворяет (a) и (b). Кроме того, любой корень Боаса – Каца обязательно является радиальной функцией с точностью до сдвига.*

4) *Если $m \geqslant 2$, то вещественный корень Боаса – Каца существует тогда и только тогда, когда F_0 удовлетворяет условиям (a), (b) и (c). Кроме того, любой вещественный корень Боаса – Каца обязательно является радиальной функцией с точностью до сдвига.*

Ниже приведена таблица с кратким изложением этих результатов.

Dimension	m=1	m=2	$m \geqslant 3$
Existence		b	ab
Real-Valued		abc	abc
Radial	ab	ab	ab
Real-Valued and Radial	abc	abc	abc

Перейдем к формулировке основного результата настоящей статьи. Дивизором целой функции F называется пара (Λ_F, γ_F), где Λ_F является аналитическим множеством в $\mathbb{C}^m$ всех точек, в которых функция обращается в нуль, и γ_F — целозначная функция, определенная на Λ_F, значение которой в точке $z_0 \in \Lambda_F$ равно кратности нуля функции F в точке z_0. Для точки $z_0 \in \Lambda_F$ и λ, принадлежащего единичной сфере $\mathbb{S}$ в $\mathbb{R}^m$, определим величину $\gamma_F(z_0, \lambda)$, равную кратности точки $w = 0$ как нуля функции $F(z_0 + \lambda w)$ одной комплексной переменной w.

Теорема 1. *Для функции f, принадлежащей классу $G_m(\mathbb{D})$, следующие условия эквивалентны:*

(I) *существует корень Боаса – Каца φ функции f, являющийся четной функцией с вещественными значениями на $\mathbb{R}^m$;*

(II) *существует целая четная функция Ψ такая, что преобразование Фурье $\widehat{f}$ функции f представимо в виде*

$$\widehat{f}(z) = \Psi^2(z), \quad z \in \mathbb{C}^m;$$

(III) *все нули преобразования Фурье $\widehat{f}$ функции f имеют четную кратность, и если $z = 0$ — нуль $\widehat{f}$, то его кратность делится на четыре; то есть для любого $z_0 \in \Lambda_{\widehat{f}}$ число $\gamma_{\widehat{f}}(z_0)$ четное и если $\widehat{f}(0) = 0$, то число $\gamma_{\widehat{f}}(0)$ делится на четыре;*

(IV) *для любых $\lambda \in \mathbb{S}$ и $z_0 \in \Lambda_{\widehat{f}}$ число $\gamma_{\widehat{f}}(z_0, \lambda)$ четное, а если $\widehat{f}(0) = 0$, то число $\gamma_{\widehat{f}}(0, \lambda)$ делится на четыре.*

При этом φ имеет носитель в множестве $\mathbb{D}/2$, $\Psi = \widehat{\varphi}$ — вещественнозначная на $\mathbb{R}^m$, целая функция экспоненциального типа.

Список литературы

1. *Андреев Н. Н.* Экстремальная задача для периодических функций с малым носителем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1997. № 1. С. 29–32.
2. *Арестов В.В.*, *Бердышева Е.Е.* Задача Турана для положительно определенных функций с носителем в шестиугольнике // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 21–29.
3. *Arestov V.V.*, *Berdysheva E.E.* The Turan problem for a class of polytopes. // East J. Approx. 2002. Vol. 8, № 3. P. 381–388.
4. *Boas R.P., Jr. and Kac M.* Inequalities for Fourier transforms of positive functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12, № 1. P. 189–206.
5. *Efimov A.V.* An analog of Rudin's theorem for continuous radial positive definite functions of several variables // Proc. Steklov Inst. Math. 2014. Vol. 284. Suppl. 1. P. 79–86.
6. *Ehm W.*, *Gneiting T.*, *Richards D.* Convolution roots of radial positive definite functions with compact support // Trans. Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 356. P. 4655–4685.
7. *Горбачев Д.В.* Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре // Матем. заметки. 2001. Т. 69, вып. 3. С. 346–352.
8. *Иванов В.И.* О задачах Турана и Дельсарта для периодических положительно определенных функций // Матем. заметки. 2006. Т. 80. Вып. 6. С. 934–939.
9. *Revesz S.G.* Turan's extremal problem on locally compact abelian groups // Analysis Mathematica. 2011. V. 37, № 1. P. 15–50.
10. *Rudin W.* An extension theorem for positive-definite functions // Duke Math. J. Vol. 37. 1970. P. 49–53.
11. *Стечкин С.Б.* Одна экстремальная задача для тригонометрических рядов с неотрицательными коэффициентами // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1972. Vol. 23, № 3–4. P. 289–291.
12. *Полиа Г.*, *Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. – М.: Наука, 1978. 431 с.
13. *Стейн И.*, *Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. 333 с.
14. *Яглом А. М.* Корреляционная теория стационарных случайных функций с примерами из метеорологии. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 364 с.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 29–31

Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных, задаваемых модулем непрерывности

С. А. Алигаваров

Хорогский государственный университет им. М. Назаршоева, Хорог, Таджикистан

Аннотация. В заметке рассматривается экстремальная задача минимизации погрешности кубатурной формулы на некоторых классах функций многих переменных, задаваемых модулем непрерывности. Такая задача была решена Н. П. Корнейчуком. В данной заметке приводится решение указанной задачи для более общих классов функций.

Пусть $f(x) := f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ определена и интегрируема в m-мерном параллелепипеде $Q = \{a_i \leqslant x_i \leqslant b_i;\ i = 1, 2, \ldots, m\}$ и

$$J(f) := \underset{(Q)}{\int \cdots \int} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m = \int\limits_{(Q)} f(x)\, dx. \tag{1}$$

Любая кубатурная формула для приближённого вычисления интеграла (1) имеет вид

$$J(f) \approx L(f; P, X) = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu f(M_\nu) \tag{2}$$

и задаётся вектором коэффициентов и узлов $(P, X) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n; M_1, M_2, \ldots, M_n\}$, где $M_\nu = M(x_1^\nu, x_2^\nu, \ldots, x_m^\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ – произвольные точки области Q, а p_ν $(\nu = 1, 2, \ldots \ldots, n)$ – произвольные действительные числа.

Через $\mathcal{A}$ обозначим всевозможные векторы (P, X), где $P = \{p_\nu\}_{\nu=1}^{n}$, p_ν — любые числа, а векторы $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$, $X_i = (x_i^1, \ldots, x_i^{n_i})$ задаются m произвольными системами чисел

$$a_i \leqslant x_i^1 < x_i^2 < \ldots < x_i^{n_i} \leqslant b_i \ (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{3}$$

Узлы кубатурной формулы (2) являются точками

$$M_{k_1,\ldots,k_m} = M(x_1^{k_1},\ x_2^{k_2}, \ldots,\ x_m^{k_m}) \ \ (k_i = 1, 2, \ldots, n_i;\ i = 1, 2, \ldots, m)$$

решетки, определяемой системами чисел (3). Кубатурная формула в этом случае имеет вид

$$J(f) \approx L(f; P, X) = \sum_{k_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{k_m=1}^{n_m} p_{k_1,\ldots,k_m} f(M_{k_1,\ldots,k_m}) \tag{4}$$

или сокращённо

$$J(f) \approx L(f; P, X) = \sum_{k=1}^{n} p_k f(M_k). \tag{4$'$}$$

Отметим, что кубатурная формула (4) (или (4)$'$) была введена и исследована в работе Н. П. Корнейчука [1] для некоторых классов функций, задаваемых модулями непрерыв-

© С. А. Алигаваров, 2016

ности. Отметим, что заданием множества векторов $\mathcal{A}$ определяется класс кубатурных формул, для которых $(P, X) \in \mathcal{A}$. Пусть

$$R(f; P, X) = |J(f) - L(f; P, X)|$$

– погрешность кубатурной формулы $(4)'$. Полагаем

$$R(\mathfrak{M}; P, X) = \sup\Big\{R(f; P, X)| : f \in \mathfrak{M}\Big\},$$

где $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций f, интегрируемых в области Q. Задача состоит в отыскании величины

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}) = \inf\Big\{R(\mathfrak{M}; P, X) : \ (P, X) \in \mathcal{A}\Big\},$$

а также вектора $(\widetilde{P}, \widetilde{X}) \in \mathcal{A}$, для которого

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}) = R(\mathfrak{M}; \widetilde{P}, \widetilde{X}).$$

Кубатурная формула, определяемая вектором $(\widetilde{P}, \widetilde{X})$, является наилучшей для класса $\mathfrak{M}$ среди всех кубатурных формул, у которых $(P, X) \in \mathcal{A}$.

Здесь в качестве $\mathfrak{M}$ рассматривается класс $H_p^{\omega,m}$ $(1 \leqslant p < \infty, m \in \mathbb{N})$ функций $f(x) := f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, определенных в области Q и таких, что для любых двух точек $M'(x_1^{'}, x_2^{'}, \ldots, x_m^{'})$ и $M''(x_1^{''}, x_2^{''}, \ldots, x_m^{''})$ из Q выполняется неравенство

$$|f(M') - f(M'')| \leqslant \omega[\rho_p(M', M'')], \tag{5}$$

где

$$\rho_p(M', M'') = \Big\{\sum_{i=1}^{m} |x_i^{'} - x_i^{''}|^p\Big\}^{1/p}, \ \ 1 \leqslant p < \infty,$$

а $\omega(t)$ – заданный на отрезке $0 \leqslant t \leqslant d := \Big\{\sum\limits_{i=1}^{m}(b_i - a_i)^p\Big\}^{1/p}$, $1 \leqslant p < \infty$, модуль непрерывности, то есть неубывающая полуаддитивная на отрезке $[0, d]$ функция, в нуле равная нулю. Параллельно вводим в рассмотрению класс W^{ω} функций $f(x) := f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, определенных в области Q и таких, что для любых двух точек $M'(x_1^{'}, x_2^{'}, \ldots, x_m^{'})$ и $M''(x_1^{''}, x_2^{''}, \ldots, x_m^{''})$ из Q выполняется неравенство

$$|f(M') - f(M'')| \leqslant \max\Big\{\omega(|x_1' - x_1''), \ldots, \omega(|x_n' - x_n'')\Big\}.$$

Используя схему рассуждений, приведенную в [1], легко доказать следующее утверждение.

Теорема. *Среди всех кубатурных формул* (4) *с произвольными коэффициентами* p_k *и узлами в точках произвольной решётки* (3) *наилучшей для класса* $H_p^{\omega,m}$ $(1 \leqslant p < \infty)$ *и* W^{ω} *при фиксированном векторе* $n = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$ *является кубатурная формула*

$$J(f) \approx L(f; P, X) = \sum_{k=1}^{m} \widetilde{p}_k f(\widetilde{M}_k) \tag{6}$$

с равномерной решёткой узлов

$$\widetilde{x}_i^{k_i} = a_i + (2k_i - 1)h_i, \ h_i = \frac{b_i - a_i}{2n_i} \quad (k_i = 1, 2, \ldots, n_i; \ i = 1, 2, \ldots, m)$$

и равными весами

$$\widetilde{p}_k := p_{k_1,\ldots,k_m} = \prod_{i=1}^{m} \frac{b_i - a_i}{n_i} \quad (1 \leqslant k_i \leqslant n_i; \ i = 1, 2, \ldots, m).$$

При этом для точной оценки погрешности формулы (6) *на классах* $H_p^{\omega,m}$ $(1 \leqslant p < \infty,$ $m \in \mathbb{N})$ *и* W^ω *имеют место равенства*

$$\mathcal{E}(H_p^{\omega,m}) = 2^m n_1 n_2 \dots n_m \int_0^{h_1}\int_0^{h_2}\dots\int_0^{h_m} \omega\Big[(t_1^p + t_2^p + \dots + t_m^p)^{1/p}\Big]\, dt_1 dt_2 \dots dt_m. \tag{7}$$

$$\mathcal{E}(W^\omega) = 2^m n_1 n_2 \dots n_m \int_0^{h_1}\int_0^{h_2}\dots\int_0^{h_m} \max\Big\{\omega(t_1), \omega(t_2), \dots, \omega(t_m)\Big\}\, dt_1 dt_2 \dots dt_m.$$

В частности, для класса Липшица с константой M *порядка* α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ *из* (7) *вытекает равенство*

$$\mathcal{E}(MH_p^{\alpha,m}) = 2^m n_1 n_2 \dots n_m M \int_0^{h_1}\int_0^{h_2}\dots\int_0^{h_m} (t_1^p + t_2^p + \dots + t_m^p)^{\alpha/p}\, dt_1 dt_2 \dots dt_m.$$

Замечание. В случае $p = 2$ вышеприведённая теорема доказана в работе [1].

Список литературы

1. *Корнейчук Н.П.* Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных // Матем. заметки. 1968. Т. 3, № 5. С. 565–576.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 32–35

P-связное локально чебышёвское множество является чебышёвским

А. Р. Алимов

Московский государственный университет, Москва, Россия

Аннотация. Локально чебышёвским называется множество, пересечение которого с некоторым замкнутым шаром с центром в любой точке этого множества является чебышёвским множеством. В заметке исследуются локальные аппроксимативные свойства множеств и устанавливается ряд новых свойств локально чебышёвских множеств.

Величиной наилучшего приближения, или расстоянием от заданного элемента x линейного нормированного пространства X до заданного множества $\varnothing \neq M \subset X$, называется величина $\rho(x,M) := \inf\limits_{y\in M} \|x-y\|$. Понятия и свойства, определяемые в терминах наилучшего приближения, в частности, свойства существования, единственности, устойчивости элементов наилучшего приближения, называются *аппроксимативными*. Множество всех *ближайших точек* (элементов наилучшего приближения, или, кратко, наилучших приближений) в M для заданного x обозначается $P_M x$. Иными словами,

$$P_M x := \bigl\{y \in M \mid \rho(x,M) = \|x-y\|\bigr\}.$$

Мы следуем определениям, данным в обзоре [1]. Основные определения даются ниже.

Множество $M \subset X$ называется *чебышёвским*, если для любого $x \in X$ множество $P_M x$ одноточечно. Всюду ниже X – действительное линейное нормированное пространство, X_n – линейное нормированное пространство конечной размерности n, $B(x,r)$ – замкнутый шар с центром x и радиуса r, $\mathring{B}(x,r)$ – открытый шар.

Понятие локально чебышевского множества было предложено М. В. Балашовым по аналогии с понятием локально выпуклого множества: множество $M \subset X$ называется *локально выпуклым* [5, § 1.4], если для любого элемента $y \in \overline{M}$ найдется такое число $r = r(y) > 0$, что множество $M \cap B(y,r)$ выпукло (см., например, [5, § 1.10]). Хорошо известно, что связное локально выпуклое множество выпукло. Соответственно, множество $M \subset X$ называется *локально чебышёвским*, если для любого элемента $y \in \overline{M}$ найдется такое число $r = r(y) > 0$, что множество $M \cap B(y,r)$ является чебышёвским.

Недавно Флёров [4] установил следующие результаты: 1) связное замкнутое локально чебышёвское множество в двумерном банаховом пространстве является чебышёвским; 2) в двумерном банаховом пространстве чебышёвское множество является является B-чебышёвским (т. е. пересечение такого множества с любым замкнутым шаром является чебышёвским множеством или пусто) если и только если пространство строго выпукло. Он же [3, § 3.4] с использованием хорошо известного примера Данхема несвязного чебышёвского множества построил пример замкнутого связного локально чебышёвского множества в пространстве $C[0,1]$, не являющегося чебышёвским.

Замечание 1. В терминологии Балашова–Флёрова локальная чебышёвость множества определяется через пересечения с шарами, что достаточно неестественно, поскольку при

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00295).

© А. Р. Алимов, 2016

этом этом кардинально сужается класс пространств, где могут рассматриваться такие множества: если точки внутри множества, то получается ощутимое ограничение на шар – его строгая выпуклость. Гораздо более естественно было бы определять локальную чебышёвость используя пересечения с окрестностями точек. Автор надеется вернуться к этой задаче в новой постановке в последующих исследованиях.

По аналогии с локально чебышёвским множеством определим локальное солнце как множество M, такое, что для любого $y \in \overline{M}$ найдется такое число $r = r(y) > 0$, что множество $M \cap B(y, r)$ является солнцем. Отметим без доказательства, что даже на плоскости легко построить пример локального солнца, не являющегося солнцем (граница единичного шара с sup-нормой).

Мы будем называть множество *B-солнцем*, если его пересечение с любым замкнутым шаром является солнцем или пусто. Недавно автор [2] установил, что для любой конечной размерности $n \geqslant 3$ существует пространство X_n, содержащее чебышёвское солнце, не являющееся B-солнцем. Данный результат перекликается со свежим результатом А. А. Флёрова [3], который построил чебышёвское множество, не являющееся локально чебышёвским (в терминологии [3]).

Следуя Л. П. Власову, если Q обозначает некоторое свойство (например, “связность”), мы будем говорить, что замкнутое множество M обладает свойством

P-Q, если при всех $x \in X$ множество $P_M x$ непусто и обладает свойством Q;

$\mathring{B}$-Q, если $M \cap \mathring{B}(x, r)$ обладает свойством Q при всех $x \in X$, $r > 0$.

К примеру, множество M P-связно, если для любого $x \notin M$ множество $P_M x$ непусто и связно.

Теорема 1 *Замкнутое P-локально компактное P-связное локально чебышёвское множество M является чебышёвским.*

Замечание 2. Заключение теоремы 1 выполнено, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) M – локально чебышёвское ограниченно компактное LG-множество в нормированном пространстве (см. [1, § 8]) и, в частности, если M – локально чебышёвское аппроксимативно компактное строгое солнце в банаховом пространстве (см. [1, теорема 5.4]).

2) M – локально чебышёвское P-локально компактное множество существования, для которого метрическая проекция IRL- и ORU-непрерывна (см. [1, теорема 5.5]).

3) M – замкнутое P-локально компактное P-сцепленное локально чебышёвское множество (множество M называется сцепленным, если при любом $\varepsilon > 0$ его любые две точки могут быть соединены конечной ε-цепью, составленной из точек множества M.)

Теорема 2. *Пусть X_n – конечномерное банахово пространство. Тогда замкнутое локально чебышёвское множество $M \subset X_n$ является чебышёвским, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1) *M P-связно;*

2) *M — B-солнце;*

3) *M монотонно линейно связно;*

4) *метрическая проекция P_M непрерывна* (*полунепрерывна снизу*);

5) *M $\mathring{B}$-бесконечно связно;*

6) *для всех $\varepsilon > 0$ на множество M существует непрерывная мультипликативная* (*аддитивная*) *ε-выборка.*

Замечание 3. В теореме 2 не все условия являются независимыми. Теорема 2 вытекает из теоремы 1 с учетом следующих замечаний. По поводу 5, 6 см. [7], [6]; по поводу условия 2 см. работу [2]. Условие 3 влечет условия 2 и 1. Относительно 4 см. теорему 7.3 в обзоре [1].

Пусть $\varnothing \neq M \subset X$. Точка $y_0 \in M$ называется *лунной точкой* (см. [1, § 3.3]), если $y_0 \in M \cap \mathring{K}(y_0, x)$ при условии, что $x \in P_M^{-1}(y_0)$ и $M \cap \mathring{K}(y_0, x) \neq \varnothing$. Здесь $\mathring{K}(y, x)$ – открытый опорный конус к шару $B(x, \|x - y\|)$ в точке y (см. [1, § 3.1]). Множество M называется *луной*, если все его точки лунные.

Теорема 3. *Если ограниченно компактное локально чебышёвское множество является луной (в частности – строгим солнцем), то оно является чебышёвским солнцем.*

Теорема 4. *В конечномерном* (*BM*)*-пространстве локально чебышёвская спрямляемая кривая является чебышёвским солнцем.*

По поводу определения (BM)-пространств см., например, [1, § 9.1].

Доказательство теоремы 1. Рассуждая от противного, предположим, что для некоторой точки x в M имеется по крайней мере две ближайших точки; пусть y' – одна из них. Без ограничения общности считаем $x = 0$, $\rho(x, M) = 1$. По условию пересечение M с единичной сферой связно, при этом пересечение $P_M x \cap B(y', R)$ – невырожденный континуум (отличный от точки связный компакт) при некотором $R > 0$. Хорошо известно, что для того чтобы компакт был континуумом, необходимо и достаточно, чтобы он был сцеплен (т. е. при любом $\varepsilon > 0$ его любые две точки соединимы конечной ε-цепью, составленной из точек множества M).

Обозначим $M' := M \cap B(y', r)$, где $r' > 0$ выбрано таким образом, что M' – чебышёвское множество (такое r' всегда существует по условию). Ясно, что $y' \in P_{M'} 0$. В силу сцепленности множества $P_M x \cap B(y', R)$ для достаточно малого $0 < \varepsilon < \min\{r'/2, R/2\}$ пересечение $B(y', r) \cap P_M 0$ содержит по крайней мере 2 точки из $P_M x$. Но каждая такая точка принадлежит множеству M', что противоречит тому, что M' – чебышёвское множество. Итак, для x в M имеется в точности одна ближайшая точка, т. е. M – чебышёвское множество. Теорема 1 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3. Хорошо известно, что всякое строгое солнце является луной [1, теорема 3.5]. Предположим, что M является строгим солнцем. Поскольку ограниченно компактное строгое солнце в нормированном пространстве B-связно [1, теорема 8.10], то требуемый результат следует из теоремы 1.

Теперь предположим, что M – луна, но не строгое солнце. Тогда для некоторого $x \notin M$ и любой точки $y \in P_M x$ мы имеем $\mathring{K}(y, x) \cap M \neq \varnothing$. По определению луны условие $\mathring{K}(y, x) \cap M \neq \varnothing$ дает, что $y \in \mathring{K}(y, x) \cap M$. Далее, в силу локальной чебышёвости множества M в точке y мы получаем, что $\mathring{K}(y, x) \cap B(y, \varepsilon) = \varnothing$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Однако это противоречит предыдущему включению. Таким образом, ограниченно компактная локально чебышёвская луна является строгим солнцем и остается воспользоваться первым утверждением теоремы. Теорема 3 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 4 основано на следующих рассуждениях. Пусть $M = k(\cdot)$ – кривая из условия теоремы. Если M монотонно линейно связна (см. [1, § 9]), то требуемое утверждение обеспечивается теоремой 2. Если кривая $k(\cdot)$ не монотонно линейно связна, то искомое утверждение вытекает из рассмотрения точкек перегиба с учетом того, что в конечномерных (BM)-пространствах любое солнце монотонно линейно связно.

Список литературы

1. *Алимов А.Р*, *Царьков И.Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // Успехи матем. наук. 2016. Т. 71, № 1(427). С. 3–84.
2. *Алимов А.Р.* Ограниченная стягиваемость строгих солнц в трехмерных пространствах // Фунд. прикл. матем. (в печати).
3. *Флеров А.А.* Избранные геометрические свойства множеств с конечнозначной метрической проекцией. Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук. МГУ. М., 2016. 68 с.

4. *Флеров А.А.* Локально чебышевские множества на плоскости // Матем. заметки. 2015. Т. 97, № 1. С. 142–149.
5. *Половинкин Е.С.*, *Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. – М.: Физматлит, 2007.
6. *Царьков И.Г.* Непрерывная ε-выборка // Матем. сб. 2016. Т. 207, № 2. С. 123–142.
7. *Царьков И.Г.* Локальная и глобальная непрерывная ε-выборка // Изв. РАН. Серия матем. 2016. Т. 80, № 2. С. 165–184.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 36–43

Оператор обобщенного сдвига, порожденный весом Якоби, и точное неравенство Никольского для алгебраических многочленов на отрезке

В. В. Арестов, М. В. Дейкалова

Институт математики и компьютерных наук Уральского федерального университета им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Аннотация. Обсуждаются свойства оператора обобщенного сдвига, порожденного весом Якоби $\phi^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta,\ \alpha,\beta > -1$, на отрезке $[-1,1]$. Оператор обобщенного сдвига применяется в исследовании неравенства Никольского для алгебраических многочленов на отрезке $[-1,1]$ между равномерной нормой и нормой пространства $L_q^{(\alpha,\beta)}(-1,1),\ 1 \leqslant q < \infty$, с весом Якоби при $\alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2,\ \alpha > -1/2$. Обоснование приведенных здесь результатов содержится в работе авторов [2]. Для ультрасферического веса, а точнее, в случае $\alpha = \beta > -1/2$ подобные результаты были получены авторами в [1].

1. Обозначения. При $1 \leqslant q < \infty$ для $\alpha,\beta > -1$ обозначим через $L_q^{(\alpha,\beta)} = L_q^{(\alpha,\beta)}(-1,1)$ пространство измеримых на $(-1,1)$ комплекснозначных функций f таких, что функция $|f|^q$ суммируема на $(-1,1)$ с весом Якоби $\phi^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$; это банахово пространство относительно нормы

$$\|f\|_{L_q^{(\alpha,\beta)}(-1,1)} = \left(\frac{1}{\lambda(\alpha,\beta)}\int_{-1}^{1}|f(x)|^q\phi^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx\right)^{1/q}, \quad \lambda(\alpha,\beta) = \int_{-1}^{1}\phi^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx. \tag{1}$$

Пространство $L_2^{(\alpha,\beta)}$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(f,g) = (f,g)_{L_2^{(\alpha,\beta)}} = \int_{-1}^{1} f(x)\,\overline{g(x)}\,\phi^{(\alpha,\beta)}(x)dx, \quad f,g \in L_2^{(\alpha,\beta)}. \tag{2}$$

Наряду с $L_q^{(\alpha,\beta)}$ рассмотрим классическое пространство $C = C[-1,1]$ (комплекснозначных) непрерывных функций на отрезке $[-1,1]$ с равномерной нормой

$$\|f\|_{C[-1,1]} = \max\{|f(x)|\colon x \in [-1,1]\}.$$

2. Оператор обобщенного сдвига. Оператор обобщенного сдвига изначально определяется в пространстве $L_2^{(\alpha,\beta)}$, исходя из разложения функций по системе многочленов Якоби.

Пусть $R_\nu = R_\nu^{(\alpha,\beta)},\ \nu \geqslant 0$, есть система алгебраических многочленов Якоби степени ν, ортогональных на отрезке $[-1,1]$ с весом Якоби, а точнее, ортогональных относительно скалярного произведения (2) и нормированных условием $R_\nu(1) = 1,\ \nu \geqslant 0$ (см., например,

Исследования выполнены при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705).

© В. В. Арестов, М. В. Дейкалова, 2016

[3, гл. IV], [4, гл. VII]). В случае $\alpha \geqslant \beta > -1$, $\alpha \geqslant -1/2$ многочлены Якоби удовлетворяют соотношению (см. например, [3, гл. VII, § 7.32, теорема 7.32.1], [4, гл. VII, § 2, теорема 7.1])

$$\max\{|R_\nu(x)|\colon x \in [-1,1]\} = R_\nu(1) = 1, \quad \nu \geqslant 0.$$

Если же выполняется более жесткое условие $\alpha > \beta > -1$, $\alpha \geqslant -\frac{1}{2}$, то при $\nu \geqslant 1$ имеет место более сильное свойство (см. [3, §§ 4.2, 7.31, 7.32], [4, гл. VII, § 2, теорема 7.1])

$$|R_\nu(x)| < R_\nu(1) = 1, \quad x \in [-1,1).$$

Система многочленов Якоби $\{R_\nu\}_{\nu\geqslant 0}$ образует ортогональный базис в $L_2^{(\alpha,\beta)}$. Произвольная функция $f \in L_2^{(\alpha,\beta)}$ разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu R_\nu(x), \qquad f_\nu = \frac{(f, R_\nu^{(\alpha,\beta)})}{(R_\nu^{(\alpha,\beta)}, R_\nu^{(\alpha,\beta)})}. \tag{3}$$

Для пары функций $f, g \in L_2^{(\alpha,\beta)}$ имеет место обобщенный вариант равенства Парсеваля

$$(f,g) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu f_\nu \bar{g}_\nu, \qquad \delta_\nu = (R_\nu, R_\nu) = \|R_\nu\|^2_{L_2^{(\alpha,\beta)}}. \tag{4}$$

В частности, норма функции $f \in L_2^{(\alpha,\beta)}$ выражается через ее коэффициенты Фурье $\{f_\nu\}$ равенством Парсеваля $\|f\|^2_{L_2^{(\alpha,\beta)}} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu\, |f_\nu|^2$.

Оператором обобщенного сдвига с шагом $t \in [-1,1]$ называется линейный оператор Θ_t, который определен на функциях $f \in L_2^{(\alpha,\beta)}$ с рядом Фурье (3) соотношением

$$\Theta_t f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu R_\nu(t) R_\nu(x). \tag{5}$$

Довольно очевидно, что при $\alpha \geqslant \beta > -1$, $\alpha \geqslant -1/2$ для любого $t \in [-1,1]$ оператор обобщенного сдвига Θ_t является линейным ограниченным оператором в пространстве $L_2^{(\alpha,\beta)}$ и имеет единичную норму: $\|\Theta_t\|_{L_2^{(\alpha,\beta)} \to L_2^{(\alpha,\beta)}} = 1$. Более того, если $\alpha > \beta > -1$, $\alpha \geqslant -1/2$, $t \in [-1,1)$, то норма оператора Θ_t достигается лишь на функциях, совпадающих с некоторой константой (почти всюду) на $(-1,1)$.

Оператор $\Theta_t = \Theta_t^{(\alpha,\beta)}$ формулой (5) определен, в частности, на множестве $\mathscr{P}$ всех алгебраических многочленов с комплексными коэффициентами. Множество $\mathscr{P}$ плотно в пространстве $L_q^{(\alpha,\beta)}$, $1 \leqslant q < \infty$; в связи с этим оператор $\Theta_t = \Theta_t^{(\alpha,\beta)}$ продолжается (единственным образом) до линейного ограниченного оператора в пространстве $L_q^{(\alpha,\beta)}$ при $1 \leqslant q < \infty$. Значение $t = 1$ не представляет интереса, поскольку оператор Θ_1 есть единичный оператор, поэтому в последующих рассуждениях это значение исключено.

Важным инструментом изучения и использования оператора обобщенного сдвига является интегральное представление; таких представлений в настоящее время существует несколько. Они базируются на так называемых теоремах (формулах) умножения для многочленов Якоби. Вероятно, впервые формула умножения была найдена А. М. Лежандром в 1817 году для многочленов, которые сейчас называются многочленами Лежандра ($\alpha = \beta = 0$). В 1874 году Л. Гегенбауэр получил (см. [5, гл. XI, § 11.5]) формулу умножения для ультрасферических многочленов ($\alpha = \beta > -1/2$). К настоящему времени этой тематике посвящено большое число исследований; см., например, [6, 7] и приведенную там библиографию.

Для многочленов Якоби одной из наиболее известных является теорема умножения Т. Курнвиндера [8]. В алгебраической форме она состоит в том, что для целого $\nu \geqslant 0$ при

$\alpha > \beta > -1/2,\ -1 \leqslant t, x \leqslant 1$ имеет место формула

$$R_\nu(t)R_\nu(x) = \frac{1}{\kappa(\alpha,\beta)} \int\limits_0^1 \int\limits_{-1}^1 R_\nu\left(U(t,x,\rho,\xi)\right)\left(1-\rho^2\right)^{\alpha-\beta-1}\rho^{2\beta+1}\left(1-\xi^2\right)^{\beta-1/2} d\xi d\rho, \tag{6}$$

$$U(t,x,\rho,\xi) = tx + \rho\xi\sqrt{1-t^2}\,\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(\rho^2-1)(1-t)(1-x). \tag{7}$$

$$\kappa(\alpha,\beta) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^\pi \left(1-\rho^2\right)^{\alpha-\beta-1}\rho^{2\beta+1}(\sin\zeta)^{2\beta} d\zeta d\rho = \frac{\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\alpha-\beta\right)\Gamma\left(\beta+1/2\right)}{2\Gamma(\alpha+1)}.$$

При фиксированных t, x множество значений $I(t,x)$ функции (7) по переменным (ξ,ρ) на прямоугольнике $\Pi = \{(\xi,\rho)\colon \xi \in [-1,1],\ \rho \in [0,1]\}$ является отрезком $I(t,x) = [a(t,x), b(t,x)]$, с концами

$$a(t,x) = \begin{cases} -1, & x+t \leqslant 0; \\ tx - \sqrt{1-t^2}\,\sqrt{1-x^2}\,, & x+t \geqslant 0. \end{cases} \tag{8}$$

$$b(t,x) = tx + \sqrt{1-t^2}\,\sqrt{1-x^2}\,. \tag{9}$$

Для обосновании следующего утверждения при $\alpha > \beta > -1/2$ используется формула (6). При $\alpha > \beta = -1/2$ для его обоснования используется известное выражение многочленов Якоби $R_\nu^{(\alpha,-1/2)}$ через ульрасферические многочлены (см. [3, гл. IV, § 4.1, формула (4.1.5)]) и формула умножения для ульрасферических многочленов (см., например, [7, формула (5.1)], [5, гл. XI, §11.5]).

Теорема 1. *При $\alpha > \beta \geqslant -1/2$ для $x \in (-1,1),\ t \in [-1,1)$ и любого целого $\nu \geqslant 0$ имеет место формула*

$$R_\nu^{(\alpha,\beta)}(t)R_\nu^{(\alpha,\beta)}(x) = \int\limits_{a(t,x)}^{b(t,x)} R_\nu^{(\alpha,\beta)}(u)F^{(\alpha,\beta)}(t,x,u)du, \tag{10}$$

в которой ядро $F^{(\alpha,\beta)}(t,x,u)$ непрерывное, положительное на множестве $\{(t,x,u) : x \in (-1,1),\ t \in [-1,1),\ u \in (a(t,x), b(t,x))\}$ и обладает свойством

$$\int\limits_{a(t,x)}^{b(t,x)} F^{(\alpha,\beta)}(t,x,u)du = 1.$$

Формулу (10) можно считать уточнением формул умножения, которые раньше получили Р. Аскей и С. Ваингер [9], Дж. Гаспер [10]. Довольно стандартным образом из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *При $1 \leqslant q < \infty,\ \alpha > \beta \geqslant -1/2,\ -1 \leqslant t < 1$ для любой функции $f \in L_q^{(\alpha,\beta)}$ интеграл $\int\limits_{a(x,t)}^{b(x,t)} f\left(u\right)F^{(\alpha,\beta)}(t,x,u)du$ существует почти для всех $x \in (-1,1)$ и имеет место формула*

$$(\Theta_t f)(x) = \int\limits_{a(x,t)}^{b(x,t)} f\left(u\right)F^{(\alpha,\beta)}(t,x,u)du, \quad f \in L_q^{(\alpha,\beta)}. \tag{11}$$

Г. Бавинк [11], используя результат Дж. Гаспера [10], сделал вывод, что если $\alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2,\ \alpha > -1/2$, то при любом $t \in (-1,1)$ оператор обобщенного сдвига Θ_t является линейным ограниченным оператором в пространстве $L_q^{(\alpha,\beta)}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, и имеет единичную норму: $\|\Theta_t\|_{L_q^{(\alpha,\beta)} \to L_q^{(\alpha,\beta)}} = 1$. Важным для нас является вопрос об экстремальных функциях, на которых достигается норма оператора. Для исследования этого вопроса авторы использовали теорему 2, в которой описан носитель ядра представления.

Относительно (комплекснозначной) функции f, определенной на некотором множестве G, будем говорить, что она сохраняет знак на G, если существует число $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| = 1$, такое, что $\zeta f \geqslant 0$ почти всюду на G; в этом случае число $\overline{\zeta}$ будем называть знаком функции f на G.

При $-1 \leqslant t < 1$, $\alpha > \beta \geqslant -1/2$, обозначим через $\mathfrak{F}[t] = \mathfrak{F}^{(\alpha,\beta)}[t]$ множество функций $f \in L_1^{(\alpha,\beta)}$, которые при каждом $x \in (-1,1)$ на отрезке $I(t,x)$ сохраняют знак (вообще говоря, зависящий от отрезка). Если $-1 \leqslant t \leqslant 0$, то $\mathfrak{F}[t]$ совпадает с множеством функций из $L_1^{(\alpha,\beta)}$, сохраняющих знак на $(-1,1)$. При $0 < t < 1$ функции, сохраняющие знак на $(-1,1)$, конечно, принадлежат классу $\mathfrak{F}[t]$; однако, обратное неверно. Тем не менее, если функция отлична от нуля (почти всюду) на $(-1,1)$, то, эта функция принадлежит множеству $\mathfrak{F}[t]$ в том и только том случае, если она сохраняет знак на $(-1,1)$.

Теорема 3. *При $\alpha > \beta \geqslant -1/2$, $1 \leqslant q < \infty$, $t \in [-1,1)$ справедливы следующие утверждения.*

(1) *Оператор обобщенного сдвига Θ_t является линейным ограниченным оператором в пространстве $L_q^{(\alpha,\beta)}$ и имеет единичную норму.*

(2) *При $1 < q < \infty$ норма оператора Θ_t достигается на функции $f \in L_q^{(\alpha,\beta)}$ в том и только том случае, если f есть константа почти всюду на* $(-1,1)$.

(3) *При $q = 1$ множество функций, на которых достигается норма оператора $\Theta_t^{(\alpha,\beta)}$ в пространстве $L_1^{(\alpha,\beta)}$, совпадает с множеством $\mathfrak{F}[t] = \mathfrak{F}^{(\alpha,\beta)}[t]$. В частности, если функция отлична от нуля* (почти всюду) *на* $(-1,1)$, *то на этой функции норма оператора достигается в том и только том случае, если функция сохраняет знак* (почти всюду) *на* $(-1,1)$.

2. Неравенство Никольского. Пусть $\mathscr{P}_n = \mathscr{P}_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 0$, есть множество алгебраических многочленов одного переменного степени (не выше) n с комплексными коэффициентами. Обозначим через $M_n = M_{n,q}^{(\alpha,\beta)}$ наилучшую (наименьшую возможную) константу в неравенстве

$$\|p_n\|_{C[-1,1]} \leqslant M_n \, \|p_n\|_{L_q^{(\alpha,\beta)}(-1,1)}, \quad p_n \in \mathscr{P}_n. \tag{12}$$

Одна из целей данной заметки состоит в исследовании экстремальных многочленов неравенства (12), т. е. многочленов $\rho_n \in \mathscr{P}_n$, $\rho_n \not\equiv 0$, на которых это неравенство обращается в равенство. В частности, будет изучаться свойство единственности экстремальных многочленов. Если ρ_n – экстремальный многочлен неравенства (12) и любой другой экстремальный многочлен имеет вид $c\rho_n$, $c \neq 0$, то будем говорить, что ρ_n – *единственный* экстремальный многочлен неравенства (12).

Неравенство (12) является конкретным вариантом неравенства разных метрик или неравенства Никольского [12], см. также [13]. Первые результаты в этой тематике получили П. Л. Чебышев и его ученики братья А. А. и В. А. Марковы. К настоящему времени точным неравенствам для алгебраических многочленов и родственным, близким неравенствам для тригонометрических полиномов посвящено большое число исследований, см. монографии [14–18], статьи [1, 2, 19, 20], и приведенную в них библиографию.

Опишем более подробно известные на данный момент результаты, относящиеся к неравенству (12). А. Лупас [21] получил точное неравенство (12) (т. е. нашел значение наилучшей константы и выписал экстремальный многочлен) при $q = 2$ для веса Якоби со значениями пераметров $\alpha, \beta \geqslant -1/2$. В случае $\alpha = \beta = -1/2$ вес Якоби называют весом Чебышева. Неравенство (12) для веса Чебышева можно переписать в виде классического неравенства Никольского между равномерной нормой и L_q-нормой (с единичным весом) на множестве тригонометрических полиномов порядка (не выше) n. Вероятно, впервые такое неравенство изучал Д. Джексон (1933, $q = 2$). В настоящее время довольно полно исследован случай $q = 1$; этот вариант неравенства разных метрик изучали С. Б. Стечкин, Л. В. Тайков, В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, Д. В. Горбачев; см. статьи [22–24] и приведенную в них библиографию. П. Ю. Глазырина и И. Е. Симонов [25] в неравенстве (12) для веса Чебышева при $q = 1$ построили экстремальный многочлен, доказали его единственность и показали, что его равномерная норма достигается в концевой точке отрезка $[-1, 1]$.

При исследовании неравенства (12) можно ограничиться случаем $\alpha \geqslant \beta$. Кроме того, наши методы применимы лишь при $\alpha, \beta \geqslant -1/2$. Поэтому в дальнейшем в большинстве ситуаций мы будем предполагать, что $\alpha > \beta \geqslant -1/2$.

Наряду с неравенством (12) в качестве вспомогательного, однако, представляющего и самостоятельный интерес будет рассматриваться неравенство

$$|p(1)| \leqslant D_n \|p\|_{L_q^{(\alpha,\beta)}}, \qquad p \in \mathscr{P}_n, \tag{13}$$

с наилучшей константой $D_n = D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}$. Ясно, что $D_n \leqslant M_n$. Как будет следовать из дальнейшего, на самом деле, по крайней мере, при $\alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2$ имеет место равенство $D_n = M_n$.

Для веса Якоби $\phi^{(\alpha+1,\beta)}(x) = \phi^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta}$, параметра q, $1 \leqslant q < \infty$, и целого $n \geqslant 1$ обозначим через $\varrho_n = \varrho_{n,q}^{(\alpha+1,\beta)}$ многочлен порядка n с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве $L_q^{(\alpha+1,\beta)}$, т. е. многочлен ϱ_n, являющийся решением задачи

$$\min\{\|p_n\|_{L_q^{(\alpha+1,\beta)}} : p_n \in \mathscr{P}_n^1\} = \|\varrho_n\|_{L_q^{(\alpha+1,\beta)}}, \tag{14}$$

где $\mathscr{P}_n^1$ есть множество многочленов $p_n(x) = x^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ степени n, старший коэффициент которых равен 1.

Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля, впервые появились в исследованиях П. Л. Чебышева. Он нашел (1854) многочлен с фиксированным старшим коэффициентом, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве $C[-1, 1]$; это многочлен, который в настоящее время называют многочленом Чебышева первого рода. А. Н. Коркин и Е. И. Золотарев (1873) решили такую задачу в $L(-1, 1)$; здесь экстремальным является многочлен Чебышева второго рода. В последующем Е. И. Золотарев, Я. Л. Геронимус, Ф.Пейерсторфер, В. Э. Гейт, А. Л. Лукашов, И. Е. Симонов и многие другие исследовали алгебраические многочлены и тригонометрические полиномы с несколькими фиксированными старшими коэффициентами и некоторыми другими ограничениями, наименее уклоняющиеся от нуля в равномерной и интегральной нормах; см. библиографию в [1, 25].

Решение задачи (14) при $q = 2$ хорошо известно (см., например, [21], [26, § 2.1]), а именно, в этом случае решением будет многочлен Якоби $R_n^{(\alpha+1,\beta)}$ порядка n, поделенный на старший коэффициент. В случае $q = 1$ при целых значениях α и β задача (14) сводится к исследованию системы n полиномиальных уравнений от n неизвестных корней экстремального многочлена, которую, по крайней мере, для малых n удается решить непосредственно или с помощью построения базиса Гребнера.

Следующее утверждение является одним из основных в данной статье.

Теорема 4. *При $\alpha > \beta \geqslant -1/2$, $1 \leqslant q < \infty$, $n \geqslant 1$ справедливы следующие утверждения.*

1. *Наилучшие константы в неравенствах* (12) *и* (13) *совпадают*:

$$M_{n,q}^{(\alpha,\beta)} = D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}.$$

2. *Многочлен ϱ_n, наименее уклоняющийся от нуля относительно нормы пространства $L_q^{(\alpha+1,\beta)}$, является единственным экстремальным многочленом как неравенства* (12), *так и неравенства* (13).

3. *Многочлен ϱ_n, а значит и любой экстремальный многочлен неравенства* (12), *достигает равномерной нормы только в точке $x = 1$.*

Существенным шагом обоснования теоремы 4 является доказательство того факта, что экстремальный многочлен неравенства (12) достигает равномерной нормы лишь в правой концевой точке 1 отрезка. Для обоснования этого факта применяется оператор обобщенного сдвига, порожденный весом Якоби, необходимые свойства которого обсуждались выше.

Для ультрасферического случая $\beta = \alpha > -1/2$ утверждение, аналогичное теореме 4, было доказано в работе авторов [1]. Для значения параметра $\alpha = \frac{m-3}{2}$, m – целое, $m \geqslant 3$, такое утверждение доказано ранее в [27] параллельно с изучением неравенства Никольского между равномерной нормой и L_q-нормой алгебраических многочленов на единичной сфере евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 3$.

Теорема 4 сводит проблему исследования неравенства (12) к существенно более простой, по нашему мнению, задаче (14). Следующее утверждение довольно простое и справедливо, на самом деле, в существенно более общей ситуации [27].

Лемма 1. *При $n \geqslant 1$, $\alpha, \beta > -1$, $1 \leqslant q < \infty$ многочлен ϱ_n является единственным экстремальным многочленом неравенства* (13).

3. Доказательство теоремы 4. Применение оператора обобщенного сдвига в экстремальной задаче (12) для алгебраических многочленов, а точнее, в обосновании теоремы 4, мы считаем одним из основных результатов данного нашего исследования. Доказательство теоремы короткое и мы его сейчас приведем.

Для наилучших констант в неравенствах (12) и (13) справедливо неравенство $D_n \leqslant M_n$. Покажем, что на самом деле они совпадают. Воспользуемся оператором обобщенного сдвига (5). Пусть $f \in \mathscr{P}_n = \mathscr{P}_n(\mathbb{C})$ и равномерная норма f достигается в некоторой точке $t \in [-1, 1]$. Из определения (5) видно, что функция $g(x) = (\Theta_t f)(x)$ также является многочленом порядка n и обладает свойством $g(1) = f(t)$. Применяя неравенство (13) и теорему 3, получаем

$$\|f\|_C = |f(t)| = |g(1)| \leqslant D_n \|g\|_{L_q^{(\alpha,\beta)}} \leqslant D_n \|f\|_{L_q^{(\alpha,\beta)}}. \tag{15}$$

В силу произвольности $f \in \mathscr{P}_n$ отсюда следует неравенство $M_n \leqslant D_n$. Равенство $M_n = D_n$ проверено.

Напомним, что через ϱ_n обозначен многочлен, который дает решение задачи (14). В силу леммы 1 он является единственным экстремальным в неравенстве (13). Имеем

$$D_n \, \|\varrho_n\|_{L_q^{(\alpha,\beta)}} = |\varrho_n(1)| \leqslant \|\varrho_n\|_C \leqslant M_n \, \|\varrho_n\|_{L_q^{(\alpha,\beta)}}.$$

Отсюда с учетом равенства $M_n = D_n$ следует, что

$$\|\varrho_n\|_C = |\varrho_n(1)|$$

и многочлен ϱ_n является экстремальным в неравенстве (12).

Нам осталось проверить, что ϱ_n – единственный экстремальный многочлен неравенства (12). Если экстремальный многочлен f_n неравенства (12) достигает равномерной нормы в концевой точке $x = 1$ отрезка, то он будет экстремальным и в неравенстве (13). В силу леммы 1 такой многочлен с точностью до мультипликативной константы совпадает с ϱ_n.

Убедимся, что никакой экстремальный многочлен неравенства (12) не может достигать равномерной нормы на полуинтервале $[-1, 1)$. Будем рассуждать от противного. Предположим, что экстремальный многочлен $f_n \in \mathscr{P}_n$ неравенства (12) достигает равномерной нормы в точке $t \in [-1, 1)$. На многочлене f_n должны обратиться в равенства оба неравенства в (15) и, в частности, второе неравенство. А это означает, что на многочлене f_n достигается норма оператора Θ_t. В силу теоремы 3 при $1 < q < \infty$ многочлен f_n есть тождественная константа, а при $q = 1$ многочлен f_n сохраняет знак на $(-1, 1)$. Сейчас важно, что в обоих случаях многочлен f_n сохраняет знак на $(-1, 1)$. В силу свойства положительности оператора обобщенного сдвига, многочлен $g_n = \Theta_t f_n$ также сохраняет знак на $(-1, 1)$.

На многочлене f_n первое неравенство (15) должно обратиться в равенство. Следовательно, многочлен $g_n = \Theta_t f_n$ является экстремальным в неравенстве (13). В силу свойства единственности экстремального многочлена многочлен g_n лишь мультипликативной константой отличается от ϱ_n. Многочлен ϱ_n имеет n перемен знака на $(-1, 1)$. Поэтому g_n не может сохранять знак на $(-1, 1)$. Полученное противоречие показывает, что в случае $\alpha > \beta \geqslant -1/2$ экстремальный многочлен неравенства (12) не может достигать равномерной нормы на полуинтервале $[-1, 1)$. Теорема 4 доказана.

Список литературы

1. *Arestov V.*, *Deikalova M.* Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, № 4. P. 689–708.
2. *Arestov V.*, *Deikalova M.* Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with Jacobi weight of algebraic polynomials on an interval // Analysis Math. 2016. Vol. 42, № 2. P. 1–120.
3. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. – М.: ГИФМЛ, 1962. 500 с.
4. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1976. 327 с.
5. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. – М.: ИЛ, 1949. 798 с.
6. *Askey R.*, Orthogonal polynomials and special functions. – Philadelphia, Pa: SIAM, 1975.
7. *Бабенко А. Г.* Точное неравенство Джексона – Стечкина для L^2-приближений на отрезке с весом Якоби и проективных пространствах // Известия РАН. Сер. мат. 1998. Т. 68, № 6. С. 27–52.
8. *Koornwinder T.* Jacobi polynomials, II. An analytic proof of the product formula // SIAM J. Math. Anal. 1974, № 5. P. 125–137.
9. *Askey R. and Wainger S.* A convolution structure for Jacobi series // Amer. J. Math. 1969. Vol. 91. P. 463–485.
10. *Gasper G.* Positivity and the convolution structure for Jacobi series // Ann. Math., Second Series. 1971. Vol. 93, № 1. P. 112–118.
11. *Bavinck H.* A special class of Jacobi series and some applications // J. Math. Anal. Appl. 1972. № 37. P. 767–797.
12. *Никольский С.М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН СССР. 1951. Т. 38. С. 244–278.
13. *Szegö G. and Zygmund A.* On certain mean values of polynomials // J. Anal. Math. 1953. Vol. 3, № 1. P. 225–244.
14. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 2. – М.: Мир, 1965. 538 с.
15. *Корнейчук Н.П.*, *Бабенко В.Ф.*, *Лигун А.А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наукова думка, 1992. 304 с.
16. *Milovanović G. V.*, *Mitrinovic D. S.*, *Rassias Th. M.* Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific, 1994. 821 p.
17. *Borwein P.*, *Erdelyi T.* Polynomials and polynomial inequalities, Grad. Texts in Math., 161. – New York, NY: Springer-Verlag, 1995.
18. *Rahman Q.I.*, *Schmeisser G.* Analytic theory of polynomials. – Oxford: Oxford Univ. Press, 2002. 742 p.
19. *Арестов В.В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Серия мат. 1981. Т. 45, № 1. С. 3–22.
20. *Arestov V. V. and Glazyrina P. Yu.* Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164, № 11. P. 1501–151.
21. *Lupas A.* An inequality for polynomials // Univ. Beograd. Publ. Electrotehn. Fak. Sep. Mat. Fiz. 1974. № 461–№ 497. P. 241–243.
22. *Тайков Л.В.* Один круг экстремальных задач для тригонометрических полиномов // Успехи матем. наук. 1965. Т. 20. Вып. 3. С. 205–211.
23. *Babenko V.*, *Kofanov V.*, *Pichugov S.* Comparison of rearrangement and Kolmogorov–Nagy type inequalities for periodic functions // Approx. Theory: A volume dedicated to Blagovest Sendov / Ed. B. Bojanov. Sofia: DARBA. 2002. P. 24–53.
24. *Gorbachev D. V.* An integral problem of Konyagin and the (C, L)-constants of Nikol'skii // Proc. Steklov Inst. Math. 2004. Suppl. 2. P. S117–S138.

25. *Simonov I.E., Glazyrina P.Yu.* Sharp Markov–Nikol'skii inequality with respect to the uniform norm and the integral norm with Chebyshev weight // J. Approx. Theory. 2015. Vol. 192. P. 69–81.
26. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во МГУ. 1976. 304 с.
27. *Арестов В.В., Дейкалова М.В.* Неравенство Никольского для алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Труды Института матем. и мех. УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 34–47.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 44–49

Односторонние приближения в $\boldsymbol{L}$ линейной комбинации ядра Пуассона и сопряженного ядра Пуассона тригонометрическими полиномами

А. Г. Бабенко, Т. З. Наум

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук Уральского федерального университета им. первого Президента России Б. Н. Ельцина,
Екатеринбург, Россия

Аннотация. Пусть $q \in (-1,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\Pi_{q,\alpha}(t) = \cos(\alpha\pi/2)P(t) + \sin(\alpha\pi/2)Q(t)$ — линейная комбинация ядра Пуассона $P(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt$ и сопряженного ядра Пуассона $Q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \sin kt$. Рассматривается задача наилучшего интегрального приближения снизу и сверху ядра $\Pi_{q,\alpha}$ тригонометрическими полиномами порядка не выше заданного. В случае $\alpha = 0$ задачу решили В. Г. Доронин и А. А. Лигун в 70-х годах прошлого века. Здесь приводится решение в общем случае $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Обозначения. В дальнейшем используются следующие обозначения:
L — пространство 2π-периодических измеримых вещественнозначных функций с нормой

$$\|f\| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt;$$

$\mathcal{T}_{n-1}$ — подпространство тригонометрических полиномов

$$\tau(t) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} (a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t)$$

порядка не выше $n-1$ с вещественными коэффициентами;

$$E_{n-1}(g) := \inf_{\tau \in \mathcal{T}_{n-1}} \|g - \tau\|,$$

$$E^{-}{}_{n-1}(g) := \inf_{\tau \in \mathcal{T}_{n-1},\, \tau \leqslant g} \|g - \tau\|, \qquad E^{+}{}_{n-1}(g) := \inf_{\tau \in \mathcal{T}_{n-1},\, g \leqslant \tau} \|g - \tau\| \tag{1}$$

— величины наилучшего приближения, наилучшего приближения снизу и сверху ограниченной функции $g \in L$ подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ по норме пространства L соответственно. Тригонометрические полиномы, реализующие точные нижние грани в правых частях равенств (1), называются *полиномами наилучшего* (*интегрального*) *приближения функции g и наилучшего одностороннего* (*интегрального*) *приближения* (*снизу и сверху*) *соответственно.*

Ясно, что $E_{n-1}(g) \leqslant \min\{E^{-}{}_{n-1}(g),\ E^{+}{}_{n-1}(g)\}$. Интересно знать, в каких пределах может изменяться отношение $\dfrac{\min\{E^{-}{}_{n-1}(g),\ E^{+}{}_{n-1}(g)\}}{E_{n-1}(g)}$. Ответ на это вопрос представляет

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

© А. Г. Бабенко, Т. З. Наум, 2016

интерес, поскольку величины $E^-{}_{n-1}(g)$, $E^+{}_{n-1}(g)$, как показывает опыт, находить легче, чем $E_{n-1}(g)$.

Зафиксируем произвольное число $q \in (-1, 1)$. *Ядром Пуассона и сопряженным ядром Пуассона* называются соответственно (см. [4, т. 1, гл. 1, § 1, с. 12; гл. 3, § 6, формулы (6.2), (6.3)]) функции

$$P(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k e^{ikt}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt = \frac{1-q^2}{2(1-2q\cos t + q^2)},$$

$$Q(t) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k e^{ikt}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \sin kt = \frac{q\sin t}{1-2q\cos t + q^2}.$$

Линейную комбинацию $\left(\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) P(t) + \left(\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) Q(t) = \Pi_{q,\alpha}(t)$ условимся называть *обобщенным ядром Пуассона* с параметрами $q \in (-1, 1)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Краткая история вопроса. Формулировка основного результата. Задачу наилучшего одностороннего интегрального приближения ядра $\Pi_{q,\alpha}$ в важном частном случае $\alpha = 0$ исследовали В.Г. Доронин и А.А. Лигун. Они нашли величины наилучшего интегрального приближения снизу и сверху ядра Пуассона $P = \Pi_{q,0}$ тригонометрическими полиномами [5, лемма 3] (см. [6, теорема 3.2.2]), а именно,

$$E^-{}_{n-1}(P) = \frac{q^n}{1+q^n}, \qquad E^+{}_{n-1}(P) = \frac{q^n}{1-q^n}, \quad 0 < q < 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *При любых $n \in \mathbb{N}$, $q \in (-1, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливы равенства*

$$E^-_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = \frac{|q|^n}{1-q^{2n}}\left(1 - |q|^n \cos\frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad E^+_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = \frac{|q|^n}{1-q^{2n}}\left(1 + |q|^n \cos\frac{\alpha\pi}{2}\right).$$

З а м е ч а н и е. В случае $\alpha = 0$ с помощью замены переменной $x = \cos t$ задача одностороннего интегрального приближения ядра Пуассона $P = \Pi_{q,0}$ сводится к задаче одностороннего приближения простейшей алгебраической дроби на отрезке $[-1, 1]$ алгебраическими многочленами в интегральной метрике с весом Чебышева первого рода. Поскольку производная произвольного порядка указанной простейшей дроби сохраняет знак на $[-1, 1]$, то результат Р. Боянича и Р. ДеВора [10, Theorem 4 and Remark] дает конструкцию полиномов наилучшего одностороннего приближения. В общем случае $\alpha \in \mathbb{R}$ этот способ нахождения полиномов наилучшего одностороннего приближения не применим.

3. Вспомогательные утверждения. Для $\alpha \in \mathbb{R}$, $q \in (-1, 1)$, $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\mathcal{E}^-_{n-1}(q, \alpha) := E^-_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}), \qquad \mathcal{E}^+_{n-1}(q, \alpha) := E^+_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}). \tag{2}$$

Ядро $\Pi_{q,\alpha}$ имеет следующие представления:

$$\Pi_{q,\alpha}(t) = \cos\frac{\alpha\pi}{2} P(t) + \sin\frac{\alpha\pi}{2} Q(t) = \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\alpha\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{(1-q^2)\cos\dfrac{\alpha\pi}{2} + 2q\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}\sin t}{2(1-2q\cos t + q^2)}.$$

Поскольку $\Pi_{q,\alpha}(t + \pi) = \Pi_{-q,\alpha}(t)$, то

$$\mathcal{E}^\pm_{n-1}(q, \alpha) = \mathcal{E}^\pm_{n-1}(-q, \alpha) = \mathcal{E}^\pm_{n-1}(|q|, \alpha) \quad \text{при} \quad \alpha \in \mathbb{R},\ q \in (-1, 1),\ n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому задача вычисления величин (2) при $q \in (-1, 1)$ сводится к случаю $q \in (0, 1)$, который в дальнейшем и будем рассматривать; в случае $q = 0$, как нетрудно видеть, $\mathcal{E}^\pm_{n-1}(0, \alpha) = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Приведем еще два свойства обобщенного ядра Пуассона:

$$\Pi_{q,\alpha+4}(t) = \Pi_{q,\alpha}(t), \quad \Pi_{q,\alpha+2}(t) = -\Pi_{q,\alpha}(t) \quad \text{при} \quad \alpha \in \mathbb{R},\ q \in (0,1),\ t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Из первого равенства в (3) следует 4-периодичность величин $\mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(q,\alpha)$ по α, т. е.

$$\mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(q,\alpha+4) = \mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(q,\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R},\ q \in (0,1),\ n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением случая $\alpha \in [0,4]$. Из второго равенства в (3) вытекает, что

$$\mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(q,\alpha+2) = \mathcal{E}^{\mp}_{n-1}(q,\alpha) \quad \text{при} \quad \alpha \in [0,2],\ q \in (0,1),\ n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Отсюда следует, что из двух величин $\mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha)$, $\mathcal{E}^{+}_{n-1}(q,\alpha)$ достаточно найти лишь величину $\mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha)$, поскольку $\mathcal{E}^{+}_{n-1}(q,\alpha)$ выражается через $\mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha)$ с помощью формулы (4), а именно

$$\mathcal{E}^{+}_{n-1}(q,\alpha) = \begin{cases} \mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha+2) & \text{при} \quad \alpha \in [0,2], \\ \mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha-2) & \text{при} \quad \alpha \in [2,4]. \end{cases} \tag{5}$$

Ядро $\Pi_{q,\alpha}$ является непрерывно дифференцируемой 2π-периодической функцией, поэтому в силу теоремы 1.8.1 из [6, гл. 1, § 1.8] существует единственный полином из $\mathcal{T}_{n-1}$ наилучшего интегрального приближения снизу для $\Pi_{q,\alpha}$.

Напомним известное утверждение (см. [6, гл. 1, § 1.7, теорема 1.7.5]), на основе которого с помощью квадратурной формулы (6) в дальнейшем будет получена оценка снизу искомой величины $\mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha)$.

Теорема A. *Пусть квадратурная формула*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tau(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} p_k \tau(x_k)$$

с неотрицательными коэффициентами $p_1,\dots,p_m$ справедлива для любого полинома $\tau \in \mathcal{T}_{n-1}$. Тогда для любой непрерывной 2π-периодической функции g выполняются неравенства

$$E^{+}{}_{n-1}(g) \geqslant \sum_{k=1}^{m} p_k g(x_k) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx, \qquad E^{-}{}_{n-1}(g) \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx - \sum_{k=1}^{m} p_k g(x_k).$$

Зафиксируем произвольное вещественное число ξ. Хорошо известна (см. [4, т. 2, гл. 10, формула (2.5)], [6, гл. 1, § 1.7, предложение 1.7.2]) квадратурная формула

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tau(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \tau\left(\xi + \frac{2k\pi}{n}\right), \tag{6}$$

которая выполняется для любого полинома $\tau \in \mathcal{T}_{n-1}$.

В статье [1] Н. А. Барабошкиной [1] для построения полинома наилучшего интегрального приближения функции $\Pi_{q,\alpha}$ (без ограничения на расположение графика приближающего

[1] На основе результатов [1] в [2, теорема 1] при $q \in (0,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ найдена следующая компактная формула для $E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})$:

$$E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = (2\cos\widetilde{\alpha})\operatorname{arctg}\frac{2q^n\cos\widetilde{\alpha}}{s(q,\widetilde{\alpha},n)} + (\sin\widetilde{\alpha})\ln\frac{s(q,\widetilde{\alpha},n)+2q^n\sin\widetilde{\alpha}}{s(q,\widetilde{\alpha},n)-2q^n\sin\widetilde{\alpha}},$$

где $s(q,\widetilde{\alpha},n) = \sqrt{1-2q^{2n}\cos 2\widetilde{\alpha}+q^{4n}}$, $\widetilde{\alpha} = \alpha\pi/2$. Важные частные случаи этой формулы были установлены ранее Б. Надем [11] ($\alpha = 0$, $\alpha = 1$) и М. Г. Крейном [7] ($\alpha = 0$). В общем случае величину $E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})$ нашел А. В. Бушанский [3] в виде максимума модуля функции, представленной в виде ряда; В. Т. Шевалдин [9] предложил другой метод доказательства этого результата. Более подробные исторические сведения, относящиеся к задаче о $E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})$, содержатся в [8, § 7], [9], [1].

полинома) был предложен подход, основанный на представлении тригонометрической дроби
$$B_n(t) = \frac{\gamma^* \sin n(t-\xi^*)}{1+q^2-2q\cos t}$$
в виде суммы $B_n = \tau + r$, в которой τ — некоторый тригонометрический полином порядка не выше $n-1$, а r — остаток. Реализация указанного подхода заключается в подборе параметров γ^*, ξ^* таким образом, чтобы остаток r совпал с $\Pi_{q,\alpha}$. Для этого использовалось следующее утверждение [1, лемма 1], которое будет применяться и в данной работе.

Лемма A (Н. А. Барабошкина). *При любых* $q \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*
$$\frac{\cos nt}{1+q^2-2q\cos t} = \frac{c(n)}{1+q^2-2q\cos t} + R_{n-1}(\cos t),$$
$$\frac{\sin nt}{1+q^2-2q\cos t} = \frac{d(n)\sin t}{1+q^2-2q\cos t} + (\sin t)Q_{n-2}(\cos t),$$
в которых
$$c(n) = \frac{1+q^{2n}}{2q^n}, \qquad d(n) = \frac{1-q^{2n}}{(1-q^2)q^{n-1}},$$
$R_{n-1}(x)$ *и* $Q_{n-2}(x)$ *— некоторые алгебраические многочлены степени* $n-1$ *и* $n-2$ *соответственно, причем* $R_0(x) \equiv -1/(2q)$, $Q_{-1}(x) \equiv 0$.

4. Обоснование основного результата. В данном разделе строится полином наилучшего интегрального приближения снизу ядра $\Pi_{q,\alpha}$, при этом применяется подход, аналогичный тому, который использовался в [1]. Применяемый подход основан на представлении неотрицательной тригонометрической дроби (10) в виде суммы некоторого тригонометрического полинома порядка не выше $n-1$ и остатка, причем параметры выбираются таким образом, чтобы остаток совпал с приближаемым ядром $\Pi_{q,\alpha}$.

Введем следующие величины, зависящие от параметров q, α и n:
$$\gamma = \gamma(q,\alpha,n) = \frac{2q^n(1-q^2)}{(1-q^{2n})^2}\left(1+q^{2n}-2q^n\cos\frac{\alpha\pi}{2}\right), \tag{7}$$
$$\sigma = \sigma(q,\alpha,n) = \frac{2q^n}{1+q^{2n}}\left\{\frac{1-q^2}{\gamma(q,\alpha,n)}\cos\frac{\alpha\pi}{2} - 1\right\} = \frac{(1+q^{2n})\cos\frac{\alpha\pi}{2} - 2q^n}{1+q^{2n}-2q^n\cos\frac{\alpha\pi}{2}}. \tag{8}$$
Заметим, что
$$\gamma(q,\alpha,n) > 0 \quad \text{и} \quad |\sigma(q,\alpha,n)| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad q\in(0,1), \quad \alpha\in\mathbb{R}, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{9}$$
Ключевую роль в дальнейшем играет следующая тригонометрическая дробь:
$$B(t) = B_{q,\alpha,n}(t) = \frac{\gamma\left\{\cos\frac{n(t-\xi)}{2}\right\}^2}{1+q^2-2q\cos t}, \tag{10}$$
в которой величина $\gamma = \gamma(q,\alpha,n)$ задана формулой (7), а параметр ξ связан с величиной (8) соотношением
$$\cos n\xi = \sigma(q,\alpha,n). \tag{11}$$
Дробь $B(t)$ неотрицательна при всех $t \in \mathbb{R}$ в силу первого неравенства в (9). Связь этой дроби с обобщенным ядром Пуассона выражает следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $q \in (0,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *дробь* $B(t) = B_{q,\alpha,n}(t)$ *задана формулой* (10), *где величина* $\gamma = \gamma(q,\alpha,n)$ *задана формулой* (7), *а параметр* ξ *связан с величиной* (8) *соотношением* (11). *Тогда разность*
$$B(t) - \Pi_{q,\alpha}(t) = Y(t) \tag{12}$$

представляет собой тригонометрический полином порядка не выше $n-1$. *Причем* $-Y$ *является полином наилучшего интегрального приближения снизу для* $\Pi_{q,\alpha}$ *и*

$$E^{-}{}_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = \|B\| = \frac{q^n}{1-q^{2n}}\left(1 - q^n\cos\frac{\alpha\pi}{2}\right). \tag{13}$$

Из этой леммы и соотношения (5) следуют утверждения теоремы 1.

Краткая схема доказательства леммы 1. Предположим, что для некоторого положительного γ и вещественного ξ дробь (10) удовлетворяет соотношению (12) с некоторым полиномом $Y \in \mathcal{T}_{n-1}$. Тогда полином $-Y$ будет полиномом наилучшего интегрального приближения снизу для $\Pi_{q,\alpha}$. Действительно, с одной стороны, из неотрицательности $B(t)$ следует неравенство

$$-Y(t) \leqslant \Pi_{q,\alpha}(t) \quad \text{при всех} \quad t\in\mathbb{R},$$

поэтому

$$E^{-}{}_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) \leqslant \|\Pi_{q,\alpha} - (-Y)\| = \|\Pi_{q,\alpha} + Y\| = \|B\|.$$

С другой стороны, в силу теоремы A и квадратурной формулы (6) (с учетом совпадением ядра $\Pi_{q,\alpha}$ с приближающим его полиномом в узлах указанной квадратурной формулы) имеем

$$E^{-}{}_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) \geqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Pi_{q,\alpha}(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Pi_{q,\alpha}\left(\xi + \frac{2k\pi}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Pi_{q,\alpha}(t)\,dt + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}Y\left(\xi + \frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\{\Pi_{q,\alpha}(t) + Y(t)\right\}\,dt = \|B\|.$$

Следовательно,

$$E^{-}{}_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = \|B\| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}B(t)\,dt.$$

Для вычисления $\|B\|$, преобразуем дробь (10)

$$B(t) = \frac{\gamma\left\{\cos\frac{n(t-\xi)}{2}\right\}^2}{1+q^2-2q\cos t} = \frac{\gamma\{1+\cos n(t-\xi)\}}{2(1+q^2-2q\cos t)} = \gamma\frac{1+\cos nt\cos n\xi + \sin nt\sin n\xi}{2(1+q^2-2q\cos t)}. \tag{14}$$

Отсюда получаем

$$\mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha) = E^{-}_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}B(t)\,dt = \frac{\gamma}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos nt\cos n\xi+\sin nt\sin n\xi}{2(1+q^2-2q\cos t)}\,dt =$$

$$= \frac{\gamma}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2(1+q^2-2q\cos t)}\,dt + \frac{\gamma}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nt\cos n\xi}{2(1+q^2-2q\cos t)}\,dt =$$

$$= \frac{\gamma}{1-q^2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}P(t)\,dt + \frac{\gamma\cos n\xi}{1-q^2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}P(t)\cos nt\,dt = \frac{\gamma(1+q^n\cos n\xi)}{2(1-q^2)}.$$

Таким образом, имеем

$$\mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha) = \frac{\gamma(1+q^n\cos n\xi)}{2(1-q^2)}. \tag{15}$$

Осталось найти γ и $\cos n\xi$. Применив лемму A к последней части цепочки равенств (14), получим представление

$$B(t) = \gamma\frac{1+\cos nt\cos n\xi+\sin nt\sin n\xi}{2(1+q^2-2q\cos t)} = Y(t) + H(t),$$

в котором Y — некоторый тригонометрический полином порядка не выше $n-1$, а H — остаток от деления, который задается формулой

$$H(t) = \gamma \frac{1 + c(n)\cos n\xi + d(n)\sin n\xi \sin t}{2(1+q^2-2q\cos t)}.$$

Таким образом, задача свелась к поиску положительного параметра γ и вещественного параметра ξ таких, чтобы H совпал с $\Pi_{q,\alpha}$. Иными словами, по переменной $t \in \mathbb{R}$ должно выполняться тождество

$$\gamma \frac{1 + c(n)\cos n\xi + d(n)\sin n\xi \sin t}{2(1+q^2-2q\cos t)} \equiv \frac{(1-q^2)\cos\dfrac{\alpha\pi}{2} + 2q\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}\sin t}{2(1-2q\cos t+q^2)},$$

которое равносильно следующему:

$$\gamma\big[1 + c(n)\cos n\xi + d(n)\sin n\xi \sin t\big] \equiv (1-q^2)\cos\frac{\alpha\pi}{2} + 2q\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sin t.$$

Отсюда приходим к системе двух уравнений

$$\begin{cases} \gamma\big[1 + c(n)\cos n\xi\big] = (1-q^2)\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}, \\ \gamma d(n)\sin n\xi = 2q\sin\dfrac{\alpha\pi}{2} \end{cases}$$

с двумя неизвестными γ и ξ. Решение этой системы с дополнительным условием $\gamma >$ > 0 выражается приведенными выше формулами (7), (8), (11). С учетом этих формул и равенства (15), приходим к утверждению (13). $\square$

Список литературы

1. *Барабошкина Н.А.* Приближение в L линейной комбинации ядра Пуассона и его сопряженного тригонометрическими полиномами // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 79–86.
2. *Барабошкина Н.А.* Приближение гармонических функций алгебраическими многочленами на окружности радиуса меньше единицы с наличием ограничений на единичной окружности // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 71–78.
3. *Бушанский А.В.* О наилучшем в среднем гармоническом приближении некоторых функций // Исследования по теории приближения функций и их приложения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. С. 2–37.
4. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: в 2 т. / Пер. с англ. – М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с. Т. 2. 538 с.
5. *Доронин В.Г.*, *Лигун А.А.* Точные значения наилучших односторонних приближений некоторых классов периодических функций // Изв. вузов. Матем. 1979. № 8(207). С. 20–25.
6. *Корнейчук Н.П.*, *Лигун А.А.*, *Доронин В.Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наукова думка, 1982. 252 с.
7. *Крейн М.Г.* К теории наилучшего приближения // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18, № 4–5. С. 245–249.
8. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1946. Т. 10. С. 207–256.
9. *Шевалдин В.Т.* Поперечники классов сверток с ядром Пуассона // Матем. заметки. 1992. Т. 51. Вып. 6. С. 126–136.
10. *Bojanic R.*, *DeVore R.* On polynomials of best one-sided approximation // Enseign. Math. 1966. Vol. 12. P. 139–164.
11. *Sz. Nagy B.* Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I. Periodischer Fall // Ber. Verh. sächs. Akad., Leipzig. 1938. Bd. 90. S. 103–134.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 50–56

Приближенное восстановление псевдодифференциальных операторов

Д. Б. Базарханов

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

Аннотация. В работе строится линейный метод приближенного восстановления значений периодических псевдодифференциальных операторов с символами из специального класса по спектральной информации о функции и операторе. Установлено, что этот метод дает хорошую погрешность восстановления для функций из периодических пространств типа Никольского – Бесова и Лизоркина – Трибеля обобщенной смешанной гладкости.

Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — множества натуральных, целых, действительных и комплексных чисел соответственно; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$; $\mathrm{z}_k = \{1, 2, \ldots, k\}$ для $k \in \mathbb{N}$; $\mathbb{T}^k \equiv (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^k$ — m-мерный тор. Для $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ положим $xy = x_1 y_1 + \ldots + x_k y_k$, $\|x\| = \sqrt{xx}$, $|x| = |x_1| + \ldots + |x_k|$, $|x|_\infty = \max\{|x_\kappa| \colon \kappa \in \mathrm{z}_k\}$.

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$ — пространства Шварца пробных функций и распределений соответственно; $\widehat{f} \equiv \mathcal{F}_k(f)$ и $\check{f} \equiv \mathcal{F}_k^{-1}(f)$ — прямое и обратное преобразования Фурье $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$. Далее, пусть $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^k)$ — пространство 1–периодических (по всем переменным) распределений, т. е. совокупность всех $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$ таких, что $\langle f, \varphi(\cdot + \lambda)\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ и любых $\lambda \in \mathbb{Z}^k$. Хорошо известно, что $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^k)$, если и только если $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \mathbb{Z}^k$, т. е. распределение $\widehat{f}$ обращается в 0 на открытом множестве $\mathbb{R}^k \backslash \mathbb{Z}^k$.

Рассмотрим гладкий периодический символ $\psi : \mathbb{T}^k \times \mathbb{Z}^k \to \mathbb{C}$ (т. е. $\psi(\cdot, \xi) \in C^\infty(\mathbb{T}^k)$ для каждого $\xi \in \mathbb{Z}^k$) и соответствующий ему формальный псевдодифференциальный оператор (ПДО)

$$\psi(x, D) : \mathcal{S}'(\mathbb{T}^k) \ni f(x) \mapsto \psi(x, D) f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^k} \widehat{f}(\xi) \psi(x, \xi) e^{2\pi i \xi x}.$$

Введем следующие классы символов ("типа произведения" при $n \geqslant 2$). Фиксируем $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant k$, и вектор $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ с $|m| = k$ ($m = k$, если $n = 1$, $m = \mathbf{1} \equiv \equiv (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^k$, если $n = k$). Представим $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ в виде $x = (x^1, \ldots, x^n)$, где $x^\nu = (x_{\kappa_{\nu-1}+1}, \ldots, x_{\kappa_\nu}) \in \mathbb{R}^{m_\nu}$; $\kappa_0 = 0, \kappa_\nu = m_1 + \ldots + m_\nu$; $\mathrm{K}_\nu \equiv \{\kappa_{\nu-1} + 1, \ldots, \kappa_\nu\}$, $\nu \in \mathrm{z}_n$. Для $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{N}_0^k$ положим

$$\partial^\lambda = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial {x_1}^{\lambda_1} \ldots \partial {x_k}^{\lambda_k}}, \quad \Delta^\lambda = \Delta_1^{\lambda_1} \circ \ldots \circ \Delta_k^{\lambda_k},$$

здесь $\Delta_\kappa^{\lambda_\kappa}$ — конечная разность порядка λ_κ (с шагом 1) по κ–й переменной, $\kappa \in \mathrm{z}_k$.

Определение 1. *Пусть* $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n$; $\mathfrak{K} = (K_1, \ldots, K_n) \in \mathbb{N}^n$. *Тогда периодический символ* $\psi(x, \xi)$ *принадлежит классу* $\Psi^{\tau\, \mathfrak{K} m} \equiv \Psi^{\tau\, \mathfrak{K} m}(\mathbb{T}^k)$, *если для любых* $\lambda \in \mathbb{N}_0^k$ *с* $\lambda_\kappa \leqslant K_\nu$, $\kappa \in \mathfrak{K}_\nu$, $\nu \in \mathrm{z}_n$, *и* $\mu \in \mathbb{N}_0^k$ *найдется постоянная* $c_{\lambda\mu} > 0$ *такая, что*

$$|\Delta_\xi^\lambda \partial_x^\mu \psi(x, \xi)| \leqslant c_{\lambda\mu} \prod_{\nu \in \mathrm{z}_n} (1 + \|\xi^\nu\|)^{\tau_\nu - |\lambda^\nu|}, \quad x \in \mathbb{T}^k, \xi \in \mathbb{Z}^k.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 5130/ГФ4 Министерства образования и науки Республики Казахстан.

© Д. Б. Базарханов, 2016

Замечание 1. *При $n=1$ класс символов $\Psi^{\tau\,\mathfrak{K}\,m}$ есть периодический аналог известного класса S^τ Л. Хермандера, который играет важную роль в теории дифференциальных операторов с переменными коэффициентами; см., например,* [1]. *При $n=k\geqslant 2$ эти классы содержат периодические символы ПДО смешанного типа. В несколько более общем случае $1\leqslant n\leqslant k$ такие ПДО естественным образом возникают в связи функциональными пространствами "типа произведения"; см., например,* [2], [3], [4], [5], [6, ch. II, §5.20-5.23, ch.III, §5.27].

В настоящей работе строится линейный метод приближенного восстановления ПДО, который дает хорошую погрешность приближения для каждого ПДО с символом из класса $\Psi^{\tau\,v\,\mathfrak{K}\,m}_{\varepsilon\,\vartheta}(\mathbb{T}^k)$ (см. Определение 3 ниже) на элементах подходящих функциональных пространств типа Никольского – Бесова $B^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ и типа Лизоркина – Трибеля $L^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$.

Функциональные пространства. Пусть, как обычно, $L_p=L_p(\mathbb{T}^k)(1\leqslant p\leqslant\infty)$ — пространство измеримых функций $f:\mathbb{T}^k\to\mathbb{C}$, суммируемых в степени p (при $p=\infty$ существенно ограниченных) на $\mathbb{T}^k$, со стандартной нормой $\|f\,|\,L_p\|$. Ясно, что для $f\in\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ и $g\in L_1\,(\subset\mathcal{S}'(\mathbb{T}^k))$

$$\widehat{f}(\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^k}f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx,\quad \xi\in\mathbb{R}^k,\quad \widehat{g}(\xi)=\int\limits_{\mathbb{T}^k}g(x)e^{-2\pi i\xi x}dx,\quad \xi\in\mathbb{Z}^k.$$

Далее, $\ell_q=\ell_q(\mathbb{N}_0^n)$ $(1\leqslant q\leqslant\infty)$ — пространство числовых последовательностей $(a_\alpha)==(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ с конечной нормой

$$\|(a_\alpha)\,|\,\ell_q\|=\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}|a_\alpha|^q\right)^{1/q}\ (1\leqslant q<\infty),\|(a_\alpha)\,|\,\ell_\infty\|=\sup(|a_\alpha|\ :\alpha\in\mathbb{N}_0^n).$$

$\ell_q(L_p)$ (соответственно, $L_p(\ell_q)$) — пространство функциональных последовательностей $(g_\alpha(x))=(g_\alpha(x))_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$, $x\in\mathbb{T}^k$, с конечной нормой

$$\|(g_\alpha)\,|\,\ell_q(L_p)\|=\|(\|g_\alpha\,|\,L_p\|)\,|\,\ell_q\|$$

(соответственно,

$$\|(g_\alpha)\,|\,L_p(\ell_q\|=\|\|(g_\alpha(\cdot))\,|\,\ell_q\|\,|\,L_p\|).$$

Теперь определим («m-кратное») разбиение единицы на $\mathbb{R}^k$. Выберем функции $\eta_0^\nu\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{m_\nu})\,(\nu\in\mathrm{z}_n)$ такие, что $0\leqslant\widehat{\eta_0^\nu}(\xi^\nu)\leqslant 1$, $\xi^\nu\in\mathbb{R}^{m_\nu}$; $\widehat{\eta_0^\nu}(\xi^\nu)=1$, если $|\xi^\nu|_\infty\leqslant 1$; $\widehat{\eta_0^\nu}(\xi^\nu)=0$, если $|\xi^\nu|_\infty\geqslant 3/2$ $\quad(\nu\in\mathrm{z}_n)$. Положим $\widehat{\eta^\nu}(\xi^\nu)\equiv\widehat{\eta_0^\nu}(2^{-1}\xi^\nu)-\widehat{\eta_0^\nu}(\xi^\nu)$; $\widehat{\eta_j^\nu}(\xi^\nu)\equiv\widehat{\eta^\nu}(2^{-j+1}\xi^\nu)$, $j\in\mathbb{N}$; тогда

$$\{\widehat{\eta_j^\nu}(\xi^\nu),\ j\in\mathbb{N}_0\}$$

— гладкое разбиение единицы (по «коридорам») на $\mathbb{R}^{m_\nu}$ $(\nu\in\mathrm{z}_n)$, а

$$\{\widehat{\eta}_\alpha(\xi)\equiv\prod_{\nu=1}^n\widehat{\eta^\nu_{\alpha_\nu}}(\xi^\nu),\ \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}_0^n\}$$

— («m-кратное») гладкое разбиение единицы на $\mathbb{R}^k$.

Наконец, введем операторы $\Delta_\alpha^\eta:\mathcal{S}'(\mathbb{T}^k)\to\mathcal{S}'(\mathbb{T}^k)$ $(\alpha\in\mathbb{N}_0^n)$ следующим образом :

$$\Delta_\alpha^\eta(f,x)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^k}\widehat{\eta}_\alpha(\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\,\xi x}.$$

Определение 2. *Пусть $s=(s_1,\dots,s_n)\in\mathbb{R}_+^n$, $1\leqslant p,q\leqslant\infty$.*

I. *Пространство типа Никольского – Бесова $B^{s\,m}_{p\,q}\equiv B^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ состоит из всех функций $f\in L_p$, для которых конечна норма*

$$\|\,f\,|\,B^{s\,m}_{p\,q}\,\|\;=\;\|(2^{\alpha s}\Delta_\alpha^\eta(f,x))\,|\,\ell_q(L_p)\|.$$

II. *Пространство типа Лизоркина – Трибеля* $L^{s\,m}_{p\,q} \equiv L^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ $(p < \infty)$ *состоит из всех функций* $f \in L_p$, *для которых конечна норма*

$$\| f \,|\, L^{s\,m}_{p\,q} \| \;=\; \|(2^{\alpha s}\Delta^{\eta}_{\alpha}(f,x)) \,|\, L_p(\ell_q)\|.$$

Единичные шары $\mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q} \equiv \mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ *и* $\mathrm{L}^{s\,m}_{p\,q} \equiv \mathrm{L}^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ *этих пространств будем называть классами типа Никольского – Бесова и Лизоркина – Трибеля соответственно.*

Из класса $\Psi^{\tau\,\mathfrak{K} m}$ с помощью дополнительных условий гладкости выделим класс $\Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K} m}_{\varepsilon\,\vartheta}$.

Определение 3. *Пусть* $1 \leqslant \vartheta \leqslant \infty$; $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n$, $\upsilon = (\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n) \in \mathbb{R}^n_+$; $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in [0,1]^n$; $\mathfrak{K} = (K_1, \ldots, K_n) \in \mathbb{N}^n$. *Тогда периодический символ* $\psi(x,\xi)$ *из* $\Psi^{\tau\,\mathfrak{K} m}$ *принадлежит классу* $\Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K} m}_{\varepsilon\,\vartheta} \equiv \Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K} m}_{\varepsilon\,\vartheta}(\mathbb{T}^k)$, *если для любых* $\lambda \in \mathbb{N}^k_0$ *с* $\lambda_\kappa \leqslant K_\nu$, $\kappa \in \mathrm{K}_\nu$, $\nu \in \mathrm{z}_n$, *и* $\mu \in \mathbb{N}^k_0$ *и любого* $\mathrm{z} \subset \mathrm{z}_n (\mathrm{z} \neq \varnothing)$ *найдется постоянная* $c_{\lambda\,\mu}(\mathrm{z}) > 0$ *такая, что*

$$\|\Delta^{\lambda}_{\xi}\partial^{\mu}_{x}\psi(x,\xi) \,|\, B^{\upsilon_{\mathrm{z}}\,m_{\mathrm{z}}}_{\infty\,\vartheta}\| \leqslant c_{\lambda\,\mu}(\mathrm{z}) \prod_{\nu\in\mathrm{z}} (1 + \|\xi^\nu\|)^{\tau_\nu - |\lambda^\nu| + \upsilon_\nu\varepsilon_\nu} \times$$

$$\times \prod_{\nu\in\dot{\mathrm{z}}} (1 + \|\xi^\nu\|)^{\tau_\nu - |\mu^\nu|}, \qquad x \in \mathbb{T}^k, \xi \in \mathbb{Z}^k.$$

(Норма пространства $B^{\upsilon_{\mathrm{z}}\,m_{\mathrm{z}}}_{\infty\,\vartheta}(\prod\limits_{\nu\in\mathrm{z}} \mathbb{T}^{m_\nu})$ вычисляется по "переменной" $x^{\mathrm{z}} \equiv (x^\nu : \nu \in \mathrm{z})$).

Конструкция линейного метода восстановления ПДО. Пусть $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^k)$,

$$f(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^k} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x},$$

проведем элементарные формальные преобразования действия ПДО $\psi(x,D)$ на f (ниже $\widehat{\psi}(\zeta,\xi)$ — коэффициент Фурье функции $\widehat{\psi}(x,\xi)$, $\zeta \in \mathbb{Z}^k$):

$$\psi(x,D)f(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^k} \psi(x,\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x} =$$

$$= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^k} \Big(\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^k} \widehat{\psi}(\zeta,\xi)e^{2\pi i\zeta x}\Big) \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x} = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^k}\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^k} \widehat{\psi}(\zeta,\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i(\xi+\zeta)x} =$$

$$= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^k} \widehat{f}(\xi) \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^k} \widehat{\psi}(\zeta-\xi,\xi)e^{2\pi i\zeta x} = \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^k} \Big(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^k} \widehat{\psi}(\zeta-\xi,\xi)\widehat{f}(\xi)\Big) e^{2\pi i\zeta x}.$$

Пусть Λ — конечное множество из $\mathbb{Z}^k$ и

$$\mathrm{T}(\Lambda) = \{\, t(x) = \sum_{\xi\in\Lambda} \,\widehat{t}\,(\xi)e^{2\pi i\,\xi x} \;\mid\; \widehat{t}\,(\xi) \in \mathbb{C},\, \xi\in\Lambda\}$$

— пространство тригонометрических полиномов с комплексными коэффициентами и спектром Λ. Теперь заменим f на полином $t \in \mathrm{T}(\Lambda)$ и получим

$$\psi(x,D)t(x) = \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^k} \Big(\sum_{\xi\in\Lambda} \widehat{\psi}(\zeta-\xi,\xi)\widehat{t}(\xi)\Big) e^{2\pi i\zeta x} =$$

$$= \sum_{\xi\in\Lambda} \widehat{t}(\xi) \Big(\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^k} \widehat{\psi}(\zeta-\xi,\xi)e^{2\pi i\zeta x}\Big) = \sum_{\xi\in\Lambda} \widehat{t}(\xi)e^{2\pi i\xi x} \Big(\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^k} \widehat{\psi}(\zeta,\xi)e^{2\pi i\zeta x}\Big).$$

Для $u > 0$ и $\gamma \in {\mathbb{R}_+}^n$ положим

$$\mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f) = (\widehat{f}(\xi) \mid \xi \in \Lambda^{\gamma}_{u}),$$

$$\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi) = (\widehat{\psi}(\zeta,\xi) \mid (\xi,\zeta) \in \Lambda^{\gamma}_{u} \times \Lambda^{\gamma}_{u})$$

(здесь $\Lambda^{\gamma}_{u} = \{\xi \in \mathbb{Z}^k \mid \widehat{\eta}_{\alpha}(\xi) > 0$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{N}^n_0$ с $\alpha\gamma < u\}$),

$$S^{\eta,\gamma}_{u}(f,x) = \sum_{\alpha\gamma\leqslant u} \Delta^{\eta}_{\alpha}(f,x).$$

Определим теперь метод приближенного восстановления значений ПДО $\psi(x,D)f(x)$, использующий информацию $\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi)$ об операторе $\psi(x,D)$ и информацию $\mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f)$ о распределении f, по формуле

$$\Upsilon^{lin}(\mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f),\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi);x)=\sum_{\xi\in\Lambda^\gamma_u}\widehat{S^{\eta,\gamma}_u}(f,\xi)e^{2\pi i\xi x}\sum_{\zeta\in\Lambda^\gamma_u}\widehat{S^{\eta,\gamma}_u}(\psi(\cdot,\xi),\zeta)e^{2\pi i\zeta x}.$$

Основной результат. Прежде всего определим вектор $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\in\mathbb{R}^n$. Положим $\sigma_\nu=\frac{\upsilon_\nu-1}{m_\nu}-(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})_+,\nu\in \mathrm{z}_n$; $\sigma\equiv\min\{\sigma_\nu:\nu\in \mathrm{z}_n\}$, $\omega=|\{\nu\in \mathrm{z}_n:\sigma_\nu=\sigma\}|$. Не ограничивая общности, считаем, что $\sigma=\sigma_1=\ldots=\sigma_\omega<\sigma_\nu$, $\nu\in \mathrm{z}_n\backslash \mathrm{z}_\omega$. Выберем числа $\sigma^{'}_\nu$, $\nu\in \mathrm{z}_n$, из условий $\sigma=\sigma^{'}_1=\ldots=\sigma^{'}_\omega,\sigma<\sigma^{'}_\nu<\sigma_\nu$ при $\nu\in \mathrm{z}_n\backslash \mathrm{z}_\omega$. Наконец, полагаем $\gamma_\nu=\sigma^{'}_\nu m_\nu/\sigma,\ \nu\in \mathrm{z}_n$.

Будем использовать знаки $\lesssim$ и $\asymp$ порядкового неравенства и равенства: для функций $F\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ и $H\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ пишем $F(u)\lesssim H(u)$ при $u\to\infty$, если найдется такая константа $C=C(F,H)>0$, что верно неравенство $F(u)\leqslant CH(u)$ для $u\geqslant u_0>0$; $F(u)\asymp H(u)$, если одновременно $F(u)\lesssim H(u)$ и $H(u)\lesssim F(u)$. Ниже $p_*=\min\{p,2\}$.

Легко видеть (следует применить лемму 5.1 из [7]; доказательство леммы приведено в [8] (там это лемма A)), что верна оценка

$$N\equiv\#\Lambda^\gamma_u\asymp 2^u u^{\omega-1};$$

поэтому всего при построении метода восстановления Υ^{lin} используется $M\equiv\#\Lambda+(\#\Lambda)^2\asymp 2^{2u}u^{2(\omega-1)}$ «единиц информации» ($\#\Gamma$ — число элементов конечного множества Γ).

Теорема 1. *Пусть* $s,\upsilon\in{\mathbb{R}_+}^n,t\in\mathbb{R}^n$; $1\leqslant p,q,r,\vartheta\leqslant\infty$ *такие, что* $s-t=\upsilon-\mathbf{1}$, $\sigma>0$; $\varepsilon\in[0,1]^n$; $\mathfrak{K}=m+\mathbf{1}(\mathbf{1}=(1,\dots,1)\in\mathbb{N}^n)$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

I. *Пусть* $1\leqslant r\leqslant p\leqslant\infty$, $r<\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$. *Тогда для любого периодического символа* $\psi\in\Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K}m}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *верна оценка*

$$\sup\{\|\psi(x,D)f-\Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi),\mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f),\cdot)\,|\,L_r\|\ \mid\ f\in\mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q}\}$$
$$\lesssim_\psi\left(\frac{\log^{\omega-1}N}{N}\right)^\sigma(\log^{\omega-1}N)^{(\frac{1}{p_*}-\frac{1}{q})_+}\ [1];$$

если, кроме того, $1<p<\infty$, *то для любого* $\psi\in\Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K}m}_{\varepsilon\,\vartheta}$

$$\sup\{\|\psi(x,D)f-\Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi),\mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f),\cdot)\,|\,L_r\|\ \mid\ f\in\mathrm{L}^{s\,m}_{p\,q}\}$$
$$\lesssim_\psi\left(\frac{\log^{\omega-1}N}{N}\right)^\sigma(\log^{\omega-1}N)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})_+};$$

более того, найдутся символы $\psi^\star,\psi^*\in\Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K}m}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *такие, что*

$$\sup\{\|\psi(x,D)f-\Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi^\star),\mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f),\cdot)\,|\,L_r\|\ \mid\ f\in\mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q}\}$$
$$\asymp_{\psi^\star}\left(\frac{\log^{\omega-1}N}{N}\right)^\sigma(\log^{\omega-1}N)^{(\frac{1}{p_*}-\frac{1}{q})_+};$$
$$\sup\{\|\psi(x,D)f-\Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi^*),\mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f),\cdot)\,|\,L_r\|\ \mid\ f\in\mathrm{L}^{s\,m}_{p\,q}\}$$
$$\asymp_{\psi^*}\left(\frac{\log^{\omega-1}N}{N}\right)^\sigma(\log^{\omega-1}N)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})_+};$$

для любого $\psi\in\Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K}m}_{\varepsilon\,\vartheta}$

$$\sup\{\|\psi(x,D)f-\Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi),\mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f),\cdot)\,|\,L_1\|\ \mid\ f\in\mathrm{L}^{s\,m}_{1\,q}\}$$
$$\lesssim_\psi\left(\frac{\log^{\omega-1}N}{N}\right)^\sigma(\log^{\omega-1}N)^{1-\frac{1}{q}};$$

[1] Здесь и ниже обозначения $\lesssim_\psi$ и $\asymp_\psi$ подчеркивают, что константы в определении $\lesssim$ и $\asymp$ зависят от ψ.

более того, найдется символ $\psi^\star \in \Psi^{\tau\, \upsilon\, \mathfrak{K} m}_{\varepsilon\, \vartheta}$ *такой, что*

$$\sup\{\|\psi(x,D)f - \Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi^\star), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, L_1\| \ \mid\ f \in \mathrm{L}^{s\,m}_{1\,q}\}$$
$$\asymp_{\psi^\star} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^\sigma (\log^{\omega-1} N)^{1-\frac{1}{q}};$$

II. *Пусть* $1 \leqslant p < r < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. *Тогда для любого символа* $\psi \in \Psi^{\tau\, \upsilon\, \mathfrak{K} m}_{\varepsilon\, \vartheta}$ *верны оценки*

$$\sup\{\|\psi(x,D)f - \Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, L_r\| \ \mid\ f \in \mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q}\}$$
$$\lesssim_\psi \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^\sigma (\log^{\omega-1} N)^{(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})_+},$$
$$\sup\{\|\psi(x,D)f - \Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, L_r\| \ \mid\ f \in \widetilde{\mathrm{L}}^{s\,m}_{p\,q}\}$$
$$\lesssim_\psi \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^\sigma;$$

более того, найдутся символы $\psi^\star, \psi^* \in \Psi^{\tau\, \upsilon\, \mathfrak{K} m}_{\varepsilon\, \vartheta}$ *такие, что*

$$\sup\{\|\psi(x,D)f - \Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi^\star), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, L_r\| \ \mid\ f \in \mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q}\}$$
$$\asymp_{\psi^\star} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^\sigma (\log^{\omega-1} N)^{(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})_+},$$
$$\sup\{\|\psi(x,D)f - \Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi^*), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, L_r\| \ \mid\ f \in \mathrm{L}^{s\,m}_{p\,q}\}$$
$$\asymp_{\psi^*} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^\sigma$$

III. *Пусть* $1 \leqslant p, q \leqslant r = \infty$. *Тогда для любого символа* $\psi \in \Psi^{\tau\, \upsilon\, \mathfrak{K} m}_{\varepsilon\, \vartheta}$ *верны оценки*

$$\sup\{\|\psi(x,D)f - \Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, L_\infty\| \ \mid\ f \in \mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q}\}$$
$$\lesssim_\psi \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^\sigma (\log^{\omega-1} N)^{1-\frac{1}{q}},$$

и (если, кроме того, $p < \infty$*)*

$$\sup\{\|\psi(x,D)f - \Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, L_\infty\| \ \mid\ f \in \mathrm{L}^{s\,m}_{p\,q}\}$$
$$\lesssim_\psi \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^\sigma (\log^{\omega-1} N)^{1-\frac{1}{p}};$$

более того, найдутся символы $\psi^\star, \psi^* \in \Psi^{\tau\, \upsilon\, \mathfrak{K} m}_{\varepsilon\, \vartheta}$ *такие, что*

$$\sup\{\|\psi(x,D)f - \Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi^\star), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, L_\infty\| \ \mid\ f \in \mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q}\}$$
$$\asymp_{\psi^\star} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^\sigma (\log^{\omega-1} N)^{1-\frac{1}{q}},$$
$$\sup\{\|\psi(x,D)f - \Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi^*), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, L_\infty\| \ \mid\ f \in \mathrm{L}^{s\,m}_{p\,q}\}$$
$$\asymp_{\psi^*} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^\sigma (\log^{\omega-1} N)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Схема доказательства теоремы 1. Ключевыми ингридиентами доказательства теоремы 1 являются приводимые ниже теоремы 2 и 3, а также установленные ранее автором оценки поперечников Фурье классов $\mathrm{B}^{s\,m}_{pq}$ и $\mathrm{L}^{s\,m}_{pq}$ в метрике L_r [8] (см. ниже теорему 4).

Шаг 1. На этом шаге устанавливается , что ПДО $\psi(x,D)$ с символом из класса $\Psi^{\tau\, \upsilon\, \mathfrak{K} m}_{\varepsilon\, \vartheta}$ действует непрерывно из пространства $A^{s\,m}_{pq}$ в пространство $A^{s-\,m}_{pq}$, здесь $A = \{B, L\}$ в более общем контексте, нежели требуется для доказательства Теоремы 1. Именно, верна

Теорема 2. *Пусть* $s \in {\mathbb{R}_+}^n, \tau \in \mathbb{R}^n$ *такие, что* $\tau < s$; $\upsilon \in \mathbb{R}^n$; $1 \leqslant p, q, \vartheta \leqslant \infty$; $\varepsilon \in [0,1]^n$; $\mathfrak{K} \in \mathbb{N}^n$ *такой, что* $\mathfrak{K} > m$. *Пусть далее символ* $\psi \in \Psi^{\tau\, \upsilon\, \mathfrak{K} m}_{\varepsilon\, \vartheta}$. *Тогда псевдодиф-*

ференциальный оператор $\psi(x, D)$ является непрерывным из $B^{s\,m}_{pq}$ в $B^{s-\tau\,m}_{pq}$ и при $p<\infty$ из $L^{s\,m}_{pq}$ в $L^{s-\tau\,m}_{pq}$, если для каждого $\nu\in \mathrm{z}_n$ выполнено одно из следующих условий:
i) $s_\nu-\tau_\nu<\upsilon_\nu$;
ii) $s_\nu-\tau_\nu=\upsilon_\nu,\quad \varepsilon_\nu<1,\ \vartheta\leqslant q\leqslant\infty$;
iii) $s_\nu-\tau_\nu=\upsilon_\nu,\quad \varepsilon_\nu=\vartheta=q=1$.

Отметим, что в непериодическом случае с $\mathfrak{K}=(\infty,\dots,\infty),\ \tau=0$ эта теорема получена в [4].

Шаг 2. На этом (центральном в доказательстве теоремы 1) шаге устанавливается связь между погрешностью метода Υ^{lin} восстановления ПДО с символом из $\Psi^{t\,\upsilon\,\mathfrak{K}\,m}_{\varepsilon\,\vartheta}$ на классе $\mathrm{A}^{s\,m}_{pq}$ и соответствующим поперечником Фурье.

Напомним, что поперечником Фурье порядка N множества $\mathrm{F}\subset L_q$ называется величина

$$\varphi_N(\mathrm{F},L_q)=\inf_{\{g_j\}_{j=1}^N}\sup_{f\in\mathrm{F}}\|f-\sum_{j=1}^{N}\langle f,g_j\rangle g_j\,\|_q,$$

где $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\rangle$ — скалярное произведение функций и нижняя грань берется по всем ортонормированным системам $\{g_j\}_{j=1}^N\subset L_\infty$.

Теорема 3. *Пусть $s,\upsilon\in{\mathbb{R}_+}^n,\tau\in\mathbb{R}^n;\ 1\leqslant p,q,r,\vartheta\leqslant\infty$ такие, что $s-\tau=\upsilon-\mathbf{1}$, $\sigma>0$; $\varepsilon\in[0,1]^n$; $\mathfrak{K}=m+\mathbf{1}$ $(\mathbf{1}=(1,\dots,1)\in\mathbb{N}^n)$. Тогда для любого символа $\psi\in\Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K}\,m}_{\varepsilon\,\vartheta}$ верна оценка*

$$\sup\{\|\psi(x,D)f-\Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi),\mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f))\,|\,L_r\|\ \mid\ f\in\mathrm{A}^{s\,m}_{pq}\}$$
$$\lesssim{}_\psi\varphi_N(\mathrm{A}^{s-\tau\,m}_{pq},L_r)\asymp\varphi_{\sqrt{M}}(\mathrm{A}^{s-\tau\,m}_{pq},L_r).$$

Кроме того, найдется символ $\psi^\star\in\Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K}\,m}_{\varepsilon\,\vartheta}$ такой, что

$$\sup\left\{\|\psi^\star(x,D)f-\Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi^\star(\cdot,\cdot)),\mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f))\,|\,L_r\|\ \ |f\in\widetilde{\mathrm{A}}^{s\,m}_{pq}\right\}$$
$$\asymp_{\psi^\star}\varphi_N(\mathrm{A}^{s-\tau\,m}_{pq},L_r)\asymp\varphi_{\sqrt{M}}(\mathrm{A}^{s-\tau\,m}_{pq},L_r).$$

Здесь A — это B или L .

В свою очередь при доказательстве теоремы 3 важную роль играет следующий результат. Положим

$$\mathfrak{S}^\gamma_u(\mathrm{F},L_r)=\sup\left(\|\,f\ -S^{\eta,\gamma}_u(f,\,\cdot\,)\,|\,L_r\,\|\ \mid\ f\in\mathrm{F}\right).$$

Теорема 4. I. *Пусть $1\leqslant r\leqslant p\leqslant\infty$, $(p,r)\neq(\infty,\infty)$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, $s\in\mathbb{R}^n_+$. Тогда*

$$\mathfrak{S}^\gamma_u(\mathrm{B}^{s\,m}_{pq},L_r)\asymp 2^{-\varsigma u}u^{(\omega-1)(\frac{1}{p_*}-\frac{1}{q})_+};$$

если, кроме того, $1<p<\infty$, то

$$\mathfrak{S}^\gamma_u(\mathrm{L}^{s\,m}_{pq},L_r)\asymp 2^{-\varsigma u}u^{(\omega-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})_+};$$

$$\mathfrak{S}^\gamma_u(\mathrm{L}^{s\,m}_{1q},L_1)\asymp 2^{-\varsigma u}u^{(\omega-1)(1-\frac{1}{q})}.$$

II. *Пусть $1\leqslant p<r<\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, $s\in\mathbb{R}^n_+$ такой, что $\varsigma>0$. Тогда*

$$\mathfrak{S}^\gamma_u(\mathrm{B}^{s\,m}_{pq},L_r)\asymp 2^{-\varsigma u}u^{(\omega-1)(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})_+};$$

$$\mathfrak{S}^\gamma_u(\mathrm{L}^{s\,m}_{pq},L_r)\asymp 2^{-\varsigma u}.$$

III. *Пусть $1\leqslant p,q\leqslant r=\infty$, $s\in\mathbb{R}^n_+$ такой, что $\varsigma>0$. Тогда*

$$\mathfrak{S}^\gamma_u(\mathrm{B}^{s\,m}_{pq},L_\infty)\asymp 2^{-\varsigma u}u^{(\omega-1)(1-\frac{1}{q})}.$$

если, кроме того, $p<\infty$, то

$$\mathfrak{S}^\gamma_u(\mathrm{L}^{s\,m}_{pq},L_\infty)\asymp 2^{-\varsigma u}u^{(\omega-1)(1-\frac{1}{p})}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.1 из [7] (см. также Замечание 4.1 там же).

Шаг 4. Теперь (в виду теоремы 3) для получения требуемых оценок погрешности восстановления ПДО с символом из класса $\Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K}\,m}_{\varepsilon\,\vartheta}$ остается применить оценки поперечников Фурье классов $\mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q}$ и $\mathrm{L}^{s\,m}_{p\,q}$ в метрике L_r из работы [8].

Список литературы

1. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными // Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир. 1987. 696 с.
2. *Chang S.-Y.A.*, *Fefferman R.* Some recent developments in Fourier analysis and H^p-theory on product domains // Bull. Amer Math. Soc. 1985. Vol. 12. P. 1–43.
3. *Fefferman R.* Harmonic analysis on product spaces // Ann. Math. 1987. Vol. 126. P. 109–130.
4. *Yamazaki M.* Boundedness of product type pseudodifferential operators on spaces of Besov type // Math. Nachr. 1987. Vol. 188. P. 297–315.
5. *Carbery A.*, *Seeger A.* H^p and L^p variants of multiparameter Calderon-Zygmund theory // Trans. Amer Math. Soc. 1992. Vol. 334. P. 719–747.
6. *Stein E.M.* Harmonic analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1993. 716 p.
7. *Базарханов Д.Б.* Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. I // Тр. МИРАН. 2010. Т. 269. С. 8–30.
8. *Базарханов Д.Б.* Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. II // Analysis Math. 2012. Vol. 38, № 4. С. 249–289.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 57–60

Приближение функций суммами Фурье – Чебышёва и поперечники классов функций

Дж. Х. Бекназаров

Худжандский государственный университет им. Б.Гафурова, Худжанд, Таджикистан

Аннотация. В гильбертовом пространстве $L_{2,\mu}$ с весом Чебышёва $\mu(x) := (1-x^2)^{-1/2}$ найдены точные неравенства типа Джексона – Стечкина для специальной модуль непрерывности m-го порядка, получаемый рекуррентной формулой из функции Стеклова. Для некоторых классов функций вычислены точные значения различных n-поперечников.

1. В последние время появился ряд работ, в которых рассматривается задача отыскании точных констант в неравенстве типа Джексона – Стечкина на конечном отрезке действительной оси (см.,например,[1-4] и литературу в них). Здесь мы докажем точные неравенства типа Джексона – Стечкина для наилучших приближений действительных измеримых на отрезке [-1,1] функций f с весом $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$ алгебраическими полиномами степени не выше $n-1$ в гильбертовом пространстве

$$L_{2,\mu} := L_{2,\mu}[-1,1] := L_2\Big((1-x^2)^{-1/2}; [-1,1]\Big)$$

с конечной нормой

$$\|f\|_{2,\mu} := \|f\|_{L_{2,\mu}} = \left(\int\limits_{-1}^{1} \mu(x) f^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$ – множество неотрицательных чисел, $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$. Следуя работе [5] в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ рассмотрим оператор обобщенного сдвига

$$F_h f(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(x\cos h + \sqrt{1-x^2}\sin h\right) + f\left(x\cos h - \sqrt{1-x^2}\sin h\right)\right], \tag{1}$$

и введём конечные разности следующими равенствами:

$$\Delta_h^1(f;x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - E)f(x),$$

$$\Delta_h^m(f;x) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1}(f;\cdot);x) = (F_h - E)^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k}\binom{m}{k} F_{h,k} f(x),$$

где $F_{h,0}f(x) \equiv f(x)$, $F_{h,k}f(x) = F_h(F_{h,k-1}f(x))$, $k = 1,2,\ldots,m$; $m \in \mathbb{N}$ и E – единичный оператор в пространстве $L_{2,\mu}$. Для функции $f \in L_{2,\mu}$ определим её обобщённый модуль непрерывности m-го порядка, положив

$$\Omega_m(f;t)_{L_{2,\mu}} := \Omega_m(f;t)_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \sup\{\|\Delta_h^m(f;\cdot)\|_{2,\mu} : \ |h| \leqslant t\}. \tag{2}$$

Пусть далее,

$$T_0(x) = 1/\sqrt{\pi}, \quad T_k(x) = \sqrt{2/\pi}\,\cos(k \arccos x),\ k = 1,2,\ldots,$$

© Дж. Х. Бекназаров, 2016

– ортонормированная система многочленов Чебышёва первого рода в пространстве $L_{2,\mu}$. Тогда, как известно, функция $f \in L_{2,\mu}$ раскладывается в ряд Фурье – Чебышёва

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) T_k(x)$$

где

$$c_k(f) = \int_{-1}^{1} \mu(x) f(x)\, T_k(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

– её коэффициенты Фурье – Чебышёва.

Пусть теперь $\mathcal{D} = (1 - x^2)\dfrac{d^2}{dx^2} - x\dfrac{d}{dx}$ – дифференциальный оператор второго порядка. Операторы высших порядков определим рекуррентно, полагая $\mathcal{D}^r f := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1} f)$, $r \in \mathbb{N}$. Известно, что многочлены Чебышёва удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1 - x^2) T_k''(x) - x T_k'(x) + k^2 T_k(x) = 0, \tag{3}$$

а потому из (3) следуют равенства

$$\mathcal{D} T_k(x) = -k^2 T_k(x), \ldots, \mathcal{D}^r T_k(x) = (-1)^r k^{2r} T_k(x). \tag{4}$$

В [5] доказано, что для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}$, имеющей обобщённые производные в смысле Леви [6, с.172], коэффициенты Фурье – Чебышёва удовлетворяют соотношениям

$$c_k(f) = (-1)^r\, k^{-2r}\, c_k(\mathcal{D}^r f),\ k = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

$$c_k(F_h f) = (\cos kh) c_k(f),\ k = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где функция $F_h f$ – определена равенством (1).

Обозначим через $L_{2,\mu}^{(2r)} := L_{2,\mu}^{(2r)}[-1, 1]$ $(r \in \mathbb{Z}_+, L_{2,\mu}^{(0)} := L_{2,\mu})$ – множество функций $f \in L_{2,\mu}$, у которых $\mathcal{D}^r f$ принадлежит пространству $L_{2,\mu}$. Пользуясь соотношениями (4)–(6) и равенством Парсеваля, запишем обобщённый модуль непрерывности m-го порядка (см. (2)) функции $\mathcal{D}^r f$ в виде

$$\Omega_m(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu} := \sup_{|h| \leqslant t} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(f) k^{4r} (1 - \cos kh)^{2m} \right\}^{1/2}.$$

Хорошо известно, что если $\mathcal{P}_{n-1}$ – множество алгебраических полиномов степени $\leqslant n - 1$, то

$$\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} := \inf\{\|f - p_{n-1}\|_{2,\mu} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\} =$$
$$= \|f - s_{n-1}(f)\|_{2,\mu} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2},$$

где $s_{n-1}(f)$ – частная сумма порядка $n - 1$ ряда Фурье – Чебышёва функции $f \in L_{2,\mu}$, а $c_k(f)$ – её коэффициенты Фурье – Чебышёва.

В [7] доказано, что если $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leqslant 2$, $0 < h < \pi$, φ – весовая функция на отрезке $[0, h]$ (т. е. неотрицательная суммируемая не эквивалентная нулю функция на $[0, h]$), то для аппроксимационной характеристики

$$M_{n,m,r,p}(\varphi, h) = \sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu} \varphi(t) dt \right)^{1/p}},$$

выполняются неравенства

$$\{\alpha_{n,m,r,p}(\varphi, h)\}^{-1} \leqslant M_{n,m,r,p}(\varphi, h) \leqslant \{\inf_{n \leqslant k < \infty} \alpha_{k,m,r,p}(\varphi, h)\}^{-1},$$

где

$$\alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h)=\left(k^{2rp}\int\limits_0^h(1-\cos kt)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}.$$

При этом, если $\inf\limits_{n\leqslant k<\infty}\alpha_{k,m,r,p}(\varphi,h)=\alpha_{n,m,r,p}(\varphi,h)$, то имеет место равенство

$$M_{n,m,r,p}(\varphi,h)=\left(k^{2rp}\int\limits_0^h(1-\cos nt)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Непосредственным вычислением, легко доказать, что если $\varphi(t)\equiv 1$, $m,n,r\in\mathbb{N}$, $1/(2r)\leqslant p\leqslant 2$; $0<h\leqslant 3\pi/(4n)$, то

$$M_{n,m,r,p}(1,h)=\Big\{\alpha_{n,m,r,p}(1,h)\Big\}^{-1}:=\left\{n^{2rp}\int\limits_0^h(1-\cos nt)^{mp}dt\right\}^{-1/p}.$$

2. Напомним необходимые понятия и определения, используемые в дальнейшем. Пусть S – единичный шар в $L_{2,\mu}$; $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество из $L_{2,\mu}$; $\Lambda_n\subset L_{2,\mu}$ – n-мерное подпространство; $\Lambda^n\subset L_{2,\mu}$ – подпространство коразмерности n; $\mathscr{L}:L_{2,\mu}\to\Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства $L_{2,\mu}$ в Λ_n; $\mathscr{L}^{\perp}:L_{2,\mu}\to\Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования пространства $L_{2,\mu}$ на подпространство Λ_n. Величины

$$b_n(\mathfrak{M},L_{2,\mu})=\sup\left\{\sup\left\{\varepsilon>0:\ \varepsilon\mathcal{S}\cap\Lambda_{n+1}\subset\mathfrak{M}\right\}:\Lambda_{n+1}\subset L_{2,\mu}\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M},L_{2,\mu})=\inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-g\|_{2,\mu}:g\in\Lambda_n\right\}:f\in\mathfrak{M}\right\}:\Lambda_n\subset L_{2,\mu}\right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M},L_{2,\mu})=$$

$$=\inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathscr{L}f\|_{2,\mu}:f\in\mathfrak{M}\right\}:\mathscr{L}L_{2,\mu}\subset\Lambda_n\right\}:\Lambda_n\subset L_{2,\mu}\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M},L_{2,\mu})=\inf\left\{\sup\left\{\|f\|_{2,\mu}:f\in\mathfrak{M}\cap\Lambda^n\right\}:\Lambda^n\subset L_{2,\mu}\right\},$$

$$\pi_n(\mathfrak{M},L_{2,\mu})=$$

$$=\inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f-\mathscr{L}^{\perp}f\|_{2,\mu}:f\in\mathfrak{M}\Big\}:\mathscr{L}^{\perp}L_{2,\mu}\subset\Lambda_n\Big\}:\Lambda_n\subset L_{2,\mu}\Big\}$$

называют соответственно *бернштейновским*, *колмогоровским*, *линейным*, *гельфандовским*, *проекционным n-поперечниками*. Поскольку $L_{2,\mu}$ является гильбертовым пространством, то справедливы следующие соотношения между перечисленными выше n-поперечниками (см., например, [8, 9]):

$$b_n\left(\mathfrak{M};L_{2,\mu}\right)\leqslant d^n\left(\mathfrak{M};L_{2,\mu}\right)\leqslant d_n\left(\mathfrak{M};L_{2,\mu}\right)=\delta_n\left(\mathfrak{M};L_{2,\mu}\right)=\pi_n\left(\mathfrak{M};L_{2,\mu}\right).$$

Пусть Φ – произвольная возрастающая непрерывная функция, определённая на $\mathbb{R}_+$ и такая, что $\Phi(0)=0$. В дальнейшем, функцию Φ будем называть мажорантной. Обозначим через $W_{2,p}^{(2r)}(\Omega_m,\Phi)$ класс функций $f\in L_{2,\mu}^{(2r)}$, где $r,m\in\mathbb{N}$, $0<p\leqslant 2$, $0<h\leqslant\pi$, для которых выполняется неравенство

$$\int\limits_0^h\Omega_m^p(\mathcal{D}^rf;t)_{2,\mu}dt\leqslant\Phi^p(h).$$

Обозначим также

$$(\sin t)_*:=\{\sin t,\ \text{если}\ \ 0\leqslant t\leqslant\pi/2;\ 1,\ \ \text{если}\ \ t\geqslant\pi/2\}.$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $1/(2r) < p \leqslant 2$, $0 < h \leqslant \pi$ *и мажоранта* Φ *удовлетворяет условию*

$$\Phi^p(\pi/n) \int\limits_0^{nh/2} (\sin t)_*^{2mp} dt \leqslant \Phi^p(h) \int\limits_0^{\pi/2} (\sin t)^{2mp} dt. \tag{7}$$

Тогда выполняются равенства

$$\lambda_n(W_{2,p}^{(2r)}(\Omega_m, \Phi); L_{2,\mu}) = \mathscr{E}_{n-1}(W_{2,p}^{(2r)}(\Omega_m, \Phi))_{2,\mu} =$$

$$= 2^{-(m+\frac{1}{p})} n^{-2r+\frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^{\pi/2} (\sin t)^{2mp} dt \right)^{-\frac{1}{p}} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$*–любой из перечисленных выше* n *– поперечников, а*

$$\mathscr{E}_{n-1}(W_{2,p}^{(2r)}(\Omega_m, \Phi))_{2,\mu} \overset{def}{=} \sup\{\mathscr{E}_{n-1}(f_{2,\mu} : f \in W_{2,p}^{(2r)}(\Omega_m, \Phi)\}.$$

Множество мажорантных функций Φ, *для которых выполняется условие* (7), *не пусто*; *такой*, *например*, *является функция*

$$\Phi_*(t) := t^{\alpha/p}, \quad где \quad \alpha := \alpha(m,p) = \frac{\pi}{2} \left(\int\limits_0^{\pi} (\sin t)^{2mp} dt \right)^{-1},$$

поэтому

$$\lambda_n(W_{2,p}^{(2r)}(\Omega_m, \Phi_*); L_{2,\mu}) = \mathscr{E}_{n-1}(W_{2,p}^{(2r)}(\Omega_m, \Phi_*))_{2,\mu} = 2^{-m}\, \pi^{\alpha-1/p}\, \alpha^{1/p}\, n^{-2r-\alpha+\frac{1}{p}}.$$

Теорема 2. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/(2r) < p \leqslant 2$. *Если функция* Φ *при любом* $h \in (0, \pi]$ *удовлетворяет условию* (7) *теоремы 1*, *то для всех* $s = 0, 1, \cdots, r$ *справедливы равенства*

$$\sup\{\mathscr{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} : f \in W_{2,p}^{2r}(\Omega_m, \Phi)\} = 2^{-(m+\frac{1}{p})}\, n^{-2(r-s)+\frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^{\pi/2} (\sin t)^{mp} dt \right)^{-1/p} \Phi(\pi/n).$$

Список литературы

1. *Чертова Д.В.* Теоремы Джексона в пространствах L_p, $1 \leqslant p \leqslant 2$ с периодическим весом Якоби // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2009. Вып.1. С.5-27.
2. *Кук Во Тхи.* Операторы обобщённого сдвига в пространствах L_p на торе с весом Якоби и их применение // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2012. Вып. 1. С. 17–43.
3. *Иванов А.В.*, *Иванов В.И.* Теория Данкля и теорема Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 180–192.
4. *Вакарчук С.Б.* О неравенствах типа Джексона в L_2 и точных значениях n-поперечников функциональных классов // Укр. мат. вiсник. 2006. Т. 3, № 1. С. 116–133.
5. *Абилов В.А.*, *Абилова Ф.В.* Об одной квадратурной формуле // Журн. выч. мат. и мат физ. 2002. Т. 42, № 4. С. 451–458.
6. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. 480 с.
7. *Шабозов М.Ш.*, *Тухлиев К.* Неравенство Джексона – Стечкина с обобщёнными мудулями непрерывности и поперечники некоторых классов функций // Труды Института математика и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 292–308.
8. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ, 1976. 325 с.
9. *Pinkus A.* n-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer–Verlag, 1985. 292 p.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 61–64

Траектория в $\mathbb{R}^2$, наиболее удаленная от наблюдателей

В. И. Бердышев

Институт математики и механики УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук Уральского федерального университета,
Екатеринбург, Россия

Аннотация. В докладе поставлена новая экстремальная задача построения траектории движущегося объекта, наиболее удаленной от набора наблюдателей с фиксированными конусами обзора. При некоторых ограничениях на расположение наблюдателей дана характеризация оптимальной траектории.

Пусть t — объект, движущийся внутри заданного коридора $Y \subset \mathbb{R}^2$, Y является замыканием открытого односвязного множества, соединяющего заданные начальную t_* и конечную t^* точки траектории движения объекта

$$\mathcal{T} = \{t(\tau) : \ 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \ t(0) \in V(t_*), \ t(1) = V(t^*)\} \subset Y. \tag{1}$$

Множество траекторий (1) обозначим через $\mathbb{T}$. Предполагается, что задан конечный набор наблюдателей $\mathbb{S} = \{S\}$, не принадлежащих внутренности коридора $\overset{\circ}{Y}$. Каждый наблюдатель S имеет фиксированный конус обзора $K(S)$ — выпуклый открытый конус в $\mathbb{R}^2$ с вершиной S такой, что любая траектория из $\mathbb{T}$ его пересекает.

Определим расстояние от точки t до S следующим образом

$$\rho(t, S) = \begin{cases} \|t - S\| & \text{при } \ t \in K(S), \\ +\infty & \text{при } \ t \notin K(S). \end{cases}$$

Задача состоит в поиске траектории $\mathcal{T}^* \in \mathbb{T}$, реализующей максимум

$$M = M(\mathbb{S}) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}} \min\{\rho(t, S) : \ t \in \mathcal{T}, \ S \in \mathbb{S}\} = \min_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}} \{\rho(t \in \mathcal{T}^*), \ S \in \mathbb{S}\}. \tag{2}$$

Эта задача относится к проблематике, обсуждаемой в [1].

В данной работе указываются характеристические свойства оптимальных (наилучших) траекторий.

Граница $\Gamma = bdY$ множества Y разбивается на две части: левую Γ_l и правую Γ_r по отношению к объекту, движущемуся от t_* к t^* по кратчайшей траектории из $\mathbb{T}$. Наблюдателя S будем называть левым $S = S_l$ (правым S_r), если к S граница Γ_l (граница Γ_r) ближе, чем Γ_r (чем Γ_l) и обозначать $\mathbb{S}_l = \{S_l\}$, $\mathbb{S}_r = \{S_r\}$. Рассмотрим частные случаи.

I. Для левого (правого) наблюдателя S через $\mathcal{P}(\delta) = \{p\}$ обозначим множество точек $p = p(S)$, ближайших к S из правой (левой) границы и положим

$$M(S) = \rho(S, \mathcal{P}(S)). \tag{3}$$

Отметим очевидное

Исследования поддержаны Программой государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-9356.2016.1).

© В. И. Бердышев, 2016

Предложение 1. *Пусть набор $\mathbb{S}$ наблюдателей таков, что $K(S_l) \cap K(S_r) \cap Y = \varnothing$ для любых $S_l \in \mathbb{S}_l$ и $S_r \in \mathbb{S}_r$. Оптимальная траектория $\mathcal{T}^* \in \mathbb{T}$ характеризуется свойствами:*

$\mathcal{P}(S) \subset \mathcal{T}^*$ для всех S, реализующих минимум $M = \min\limits_{S \in \mathbb{S}} M(S)$,

$\rho(S, \mathcal{T}^*) \geqslant M$ для всех $S \in \mathbb{S}$. Любая траектория, содержащая части границ $K(S_l) \cap \Gamma_r$, $K(S_r) \cap \Gamma_l$ и удовлетворяющая условию $\rho(S, \mathcal{T}^*) \geqslant M$, является оптимальной.

II. Пусть $\mathbb{S} = \{S_l, S_r\}$, где пара наблюдателей $S_l,\ S_r$ такова, что $(K(S_l) \cap K(S_r)) \cap Y \neq \varnothing$. Обозначим

$$Q = \{x \in K(S_l) \cap K(S_r) \cap Y :\ \|x - S_l\| = \|x - S_r\|\}.$$

Возможны два случая: 1) $Q \neq \varnothing$, 2) $Q = \varnothing$. Любая траектория пересекает конусы $K(S),\ S \in \mathbb{S}$. Наилучшая траектория $\mathcal{T}^*$ Должна их пересекать возможно дальше от вершины S, а вне множества $\overline{K}(S_l) \bigcup \overline{K}(S_r)$ она может быть произвольной.

В случае 1 траектория, очевидно, пересекает множество $\overline{K}(S_l) \bigcap \overline{K}(S_r)$, точнее, она содержит точку $p \in p(S_l, S_r) \in Q$, реализующую минимум

$$M(S_l, S_r) = \min_{p \in \overline{K}(S_l) \bigcap \overline{K}(S_r)} \max\big\{\|S_l - p\|, \|S_r - p\|\big\} =$$

$$= \max\big\{\|S_l - p(S_l, S_r)\|, \|S_r - p(S_l, S_r)\|\big\}. \tag{4}$$

Далее будет удобно точку $p = p(S_l, S_r)$ обозначать через p' в случае 1 и через p'' в случае 2.

Замечание 1. Точка $p' = p'(S_l, S_r)$ лежит на границе одного из конусов $\overline{K}(S_l), \overline{K}(S_r)$, обозначим его вершину через $S' = S'(S_l, S_r)$, и пусть $S = S(S_l, S_r) \in \mathbb{S}$, $S \neq S'$. Для точки t из интервала (p', S') имеем

$$\rho(t, S') = +\infty, \quad \rho(t, S) > \|p' - S'\|,$$

поэтому отрезок $[p, S'] \bigcap Y$ можно включить в наилучшую траекторию $\mathcal{T}^*$. Кроме того, в $\mathcal{T}^*$ можно включить две дуги окружностей $C' = \{t \in K(S') :\ \|t - S'\| = \|p' - S'\|\}$, $C = \{t \in K(S) :\ \|t - S\| = \|p' - S\|\}$. Имеем

$$M(S_l, S_r) = \|S_l - p'\| = \|S_r - p'\|.$$

Пусть в случае 2 вершины $S'',\ S \in \mathbb{S}$ таковы, что

$$\|t - S''\| < \|t - S\| \ \forall\ t \in \overline{K}(S_l) \cap \overline{K}(S_r) \tag{5}$$

и точка $p'' = p''(S_l, S_r)$ — решение задачи (4). Тогда p'' — ближайшая к S точка из $\overline{K}(S_l) \cap \overline{K}(S_r)$, а наилучшая траектория содержит точку p'', не пересекается с $K(S_l) \cap K(S_r)$ и пересекается с $K(S'')$ возможно дальше от S'' (рис. 2). Имеем $M(S_l, S_r) = \|p'' - S''\|$.

Замечание 2. Отрезок $\{(1 - \lambda)p'' + \lambda S'' :\ \lambda \in \mathbb{R}\} \cap Y$ может быть включен в траекторию $\mathcal{T}^*$.

На рис. 1, 2 заштрихована область в окрестности точек p' и p'', где может располагаться $\mathcal{T}^*$. Точечной линией изображена возможная траектория $\mathcal{T}^*$.

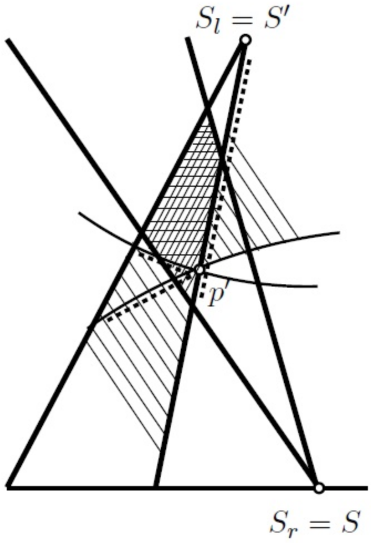


Рис. 1

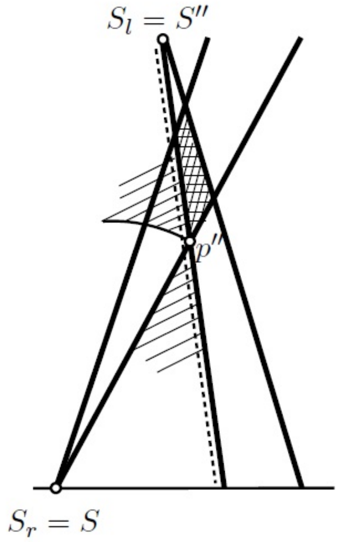


Рис. 2

Доказано

Предложение 2. *В случае* II *имеет место равенство (см.* (2), (3)*)*

$$M = \min\bigl\{M(S_l, S_r), M(S_l), M(S_r)\bigr\}.$$

Уточним обозначение точки $p = p(\cdot,\cdot)$. В случае 1 на позицию первой переменной помещаем вершину $S' \in \mathbb{S}$, для которой граница конуса $\overline{K}(S')$ содержит точку p'. В случае 2 на позиции первой переменной помещена вершина S'', для которой выполняется (5).

III. Пусть $\mathbb{S}$ — тройка наблюдателей $\mathbb{S} = \{S_1, S_2, S_3\}$, где $S_1 \in \mathbb{S}_r,\ S_2 \in \mathbb{S}_l,\ S_3 \in \mathbb{S}_l$, такая, что множества

$$K(S_1) \cap K(S_2), \quad K(S_1) \cap K(S_3)$$

непусты и не пересекаются.

Предложение 3. *Для* $\mathbb{S}$ *существует оптимальная траектория, содержащая точки* $p(S_2, S_1),\ p(S_3, S_1)$ *и*

$$M(\mathbb{S}) = \min\bigl\{M(S_2, S_1), M(S_3, S_1), M(S_1), M(S_2), M(S_3)\bigr\}. \tag{6}$$

Доказательство. Названные точки принадлежат замыканию конуса $K(S_1)$. Если обе точки имеют вид $p''(S_2, S_1),\ p''(S_3, S_1)$, то они лежат на одной стороне конуса $\overline{K}(S_1)$ и в силу замечания 2 соединяются траекторией $\mathcal{T}^*$, лежащей на этой стороне и продолжающейся вне ее по Γ_l и Γ_r. Если эти точки имеют вид $p''(S_2, S_1),\ p''(S_1, S_3)$, то они соединяются частью траектории $\mathcal{T}^*$, состоящей из отрезков границы $bdK(S_2)$, содержащей точку $p''(S_2, S_1)$, и границы $bdK(S_1)$, содержащей точку $p''(S_1, S_3)$, и, возможно, частью границы Γ_l между этими отрезками. Остальная часть траектории лежит на Γ_r. Пусть точки p имеют вид $p''(S_2, S_1),\ p'(S_1, S_3)$ и точка $q_1 \in bdK(S_1),\ q \neq p'(S_1, S_3)$ такова, что $\|q_1 - S_1\| = \|p'(S_1, S_3) - S_1\|$ и $s = \Gamma_r \cap \{(1-\lambda)S_2 + \lambda p''(S_2, S_1) :\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Тогда эти точки соединяются отрезком $[p''(S_2, S_1), q]$ и другой $(q_1, p'(S_1, S_3))$ окружности радиуса $\|q_1 - S_1\|$ с центром S_1, а остальная часть траектории включает в себя отрезки $[p''(S_2, S_1), s]$, $[p'(S_1, S_3), S_1]$ и куски границы Γ_r от t_* до s_2 и от S_1 до t^*. Пусть точки p имеют вид $p'(S_2, S_1),\ p'(S_1, S_2)$, точка q_1 определена выше, точка $q_2 \in bdK(S_2),\ q_2 \neq p'(S_2, S_1)$ такова, что $\|q_2 - S_2\| = \|p'(S_2, S_1) - S_2\|$ и $s_2' = \Gamma_r \cap \{(1-\lambda)S_2 + \lambda q_2\}$. Ввиду соотношения $(\overline{K}(S_1) \cap \overline{K}(S_3)) \cap (\overline{K}(S_1) \cap \overline{K}(S_2)) = \varnothing$ имеем $\|S_1 - p'(S_1, S_2)\| < \|S_1 - p'(S_2, S_1)\|$. Точки $p'(S_2, S_1),\ p'(S_1, S_2)$ можно соединить с помощью дуги $(q_1, p'(S_1, S_3))$ радиуса $\|q_1 - S_1\|$ с центром S_1 и отрезка $[p'(S_2, S_1), q_1]$. В траекторию $\mathcal{T}^*$ можно включить дугу $(q_2, p'(S_2, S_1))$ радиуса $\|q_2 - S_2\|$ с центром S_2, отрезки $[q_2, s_2']$, $[p'(S_1, S_3), S_1]$ и куски границы Γ_r от t_* до s_2', и от S_1 до t^*. Равенство (6) обеспечивается способом построения траектории $\mathcal{T}^*$. Предложение установлено.

Замечание 3. Наилучшая траектория $\mathcal{T}^*$ не обязана содержать все точки $p(S_i, S_j)$, $S_i \in \mathbb{S}_l$, $S_j \in \mathbb{S}_r$. Существует пример набора $\mathbb{S}$, для которого $\mathcal{T}^*$ не может пройти через все такие точки.

IV. Рассмотрим случай произвольного (конечного) числа наблюдателей. Естественно требование расположить их экономно в определенном смысле, в частности, ограничить сверху кратность покрытия коридора Y множественными $K(S_i)$, $S \in \mathbb{S}$. Будем считать, что

$$(K(S_i) \cap K(S_j)) \cap Y = \varnothing \;\text{ для }\; S_i, S_j \in \mathbb{S}_l \;\text{ и для }\; S_i, S_j \in \mathbb{S}_r. \tag{7}$$

Ясно, что группа наблюдателей, расположенных на одном «берегу», например, на Γ_l, обеспечивает более полное покрытие в зоне Γ_r, чем вблизи Γ_l. Поэтому на обоих «берегах» должно быть (с учетом раствора конусов $K(S)$) примерно одинаковое число наблюдателей. Ради удобства будем считать, что наблюдатели располагаются на границах Γ_l, Γ_r и нумеровать их в порядке от t_* к t^* посредством верхних индексов для левой границы и нижних индексов для правой. Итак, имеем набор конусов $K(S^i)$, $S^i \in \mathbb{S}_l$, $K(S_j)$, $S_j \in \mathbb{S}_r$.

Имеет место

Теорема. *Справедливо равенство*

$$M(\mathbb{S}) = \min\left\{M(S^i, S_j), M(S^i), M(S_j):\; S^i \in \mathbb{S}_l,\; S_j \in \mathbb{S}_r\right\}.$$

Наилучшая траектория $\mathcal{T}^* \in \mathbb{T}$ характеризуется свойствами:

$\mathcal{T}^*$ содержит точки $p(S^i), p(S_j)$ для всех одиночных наблюдателей S^i, S_j и всех пар (S^i, S_j) наблюдателей, реализующих минимумов (7),

$\rho(S, \mathcal{T}^*) \geqslant M$ для всех $S \in \mathbb{S}$.

Существует наилучшая траектория, содержащая все точки $p(S^i, S_j)$: $S^i \in \mathbb{S}_l$, $S_j \in \mathbb{S}_r$.

Список литературы

1. *Бердышев В.И., Костоусов В.Б.* Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям. – Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН. 2007. 270 с.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 65–72

О задаче Турана для положительно определённых ℓ_1-радиальных функций

Е. Е. Бердышева[1], Х. Беренс[2]

[1] *Justus-Liebig University Giessen, Giessen, Germany*
[2] *University of Erlangen-Nuremberg, Germany*

Аннотация. Задача Турана в общем случае может быть сформулирована следующим образом. Пусть Ω есть замкнутое множество в $\mathbb{R}^d$, симметричное относительно нуля. Рассмотрим класс непрерывных положительно определенных функций f с носителем во множестве Ω, нормированных условием $f(0) = 1$. Задача состоит в вычислении супремума интегралов $\int\limits_\Omega f$ на классе таких функций f.

Мы называем эту задачу и ее вариант для тригонометрических рядов задачей Турана. P. Turan сформулировал ее в одномерном случае для тригонометрических рядов в начале 1970-х годов в разговоре с С.Б. Стечкиным. Позже выяснилось, что аналогичная задача для тригонометрических интегралов в одномерном случае была решена уже в 1945 г. R.P. Boas, Jr. и M. Kac. Более того, задача Турана для интегралов для функций на $\mathbb{R}^d$ с носителем в шаре была решена уже в 1930-х годах C.L. Siegel. Точное решение задачи Турана известно лишь в небольшом числе случаев. Задача Турана и родственные ей задачи имеют приложения в различных разделах математики, в оптике, статистике.

Задача Турана для функций с носителем в шаре была независимо решена другим методом Д.В. Горбачевым. Оба автора сначала заметили, что достаточно рассмотреть задачу для радиальных функций (функций, значение которых в точке $x \in \mathbb{R}^d$ зависит только от $\|x\|_2$).

В данном докладе изучается задача Турана для положительно определенных функций с носителем в ℓ_1-шаре радиуса π, удовлетворяющих условию ℓ_1-радиальности ($f(x) = \varphi(\|x\|_1)$ с некоторой функцией φ, заданной на $[0, \infty)$). Теория гармонического анализа ℓ_1-радиальных функций была разработана H. Berens и Y. Xu.

Точно решить задачу не удалось. Для всех размерностей мы получили оценку снизу в терминах кратно монотонных функций. Для получения оценки сверху сформулирована так называемая дискретная задача Турана для рядов. Эту задачу удалось решить для размерностей 2,3,5 и 7. Большую роль в изучении дискретной задачи играют свойства монотонности функции Бесселя.

1. Введение. В данной статье представлены результаты наших работ [3–5], посвященных изучению задачи Турана для положительно определенных ℓ_1-радиальных функций с носителем в шаре пространства ℓ_1 на $\mathbb{R}^d$. Мы также формулируем несколько открытых задач.

В общем случае задача Турана может быть сформулирована следующим образом. Пусть Ω есть замкнутое множество в $\mathbb{R}^d$, симметричное относительно нуля. Рассмотрим класс непрерывных положительно определенных функций f с носителем во множестве Ω, нормированных условием $f(0) = 1$. Задача состоит в вычислении супремума интегралов $\int\limits_\Omega f$ на классе таких функции f.

Мы называем эту задачу и ее вариант для тригонометрических рядов задачей Турана. P. Turán сформулировал её (в одномерном случае для тригонометрических рядов) в начале 1970-х годов в разговоре с С.Б. Стечкиным. Вскоре С.Б. Стечкин опубликовал работу

© Е. Е. Бердышева, Х. Беренс, 2016

[13] на эту тему, в которой он представил решение задачи Турана для тригонометрических рядов в случае $\Omega = \left[-\frac{2\pi}{N}, \frac{2\pi}{N}\right]$, $N \in \mathbb{N}$. Позже выяснилось, что аналогичная задача для тригонометрических интегралов в одномерном случае была решена уже в 1945 году R.P. Boas, Jr. и M. Kac [9]. Более того, задача Турана для интегралов для функций на $\mathbb{R}^d$ с носителем в шаре была решена еще в 1930-х годах C.L. Siegel [12] в связи с обсуждением теоремы Минковского о точках решетки. В некоторых случаях задача Стечкина может быть сведена к задачам классической теории рядов Фурье, рассмотренных C. Carathéodory и L. Fejér. Исторический обзор, факты о связи с другими задачами и информация о случаях, когда точное решение задачи Турана известно, могут быть найдены в обзорной части статьи Sz. Révész [11]. Заметим еще, что задача Турана и родственные ей задачи имеют приложения как в математике (изучение сферических упаковок, теория чисел, теория целых функций), так и в других отраслях (оптика, радиолокационная инженерия, статистика).

Как было упомянуто выше, задача Турана на пространстве $\mathbb{R}^d$ для функций с носителем в евклидовом шаре была решена C.L. Siegel [12]; этот результат был независимо получен другим методом Д.В. Горбачевым [10]. Оба автора сначала заметили, что достаточно рассматривать только радиальные функции (функции f, для которых значение $f(x)$ в точке $x \in \mathbb{R}^d$ зависит только от $\|x\|_2$), а потом решили соответствующую задачу для радиальных функций. Кроме того, Д.В. Горбачев использовал известные результаты I. Schoenberg о гармоническом анализе радиальных функций: преобразование Фурье радиальной функции также является радиальной функцией, при этом функция и ее преобразование Фурье связаны так называемым интегральным преобразованием Фурье–Бесселя.

Эти результаты мотивировали нас заняться задачей Турана для классов ℓ_p-радиальных функций, т. е. когда значение $f(x)$ функции f в точке $x \in \mathbb{R}^d$ зависит только от $\|x\|_p$. Так как при $p > 2$ положительно определенных ℓ_p-радиальных функций не существует, задачу имеет смысл рассматривать только при $1 \leqslant p \leqslant 2$. При этом случай $p = 1$ представляется более простым в сравнении с $1 < p < 2$, и мы начали с рассмотрения ℓ_1-радиальных функций. Однако и в этом случае полностью решить задачу пока не удалось.

2. Гармонический анализ $\boldsymbol{\ell_1}$-радиальных функций. Для функции $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ее преобразование Фурье определим формулой

$$\widehat{f}(v) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-ixv} f(x)\, dx, \quad v \in \mathbb{R}^d.$$

Теория гармонического анализа для ℓ_1-радиальных функций представлена H. Berens и Y. Xu в работе [7]. Если $f(x) = \varphi(\|x\|_1)$, $x \in \mathbb{R}^d$, где φ – функция, заданная на полуоси $[0,\infty)$, то ее преобразование Фурье уже не будет ℓ_1-радиальным (и вообще не будет радиальным, хотя некоторые соотношения симметрии для него выполняются). Однако преобразование Фурье функции f может быть пересчитано из функции ψ, заданной следующим образом:

$$\psi(\sigma) = 2 \int\limits_0^\infty \rho^{d-1} \varphi(\rho)\, h_d(\sigma\rho)\, d\rho, \quad \sigma \in [0,\infty), \tag{1}$$

где ядро h_d заданно формулами $h_1(\xi) = \cos\xi$ и для $d \in \mathbb{N}$

$$h_{d+1}(\xi) = \frac{d}{\xi^d} \int\limits_0^\xi \tau^d\, h_d(\tau)\, \frac{d\tau}{\tau} + h_d(\xi), \quad \xi \in [0,\infty).$$

Интегральное преобразование (1) имеет обратное преобразование

$$\varphi(\rho) = 2\int_0^\infty \sigma^{d-1}\psi(\sigma)\, m_d(\sigma\rho)\, d\sigma, \quad \rho \in [0,\infty), \tag{2}$$

где $2\pi\, m_1(\xi) = \cos\xi$, $2\pi\, m_2(\xi) = \int_\xi^\infty \sin\tau\, \frac{d\tau}{\tau}$ и для $d \in \mathbb{N}$

$$m_{d+2}(\xi) = \xi^d \int_\xi^\infty \frac{1}{t^{2d}} \left(\int_0^t \tau^d\, m_d(\tau)\, \frac{d\tau}{\tau} \right) \frac{dt}{t}, \quad \xi \in [0,\infty).$$

Мы будем называть преобразования (1) и (2) h_d- и m_d-преобразованием. Имеет место следующее утверждение. Пусть $M_n(u|x_0,\ldots,x_n) = [x_0,\ldots,x_n]\left\{\frac{(\cdot-u)_+^{n-1}}{(n-1)!}\right\}$ есть B-сплайн порядка n с узлами $x_0,\ldots,x_n$; здесь $[x_0,\ldots,x_n]g$ обозначает n-ую разделенную разность функции g.

Теорема A ([7]). *Пусть φ – функция, заданная на полуоси $[0,\infty)$, такая, что $f(v) = \varphi(\|v\|_1) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, и пусть ψ – h_d-преобразование функции φ. Тогда*

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^\infty \psi(\sqrt{u}\,)\, M_{d-1}(u|x_1^2,\ldots,x_d^2)\, du, \quad x = (x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}^d. \tag{3}$$

W. zu Castell [6] получил представления ядер h_d и m_d в терминах обобщенных гипергеометрических функций:

$$h_d(\xi) = 2^{d-1}\, {}_1F_2\left[\begin{matrix} d \\ \frac{d}{2}, \frac{d+1}{2} \end{matrix} \middle| -\frac{\xi^2}{4}\right], \quad \xi \in [0,\infty),$$

$$m_d(\xi) = \frac{1}{2^d\,\Gamma^2\left(\frac{d}{2}\right)}\, {}_1F_2\left[\begin{matrix} -\frac{d-2}{2} \\ \frac{1}{2}, \frac{d}{2} \end{matrix} \middle| -\frac{\xi^2}{4}\right] - \frac{\xi}{2^d\,\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}\, {}_1F_2\left[\begin{matrix} -\frac{d-3}{2} \\ \frac{3}{2}, \frac{d+1}{2} \end{matrix} \middle| -\frac{\xi^2}{4}\right], \ \xi \in [0,\infty).$$

Ядра h_d и m_d ограниченны на полуоси их значениями в нуле $h_d(0) = 2^{d-1}$ и $m_d(0)$, причем $m_{d+2}(0) = \frac{1}{d^2}m_d(0)$, где $m_1(0) = \frac{1}{2\pi}$ и $m_2(0) = \frac{1}{4}$, см. [7]. Более того, для них верны асимптотические соотношения

$$h_d(\xi) = \cos\xi + \binom{d}{2}\frac{\sin\xi}{\xi} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\xi^2}\right), \quad \xi \to \infty,$$

$$2\pi\, m_d(\xi) = \frac{\cos\xi}{\xi^{d-1}} + \binom{d}{2}\frac{\sin\xi}{\xi^d} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\xi^{d+1}}\right), \quad \xi \to \infty.$$

Ядра h_d и m_d также связаны со сферической функцией Бесселя $j_{d-2}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}}\ J_{d-\frac{3}{2}}(\xi)$, где J_ν обозначает функцию Бесселя первого рода порядка ν. Первое утверждение следующей теоремы было доказано в [7], а второе – в [4].

Теорема B ([7], [4]). *Для $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 2$ и $\xi \in [0,\infty)$ имеют место следующие утверждения*:

$$\frac{1}{(d-2)!}\int_0^\xi (\xi-\tau)^{d-2}\,\tau^{d-1}\, h_d(\tau)\, d\tau = \xi^d\, j_{d-2}(\xi),$$

$$2\pi\,\xi^{d-1}\, m_d^{(d-1)}(\xi) = (-1)^{d-1}\,\xi\, j_{d-2}(\xi).$$

3. Задача Турана для ℓ_1-радиальных функций. Мы рассматриваем следующую спецификацию задачи Турана. Рассмотрим класс непрерывных, положительно определенных функций f на $\mathbb{R}^d$ с носителем в ℓ_1-шаре радиуса π, нормированных условием $f(0)=1$ и удовлетворяющих дополнительному свойству ℓ_1-радиальности, т. е. $f(x)=\varphi(\|x\|_1)$ с некоторой функцией φ, заданной на $[0,\infty)$. Требуется найти супремум интегралов $\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx$ на описанном выше классе.

Ясно, что $\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx$ может быть выражен через интеграл функции φ на полуоси. Из (3) следует, что функция f из описанного выше класса является положительно определенной тогда и только тогда, когда $\psi(\sigma)\geqslant 0$, $\sigma\in[0,\infty)$. Таким образом, рассматриваемая нами задача Турана может быть переформулирована в терминах функций φ и ψ в следующей форме:

Задача 1. *Рассмотрим класс функции*

$$\mathcal{K}_\pi^{(d)}=\{\varphi\in C([0,\infty)):\varphi(0)=1,\ \operatorname{supp}\varphi\subseteq[0,\pi] \text{ и } \psi(\sigma)\geqslant 0,\ \sigma\in[0,\infty)\}\,.$$

Найти

$$\kappa_\pi^{(d)}=\sup_{\varphi\in\mathcal{K}_\pi^{(d)}} 2\int\limits_0^\pi u^{d-1}\varphi(u)\,du. \tag{4}$$

В одномерном случае $d=1$ задача (4) решена R.P. Boas, Jr. и M. Kac [9]; условие ℓ_1-радиальности при $d=1$ означает только, что функция f является четной. Задача Турана для положительно определенных функций с носителем в ℓ_1-шаре без условия ℓ_1-радиальности при $d\geqslant 3$, насколько нам известно, не решена. В случае $d=2$ решение задачи Турана для функции с носителем в ℓ_1-шаре без условия ℓ_1-радиальности было получено Н.Н. Андреевым [2]. При этом экстремальное значение равно $\pi^2/2$ и экстремальной является функция $f_0(x_1,x_2)=\frac{(\pi-|x_1+x_2|)_+\,(\pi-|x_1-x_2|)_+}{\pi^2}$. Эта функция не является ℓ_1-радиальной. Мы предполагаем, что задачи Турана для функции с носителем в ℓ_1-шаре без условия ℓ_1-радиальности и с условием ℓ_1-радиальности при $d\geqslant 2$ различаются.

Нам удалось решить задачу типа (4) на следующем подклассе. Рассмотрим класс функций

$${}_0\mathcal{K}_\pi^{(d)}=\{\varphi\in C([0,\infty)):\ \varphi(0)=1,\ \operatorname{supp}\varphi\subseteq[0,\pi],\ \varphi \text{ является } 2d\text{-монотонной на } (0,\infty)\}\,.$$

Найти

$${}_0\kappa_\pi^{(d)}=\sup_{\varphi\in{}_0\mathcal{K}_\pi^{(d)}} 2\int\limits_0^\pi u^{d-1}\varphi(u)\,du.$$

Напомним, что функция g называется n-монотонной на $(0,\infty)$, если функции $(-1)^k\,g^{(k)}$ являются положительными, невозрастающими и выпуклыми на $(0,\infty)$ для значений $k=0,\dots,n-2$. Вложение ${}_0\mathcal{K}_\pi^{(d)}\subseteq\mathcal{K}_\pi^{(d)}$ было доказано в [7].

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_0(u)=(1-\frac{u}{\pi})_+^{\;2d-1}$. *Имеет место равенство*

$${}_0\kappa_\pi^{(d)}=2\int\limits_0^\pi u^{d-1}\varphi_0(u)\,du=2\pi^d B(d,2d),$$

т. е. функция φ_0 *является экстремальной в задаче* ${}_0\kappa_\pi^{(d)}$. *Более того, для любой функции* $\varphi\in{}_0\mathcal{K}_\pi^{(d)}$ *и для любого* $u\in[0,\infty)$ *выполняется поточечное неравенство* $\varphi(u)\leqslant\varphi_0(u)$.

$B(\cdot,\cdot)$ в вышеприведенном утверждении обозначает бета-функцию. Доказательство теоремы 1 основано на интегральном представлении n–монотонных функций, полученном R.E. Williamson [15].

Теорема 1 дает очевидно оценку снизу для задачи (4).

Отметим еще некоторые свойства функций из класса $\mathcal{K}_\pi^{(d)}$. Через $k_d(\xi) = \xi\, j_{d-2}(\xi)$ обозначим ядро преобразования Ханкеля.

Теорема 2. *Если $\varphi \in \mathcal{K}_\pi^{(d)}$, то φ является $(d-1)$ раз непрерывно дифференцируемой на $(0,\infty)$, для $k = 1, 2, \ldots, d-1$ функции $(0,\infty) \ni \tau \mapsto \tau^k\, \varphi^{(k)}(\tau)$ могут быть непрерывно продолжены значением нуль при $\tau = 0$, и для ее h_d-преобразования ψ имеет место соотношение*

$$\sigma^{d-1}\, \psi(\sigma) = 2 \int_0^\pi (-\tau)^{d-1}\, \varphi^{(d-1)}(\tau)\, k_d(\sigma\tau)\, d\tau, \quad \sigma \in [0,\infty),$$

а также

$$(-\tau)^{d-1}\, \varphi^{(d-1)}(\tau) = 2 \int_0^\pi \sigma^{d-1}\, \psi(\sigma)\, k_d(\sigma\tau)\, d\sigma, \quad \tau \in [0,\infty).$$

Последние два соотношения были доказаны с использованием теоремы B.

4. Дискретная задача Турана. Для получения оценки сверху в задаче (4) мы рассматриваем задачу Турана для рядов, построенных на основании интегральных h_d- и m_d-преобразований аналогично тому, как тригонометрические ряды связаны с преобразованием Фурье. Мы называем задачу Турана для рядов дискретной задачей Турана. В одномерном случае она будет совпадать с задачей для тригонометрических рядов, рассмотренной С.Б. Стечкиным [13] и дающей оценку сверху для $\kappa_\pi^{(1)}$.

Пусть $\{\lambda_{n;d}\}_{n=1}^\infty$ – положительные нули сферической функции Бесселя j_{d-2}, занумерованные в порядке возрастания. Хорошо известно (см., например, [1, (11.4.5)]) что система функций

$$k_{n;d}(t) = t\, j_{d-2}\left(\frac{\lambda_{n;d}}{\pi} t\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

является ортогональной на $[0,\pi]$, а именно, $\int\limits_0^\pi k_{\ell;d}(t)\, k_{n;d}(t)\, dt = c_{n;d}\, \delta_{\ell,n}$, $\ell, n \in \mathbb{N}$, где $c_{n;d} = \frac{\pi^3}{2}\, j_{d-1}^2(\lambda_{n;d})$, $n \in \mathbb{N}$. Более того, эта система является полной в пространстве L^2 на $[0,\pi]$.

Введем две последовательности функций на интервале $[0,\pi]$:

$$h_{n;d}(t) = h_d\left(\frac{\lambda_{n;d}}{\pi} t\right),$$

$$\begin{aligned} m_{n;d}(t) &= \frac{(-1)^{d-1}}{(d-2)!} \int_{\frac{\lambda_{n;d}}{\pi} t}^{\lambda_{n;d}} \left(\tau - \frac{\lambda_{n;d}}{\pi} t\right)^{d-2} m_d^{(d-1)}(\tau)\, d\tau \\ &= m_d\left(\frac{\lambda_{n;d}}{\pi} t\right) - \sum_{j=0}^{d-2} (-1)^j \left(\frac{\lambda_{n;d}}{\pi}\right)^j m_d^{(j)}(\lambda_{n;d})\, \frac{(\pi - t)^j}{j!}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

С помощью теоремы B можно получить следующее утверждение.

Лемма. *Система $\{h_{n;d}, m_{n;d}\}_{n=1}^\infty$ является биортогональной на $[0,\pi]$; а именно,*

$$2\pi \int_0^\pi t^{d-1}\, h_{\ell;d}(t)\, m_{n;d}(t)\; dt = C_{n;d}\, \delta_{\ell,n}, \quad C_{n;d} = \left(\frac{\pi}{\lambda_{n;d}}\right)^{d-3} c_{n;d}, \quad \ell, n \in \mathbb{N}.$$

Если $\varphi \in \mathcal{K}_\pi^{(d)}$, то

$$\varphi(t) \sim 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} A_{n;d}(\varphi)\, m_{n;d}(t), \quad t \in [0,\pi], \tag{5}$$

где

$$A_{n;d}(\varphi) = \frac{1}{C_{n;d}} \int_0^\pi t^{d-1}\, \varphi(t)\, h_{n;d}(t)\, dt = \frac{1}{C_{n;d}}\, \psi\left(\frac{\lambda_{n;d}}{\pi}\right) \geqslant 0.$$

В то же время

$$(-t)^{d-1}\, \varphi^{(d-1)}(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_{n;d}(\varphi)\, k_{n;d}(t), \quad t \in [0,\pi]. \tag{6}$$

Из теоремы 2 следует, что коэффициенты этих двух разложений связаны формулой

$$\left(\frac{\lambda_{n;d}}{\pi}\right) A_{n;d}(\varphi) = a_{n;d}(\varphi), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для размерности $d = 2$ удалось доказать, что если $\varphi \in \mathcal{K}_\pi^{(2)}$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_{n;2}(\varphi) < \infty$, т. е. сумма коэффициентов в представлении (5) конечна. Доказательство этого факта основано на лемме R.P. Boas, Jr. из [8]. Из этого следует, что ряды (5) и (6) абсолютно и равномерно сходятся. Таким образом, сужения функций φ из класса $\mathcal{K}_\pi^{(2)}$ на $[0,\pi]$ лежат в классе

$$\mathcal{A}_\pi^{(2)} = \left\{ \varphi \in C[0,\pi] : \varphi(0) = 1, \varphi(\pi) = 0 \text{ и } \varphi = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} A_{n;2}(\varphi)\, m_{n;2},\ A_{n;2}(\varphi) \geqslant 0 \right\}.$$

Величина

$$\alpha_\pi^{(2)} = \sup_{\varphi \in \mathcal{A}_\pi^{(2)}} 2 \int_0^\pi t\, \varphi(t)\, dt$$

дает оценку сверху для задачи $\kappa_\pi^{(2)}$, определенной в (4).

Открытая задача 1. *Доказать при $d \geqslant 3$, что если $\varphi \in \mathcal{K}_\pi^{(d)}$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_{n;d}(\varphi) < \infty$.*

По аналогии с двухмерным случаем рассмотрим следующую задачу, которую мы будем называть дискретной задачей Турана для биортогональной системы

$$\{h_{n;d}, m_{n;d}\}_{n=1}^{\infty}.$$

Задача 2. *Рассмотрим класс функций*

$$\mathcal{A}_\pi^{(d)} = \left\{ \varphi \in C[0,\pi] : \varphi(0) = 1, \varphi(\pi) = 0 \text{ и } \varphi = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} A_{n;d}(\varphi)\, m_{n;d},\ A_{n;d}(\varphi) \geqslant 0 \right\}.$$

Найти

$$\alpha_\pi^{(d)} = \sup_{\varphi \in \mathcal{A}_\pi^{(d)}} 2 \int_0^\pi t^{d-1} \varphi(t)\, dt. \tag{7}$$

Если $\varphi \in \mathcal{A}_\pi^{(d)}$, то из соотношения $\varphi(0) = 1$ с помощью известных свойств функции Бесселя следует, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_{n;d}(\varphi) < \infty$. Более того, можно показать, что φ является $(d-1)$ раз непрерывно дифференцируемой на $(0,\infty)$, для $k = 1, 2, \ldots, d-1$ функции $(0,\infty) \ni \tau \mapsto \tau^k\, \varphi^{(k)}(\tau)$ могут быть непрерывно продолжены значением нуль при $\tau = 0$, и

$$(-t)^{d-1}\, \varphi^{(d-1)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n;d}(\varphi)\, k_{n;d}(t), \tag{8}$$

где $a_{n;d}(\varphi) = \frac{\lambda_{n;d}}{\pi} A_{n;d}(\varphi)$, причем ряд (8) сходится абсолютно и равномерно на $[0, \pi]$.

С помощью соответствующих преобразований ряда (8) задачу (7) можно свести к следующей задаче линейного программирования: найти

$$\max\ 2\pi^d \frac{(d-1)!}{(2d-2)!} \sum_{n=1}^{\infty} A_n\ (-j'_{d-2}(\lambda_{n;d})) \tag{9}$$

$$\text{при условиях} \quad A_n \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{(d-2)!} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{\lambda_{n;d}} j_{d-2}(\tau)\, d\tau = 1.$$

Задачу (9), и тем самым задачу (7), удалось решить для размерностей $d = 2, 3, 5, 7$ (случай размерности $d = 1$ вытекает из результата R. P. Boas, Jr. и M. Kac [9]). Наш основной результат приведен в следующем утверждении.

Теорема 3. *Пусть $d = 2, 3, 5$ или 7. В этом случае*

$$\alpha_\pi^{(d)} = 2\pi^d \frac{(d-1)!(d-2)!}{(2d-2)!} \frac{\big(-j'_{d-2}(\lambda_{1;d})\big)}{\int_0^{\lambda_{1;d}} j_{d-2}(\tau)\, d\tau}$$

и функция

$$\varphi^*(t) = 2\pi \frac{(d-2)!}{\int_0^{\lambda_{1;d}} j_{d-2}(\tau)\, d\tau} m_{1;d}(t)$$

является единственным решением задачи (7).

Открытая задача 2. Решить дискретную задачу Турана (7) для размерностей $d = 4$, $d = 6$ и $d \geqslant 8$.

Решение задачи (9) для размерностей $d = 2, 3, 5$ и 7 основано на свойстве монотонности сферической функции Бесселя:

Теорема 4. *Пусть $d = 2, 3, 5$ или 7. В этом случае*

$$\frac{\big(-j'_{d-2}(\lambda_{2k+1;d})\big)}{\int_0^{\lambda_{2k+1;d}} j_{d-2}(\tau)\, d\tau} < \frac{\big(-j'_{d-2}(\lambda_{2k-1;d})\big)}{\int_0^{\lambda_{2k-1;d}} j_{d-2}(\tau)\, d\tau}, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Свойство (10) относится к типу свойств монотонности для функции Бесселя, которые изучались R.G. Cooke, E. Makai, M.E. Muldoon и другими. Это свойство было доказано нами с помощью рассуждении, следующих схеме Сонина (см. [14]). К настоящему времени уже понятно, что неравенство (10) не выполняется для высоких размерностей и маленьких значении k. Скорее всего, оно будет верно в любой размерности, начиная с некоторого значения k. Это максимальное значение и будет давать решение дискретной задачи Турана (7).

Открытая задача 3. *Найти*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\big(-j'_{d-2}(\lambda_{n;d})\big)}{\int_0^{\lambda_{n;d}} j_{d-2}(\tau)\, d\tau}$$

для размерностей $d = 4$, $d = 6$ и $d \geqslant 8$.

Список литературы

1. *Abramowitz M.*, *Stegun I.* Handbook of Mathematical Functions. – N.Y.: Dover Publ. Inc., 1970.
2. *Андреев Н.Н.*, Экстремальные задачи для периодических функций с малым носителем // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1997. № 1. С.29–32. Перевод: Mosc. Univ. Math. Bull. 1997. Vol. 52, № 1. P. 29–32.
3. *Berdysheva E.E.*, *Berens H.* Über ein Turánsches Problem für ℓ-1 radiale, positiv definite Funktionen // Result. Math. 2005. 47. S. 17–32.
4. *Berdysheva E.E.*, *Berens H.*, Über ein Turánsches Problem für ℓ-1 radiale, positiv definite Funktionen, II // J. Approx. Theory. 2009. Vol. 16. P. 71–88.
5. *Berdysheva E.E.*, *Berens H.*, On a discrete Turán problem for ℓ-1 radial functions // In: *New Perspectives on Approximation and Sampling Theory – Festschrift in honor of Paul Butzer's 85th birthday* (G. Schmeisser and A. Zayed, Eds.), Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhaeuser. 2014. P. 447–468.
6. *Berens H.*, *zu Castell W.*, Hypergeometric functions as a tool for summability of the Fourier integral // Result. Math. 1998. Vol. 34. P. 69–84.
7. *Berens H.*, *Xu Y.*, ℓ-1 summability of multiple Fourier integral and positivity // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1997. Vol. 122. P. 149–172.
8. *Boas*, *Jr. R.P.* Fourier series with positive coefficients // J. Math. Anal. Appl. 1967. Vol. 17. P. 463–483.
9. *Boas*, *Jr. R.P.*, *Kac*, *M.*, Inequalities for Fourier transforms of positive functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12. P. 189–206.
10. *Горбачев Д.В.* Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре // Матем. заметки, 2001. Т. 69, № 3. С. 346–352. Перевод: An extremal problem for periodic functions with supports in the ball // Math. Notes. 2001. Vol. 69, № 3. P. 313–319.
11. *Révész Sz.Gy.*, Turán's extremal problem on locally compact Abelian groups // Anal. Math. 2011. Vol. 37, № 1. P. 15–50.
12. *Siegel C.L.*, Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und damit zusammenhängendes Extremalproblem // Acta Math. 1935. Vol. 65. P. 307–323.
13. *Stechkin S.B.*, Одна экстремальная задача для тригонометрических рядов с неотрицательными коэффициентами // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1972. Vol. 23, № 3–4. P. 289–291.
14. *Watson G.N.*, A Treatise on the Theory of Bessel Functions. – Cambridge: Cambidge Univ. Press, 1922.
15. *Williamson R.E.*, Multiply monotone functions and their Laplace transforms // Duke Math. J. 1956. Vol. 23. P. 189–207.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 73–77

Точные константы в неравенствах типа Джексона – Стечкина для наилучшей среднеквадратической аппроксимации целыми функциями экспоненциального типа в пространстве $L_2(\mathbb{R})$

С. Б. Вакарчук

Днепропетровский университет имени Альфреда Нобеля, Днепр, Украина

Аннотация. З.Дитцианом и В.Тотиком для функций $f \in L_p(D)$, $1 \leqslant p < \infty$, $D = (a, b)$, была рассмотрена характеристика гладкости $\omega_\varphi^{*k}(f, t)_p$, $k \in \mathbb{N}$, которая при $p = 2$, $\varphi(x) \equiv 1$, $D = (-\infty, \infty)$ принимает следующий вид: $\Lambda_k(f, t)_2 = \left\{(1/t)\int\limits_0^t \left\|\overline{\Delta}_\tau^k f\right\|_2^2 d\tau\right\}^{1/2}$, $t > 0$. На классах $L_2^r(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $L_2^0(\mathbb{R}) \equiv L_2(\mathbb{R})$, получены точные константы в неравенствах типа Джексона – Стечкина для $\Lambda_k(f)_2$ в случае наилучшей среднеквадратической аппроксимации целыми функциями экспоненциального типа в $L_2(\mathbb{R})$. Также найдены точные значения средних ν-поперечников классов функций, определенных при помощи $\Lambda_k(f)_2$ и мажорант, которые удовлетворяют ряду условий.

Начало исследованиям, связанным с аппроксимацией функций, заданных на всей вещественной оси, было заложено С.Н.Бернштейном в его работе [1]. При этом средством приближения служили целые функции конечного экспоненциального типа. В дальнейшем эта тематика нашла свое отражение в работах Н. И. Ахиезера, С. М. Никольского, А. Ф. Тимана, М. Ф. Тимана, И. И. Ибрагимова, Ф. Г. Насибова, В. Ю. Попова, В. В. Арестова, А. Г. Бабенко и многих других (см., например, [2]–[11]). Перечень некоторых окончательных результатов, связанных с вычислением точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина в случае среднеквадратической аппроксимации целыми функциями экспоненциального типа на $\mathbb{R}$, можно найти, например, в статье [12]. Данное сообщение продолжает указанную тематику.

Пусть $D = (a, b)$. Отметим, что данный интервал может быть и бесконечным. В монографии З. Дитциана и В. Тотика [13] (с. 26) для функций $f \in L_p(D)$, $1 \leqslant p < \infty$, была рассмотрена следующая характеристика гладкости:

$$\omega_\varphi^{*k}(f, t)_p := \left\{\frac{1}{t}\int\limits_0^t\int\limits_D \left|\overline{\Delta}_{\tau\varphi(x)}^k f(x)\right|^p dx d\tau\right\}^{1/p}, \tag{1}$$

где $t > 0$; функция φ определена на множестве D и удовлетворяет требованиям, изложенным в пункте 1.2 из [13];

$$\overline{\Delta}_{\tau\varphi(x)}^k f(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} f(x + (k-j)\tau\varphi(x))$$

© С. Б. Вакарчук, 2016

или

$$\overline{\Delta}^k_{\tau\varphi(x)} f(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f(x - j\tau\varphi(x))$$

есть прямая или обратная разность функции f соответственно. Полагая в формуле (1), например, $D := (-\infty, \infty)$; $\widetilde{\varphi}(x) \equiv 1$; $p := 2$ и обозначая $\Lambda_k(f,t)_2 := \omega^{*k}_{\widetilde{\varphi}}(f,t)_2$, для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ получаем такую характеристику гладкости:

$$\Lambda_k(f,t)_2 = \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \left\| \overline{\Delta}^k_\tau f \right\|_2^2 d\tau \right\}^{1/2}. \tag{2}$$

Здесь $\|f\|_2 = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$. Отметим, что в случае 2π-периодических функций характеристика гладкости, подобная (2), использовалась Ласло Лейндлером в пространстве $L_2([0, 2\pi])$ [14]. Всюду далее будем рассматривать величину (2).

Символом $\mathbb{B}_{\sigma,2}$, где $\sigma \in (0, \infty)$, обозначим множество сужений на $\mathbb{R}$ всех целых функций экспоненциального типа σ, которые принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R})$. Для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ величина $\mathcal{A}_\sigma(f)_2 := \inf\{\|f - g\|_2 : g \in \mathbb{B}_{\sigma,2}\}$ является наилучшим приближением f элементами множества $\mathbb{B}_{\sigma,2}$. При этом для любого класса функций $\mathfrak{M} \subset L_2(\mathbb{R})$ полагаем $\mathcal{A}_\sigma(\mathfrak{M})_2 := \sup\{\mathcal{A}_\sigma(f)_2 : f \in \mathfrak{M}\}$. Через $L_2^r(\mathbb{R})$, где $r \in \mathbb{N}$, обозначим класс функций $f \in L_2(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)} (f^{(0)} \equiv f)$ локально абсоютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R})$. Отметим, что $L_2^r(\mathbb{R})$ является банаховым пространством с нормой $\|f\|_2 + \|f^{(r)}\|_2$.

Полагаем $\operatorname{sinc}(x) := \{\sin(x)/x$, если $x \neq 0$; 1, если $x = 0\}$.

Теорема 1. *Пусть $\sigma \in (0, \infty)$; $r, k \in \mathbb{N}$; $t \in (0, \pi]$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\sigma^r \mathcal{A}_\sigma(f)_2}{\Lambda_k(f^{(r)}, t/\sigma)_2} = \left\{ \binom{2k}{k} - 2\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{2k}{k-j} \operatorname{sinc}(jt) \right\}^{-1/2}. \tag{3}$$

Например, при $t = \pi$ из (3) получаем

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\sigma^r \mathcal{A}_\sigma(f)_2}{\Lambda_k(f^{(r)}, \pi/\sigma)_2} = \frac{1}{\sqrt{\binom{2k}{k}}}.$$

Обозначим

$$\gamma_{k,r,p,x}(\varphi, u) := u^{2r} \left\{ \int_0^x \left[\frac{1}{t} \int_0^t (1 - \cos(hu))^k dh \right]^{p/2} \varphi(t) dt \right\}^{2/p}.$$

Теорема 2. *Пусть $k \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $p \in (0, 2]$; $\sigma \in (0, \infty)$; x — конечное положительное число; φ — неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, x]$ функция, которая не эквивалентна нулю. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)_2}{\left\{ \int\limits_0^x \Lambda_k^p(f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right\}^{1/p}} = 2^{-k/2} \left\{ \inf_{u \geqslant \sigma} \gamma_{k,r,p,x}(\varphi, u) \right\}^{-1/2}.$$

В случае $r = 0$ полагаем $L_2^0(\mathbb{R}) \equiv L_2(\mathbb{R})$ и верхнюю грань вычисляем по всем функциям $f \in L_2(\mathbb{R})$, которые не эквивалентны нулю.

Из данной теоремы вытекает

Следствие 1. *Пусть* $\sigma \in (0, \infty)$; $r, k \in \mathbb{N}$ $p \in [1/r, 2]$; x — *конечное положительное число*; φ — *неотрицательная дифференцируемая почти всюду на интервале* $(0, x)$ *функция, которая не эквивалентна нулю и почти для всех* $t \in (0, x)$ *удовлетворяет условию*

$$\varphi(t)(pr-1) - t\varphi'(t) \geqslant 0. \tag{4}$$

Тогда имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\sigma^r \mathcal{A}_\sigma(f)_2}{\left\{\int\limits_0^x \Lambda_k^p(f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt\right\}^{1/p}} =$$

$$= \left\{\int\limits_0^x \left[\binom{2k}{k} - 2\sum_{j=1}^k (-1)^{j+1}\binom{2k}{k-j}\operatorname{sinc}(j\sigma t)\right]^{p/2} \varphi(t) dt\right\}^{-1/p}. \tag{5}$$

Пусть, например, $\varphi(t) := t^m$, где $m \in [0, \infty)$ — произвольное число. Тогда соотношение (4) приобретает следующий вид: $p \geqslant (1+m)/r$. Поскольку $p \in [1/r, 2]$, то получаем двойное неравенство $(1+m)/r \leqslant p \leqslant 2$, которому должна удовлетворять величина p. При этом для чисел $r \in \mathbb{N}$ должно выполняться ограничение снизу $r \geqslant (1+m)/2$. Полагая, в частности, $p = 2$ и $m = 0$, имеем

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\sigma^r \mathcal{A}_\sigma(f)_2}{\left\{\int\limits_0^x \Lambda_k^2(f^{(r)}, t)_2 dt\right\}^{1/2}} = \left\{x\left[\binom{2k}{k} - 2\sum_{j=1}^k (-1)^{j+1}\binom{2k}{k-j}\frac{Si(j\sigma x)}{j\sigma x}\right]\right\}^{-1/2}, \tag{6}$$

где $Si(x) := \int\limits_0^x \operatorname{sinc}(t) dt$ — интегральный синус. Если, например, в формуле (6) $k = 1$, то получаем

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\sigma^{r-1/2} \mathcal{A}_\sigma(f)_2}{\left\{\int\limits_0^{\tau/\sigma} \Lambda_1^2(f^{(r)}, t)_2 dt\right\}^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2(\tau - Si(\tau))}},$$

где $\tau \in (0, \infty)$ — произвольное число.

В работах [15] – [16] Г.Г.Магарил-Ильяевым было введено определение средней размерности, которое является некоторой модификацией соответствующего понятия, введенного ранее В.М.Тихомировым. Это позволило определить асимптотические экстремальные характеристики, подобные поперечникам, где роль размерности выполняла средняя размерность. В результате этого стало возможным сравнение аппроксимативных свойств подпространств $\mathbb{B}_{\sigma,2}$, где $\sigma \in (0, \infty)$, с аналогичными свойствами иных подпространств из $L_2(\mathbb{R})$, имеющих ту же среднюю размерность, и решение в $L_2(\mathbb{R})$ целого ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций оптимизационного содержания.

Пусть $\Psi(t)$, где $t \in [0, \infty)$, есть непрерывная возрастающая функция, такая, что $\Psi(0) = 0$, которую далее будем называть мажорантой. Через $W^r(\Lambda_k, \Psi)$, где $r, k \in \mathbb{N}$, а функция Ψ есть мажоранта, обозначим класс функций $f \in L_2^r(\mathbb{R})$, для каждой из которых при любом $t \in (0, \infty)$ выполняется неравенство $\Lambda_k(f^{(r)}, t)_2 \leqslant \Psi(t)$.

Теорема 3. *Пусть* $r, k \in \mathbb{N}$; $\nu \in (0, \infty)$ — *произвольное число;* Ψ — *мажоранта, удовлетворяющая условию*

$$\frac{\Psi^2(t)}{\Psi^2(\pi/\sigma)} \geqslant \frac{2^k}{\binom{2k}{k}\sigma t}\int\limits_0^{\sigma t}(1-\cos h)^k dh \tag{7}$$

при любых значениях $t \in (0,\infty)$ и $\sigma \in (\nu\pi,\infty)$. Тогда имеют место следующие равенства:

$$\overline{\Pi}_\nu(W^r(\Lambda_k,\Psi);L_2(\mathbb{R})) = \mathcal{A}_{\nu\pi}(W^r(\Lambda_k,\Psi)) = \sup\{\|f-\mathfrak{L}_{\nu\pi}(f)\|_2 : f\in W^r(\Lambda_k,\Psi)\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{\binom{2k}{k}}\,(\pi\nu)^r}\Psi\left(\frac{1}{\nu}\right),$$

где $\overline{\Pi}_\nu(\cdot)$ — любой из средних ν-поперечников: колмогоровский $\overline{d}_\nu(\cdot)$, линейный $\overline{\delta}_\nu(\cdot)$, бернштейновский $\overline{b}_\nu(\cdot)$. При этом пара $(L_2^r(\mathbb{R}),\mathfrak{L}_{\nu\pi})$, где $\mathfrak{L}_{\nu\pi}(f,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\nu\pi}^{\nu\pi}\mathfrak{F}(f,t)e^{ixt}dt$; $\mathfrak{F}(f)$ — преобразование Фурье функции $f\in L_2(\mathbb{R})$, является экстремальной для среднего линейного ν-поперечника $\overline{\delta}_\nu(W^r(\Lambda_k,\Psi);L_2(\mathbb{R}))$, а подпространство $\mathbb{B}_{\nu\pi,2}$ будет экстремальным для среднего колмогоровского ν-поперечника $\overline{d}_\nu(W^r(\Lambda_k,\Psi);L_2(\mathbb{R}))$. Множество мажорант, удовлетворяющих условию (7), не пусто.

Через $\widetilde{\mathcal{W}}_p^r(\Lambda_k,\Psi)$, где $r,k\in\mathbb{N}$; $p\in(0,2]$; Ψ — мажоранта, обозначим класс функций $f\in L_2^r(\mathbb{R})$, для производных r-го порядка $f^{(r)}$ которых выполняется условие $\int\limits_0^x \Lambda_k^p(f^{(r)},t)_2dt \leqslant \Psi^p(x)$ для любого $x\in(0,\infty)$.

Теорема 4. *Пусть $r\in\mathbb{N}$; $k=1$; $\nu\in(0,\infty)$ — произвольное число; $p\in[1/r,2]$; Ψ — мажоранта, удовлетворяющая условию*

$$\frac{\Psi^p(t)}{\Psi^p(\pi/\sigma)} \geqslant \frac{\int\limits_0^{\sigma t}(1-\operatorname{sinc}(h))^{p/2}dh}{\int\limits_0^{\pi}(1-\operatorname{sinc}(h))^{p/2}dh} \tag{8}$$

для произвольных значений $t\in(0,\infty)$ и $\sigma\in(\nu\pi,\infty)$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\overline{\Pi}_\nu(\widetilde{\mathcal{W}}_p^r(\Lambda_1,\Psi);L_2(\mathbb{R})) = \mathcal{A}_{\nu\pi}(\widetilde{\mathcal{W}}_p^r(\Lambda_1,\Psi)) = \sup\{\|f-\mathfrak{L}_{\nu\pi}(f)\|_2 : f\in\widetilde{\mathcal{W}}_p^r(\Lambda_1,\Psi)\} = \\ = \frac{(\nu\pi)^{1/p-r}}{\sqrt{2}}\left\{\int\limits_0^{\pi}(1-\operatorname{sinc}(h))^{p/2}dh\right\}^{-1/p}\Psi\left(\frac{1}{\nu}\right),$$

где $\overline{\Pi}_\nu(\cdot)$ — любой из рассмотренных в теореме 3 средних ν-поперечников. При этом пара $(L_2^r(\mathbb{R}),\mathfrak{L}_{\nu\pi})$ будет экстремальной для среднего линейного ν-поперечника $\overline{\delta}_\nu(\widetilde{\mathcal{W}}_p^r(\Lambda_1,\Psi);L_2(\mathbb{R}))$, подпространство $\mathbb{B}_{\nu\pi,2}$ является экстремальным для среднего колмогоровского ν-поперечника $\overline{d}_\nu(\widetilde{\mathcal{W}}_p^r(\Lambda_1,\Psi);L_2(\mathbb{R}))$, а множество мажорант, удовлетворяющих условию (8), не пусто.

В заключение отметим, что ряд результатов, связанных с вычислением точных значений средних ν-поперечников, можно найти, например, в работах [9]–[12], [15]–[17].

Список литературы

1. *Бернштейн С.Н.* О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени (1912). Собр. соч. Т. 2. – М.: АН СССР, 1952. С. 371–375.
2. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 324 с.
3. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960. 624 с.
4. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. 456 с.
5. *Ибрагимов И.И.*, *Насибов Ф.Г.* Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени // Докл. АН СССР. 1970. Т. 194, № 5. С. 1013–1016.

6. *Попов В.Ю.* О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Матем. 1972. № 6. С. 65–73.
7. *Бабенко А.Г.* Точное неравенство Джексона-Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$ // Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН. 1998. Т. 5. С. 3–7.
8. *Arestov V.V.* On Jackson inequalities for approxination in L^2 of periodic functions by trigonometric polynomials and of functions on the line by entire functions // Approxim. Theory (A volume dedicated to Borislaw Bojanov). – Sofia: Marin Drinov Academic Publihing House, 2004. P. 1–19.
9. *Вакарчук С.Б.*, *Шабозов М.Ш.*, *Лангаршоев М.Р.* О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа в $L_2(\mathbb{R})$ и средних ν-поперечниках некоторых функциональных классов // Изв. вузов. Матем. 2014. № 7. С. 30–48.
10. *Вакарчук С.Б.* Неравенства типа Джексона для специальных модулей непрерывности на всей вещественной оси и точные значения средних ν-поперечников классов функций в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ // Укр. матем. журн. 2014. Т. 66, № 6. С. 740–766.
11. *Вакарчук С.Б.* Наилучшие среднеквадратические приближения целыми функциями экспоненциального типа и средние ν-поперечники классов функций на прямой // Матем. заметки. 2014. Т. 96, № 6. С. 827–848.
12. *Vakarchuk S.B.* On some extemal problems of approximation theory of functions on the real axis. I. // J. Math. Sci. 2013. Vol. 188, № 2. P. 146–166.
13. *Ditzian Z.*, *Totik V.* Moduli of Smoothness. – New York: Springer-Verlag. 1987. 226 p.
14. *Leindler L.* Uber strukturbedingungen fur fourierreihen // Math. Zeitschr. 1965. Vol. 88. P. 418–431.
15. *Магарил-Ильяев Г.Г.* Средняя размерность, поперечники и оптимальное восстановление соболевских классов функций на прямой // Матем. сборник. 1991. Т. 182, № 11. С. 1635–1656.
16. *Магарил-Ильяев Г.Г.* Средняя размерность и поперечники классов функций на прямой // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 1. С. 35–38.
17. *Vakarchuk S.B.* On some extemal problems of approximation theory of functions on the real axis. II. // J. Math. Sci. 2013. Vol. 190, № 4. P. 613–630.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 78–81

Обусловленность систем уравнений построения сплайнов и сходимость процессов сплайн интерполяции

Ю. С. Волков

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

Аннотация. В докладе рассматривается задача построения интерполяционных полиномиальных сплайнов минимального дефекта, которая сводится к решению систем линейных уравнений. Известно, что свойства таких систем уравнений на неравномерных сетках могут существенно отличаться, наибольший интерес представляют хорошо обусловленные способы построения интерполяционных сплайнов. Исследуются методы получения систем уравнений для построения интерполяционных сплайнов, изучаются их свойства. Показана связь обусловленности систем с вопросами сходимости процессов интерполяции для производных.

Мы рассматриваем задачу интерполяции заданного набора значений некоторой функции полиномиальным сплайном минимального дефекта. В самом общем случае мы имеем сетку узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_N = b$ отрезка $[a, b]$, в узлах которой известны значения $f_i = f(x_i)$ некоторой функции $f(x)$. И есть ещё одна сетка $\delta : -\infty < \xi_1 < \ldots < \xi < \ldots < \xi_{N-n} < +\infty$, сетка узлов сплайна $s(x)$ степени n, интерполирующего заданные значения. Можно допустить и совпадение некоторых узлов сетки Δ, что будет означать задание со значениями функции и производных. Такие кратные узлы часто используются на краях отрезка $[a, b]$ (краевые условия).

Известен результат Шёнберга и Уитни (см. [1, с.27]) по взаимному расположению узлов этих сеток для разрешимости задачи интерполяции.

Теорема. *Для того, чтобы существовал единственный интерполяционный сплайн $s(x)$, удовлетворяющий условиям*

$$s(x_i) = f_i, \quad i = 0, \ldots, N,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$x_{i-1} < \xi_i < x_{i+n}, \quad i = 1, \ldots, N - n.$$

Итерполяционный сплайн является нелокальным, и его построение заключается в нахождении каких-либо параметров сплайна, через которые можно выразить сам сплайн и его производные. Задача вычисления таких параметров сводится к решению системы линейных уравнений. От выбора параметров сплайна зависят свойства получаемых систем уравнений.

Самый простой способ взять в качестве параметров коэффициенты разложения искомого сплайна $s(x)$ по B-сплайнам степени n с узлами на сетке δ. Однако хорошо

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-07-07530).

© Ю. С. Волков, 2016

известно, что даже для сплайнов невысоких степеней (второй и третьей степени) на сильно неравномерных сетках такие системы уравнений могут быть плохо обусловленными [1], [2]. Наиболее хорошо изучены случаи взаимного расположения узлов сеток Δ и δ для сплайнов четной степени узлы сеток совпадают (на краях кратные узлы), а для сплайнов чётной стпени узлы одной из сеток лежат посередине между узлами другой сетки (сплайны по Субботину и по Марсдену). В этих классических случаях хорошо обусловленные системы линейных уравнений получаются (для параболических и кубических сплайнов), если в качестве параметров выбирать значения первой или второй производных в узлах интерполяции причём даже на произвольно неравномерных сетках.

В общей задаче произвольного взаиморасположения узлов сеток выбор в качестве параметров каких-либо узловых значений производных приводит к трудно разрешимой задаче даже для сплайнов невысоких степеней. Мы предлагаем в качестве определяемых параметров выбирать коэффициенты разложения какой-либо производной (например, порядка k) интерполяционного сплайна $s(x)$, являющейся сплайном уже степени $n-k$, по B-сплайнам степени $n-k$ с узлами на сетке δ.

Напомним, B-сплайном степени $r-1$ (порядка r) на сетке δ называется сплайн с наименьшим носителем, а именно с носителем из r интервалов сетки. Такой сплайн для конкретного носителя определяется однозначно с точностью до нормирующего множителя. Распространены B-сплайны с двумя нормировками

$$N_{i,r}(x) = (\xi_{i+r} - \xi_i)(\cdot - x)_+{}^{r-1}[\xi_i, \ldots, \xi_{i+r}], \qquad M_{i,r}(x) = \frac{r}{\xi_{i+r} - \xi_i} N_{i,r}(x).$$

Здесь $g[\xi_i, \ldots, \xi_{i+r}]$ означает разделённую разность r-го порядка от функции g по точкам $\xi_i, \ldots, \xi_{i+r}$ разбиения δ. Выбор таких нормировок обусловнен свойствами

$$\sum_{j=i-r+1}^{i} N_{j,r}(x) \equiv 1, \quad \text{для } x \in [t_i, t_{i+1}]; \qquad \int\limits_{t_i}^{t_{i+r}} M_{i,r}(\tau)\, d\tau = 1,$$

которые послужили основанием для названий L_∞-*нормализованные* (или просто *нормализованные*) для B-сплайнов $N_{i,r}$ и, соответственно, L_1-*нормализованные* для $M_{i,r}$.

Мы привели определение B-сплайнов на сетке δ, в дальнейшем мы будем рассматривать их и на сетке Δ, поэтому чтобы различать будем в обозначении B-сплайнов дополнительно использовать индекс рассматриваемой сетки.

Итак, в качестве определяемых параметров берём $\alpha_i^{(k)}$ или $\beta_i^{(k)}$ коэффициенты в разложении

$$s^{(k)}(x) = \sum_i \alpha_i^{(k)} N_{i,n+1-k,\delta}(x) = \sum_i \beta_i^{(k)} M_{i,n+1-k,\delta}(x).$$

Используя выражение разделённых разностей через B-сплайны, получаем

$$s[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \frac{1}{k!} \sum_j \alpha_j^{(k)} \left(\int\limits_{x_i}^{x_{i+k}} M_{i,k,\Delta}(\tau) N_{j,n+1-k,\delta}(\tau)\, d\tau \right).$$

Ясно, что величины

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+k}} M_{i,k,\delta}(\tau) N_{j,n+1-k,\Delta}(\tau)\, d\tau$$

не зависят от сплайна, и полностью определяются рассматриваемыми сетками.

Эти равенства, записанные для разных индексов i, представляют собой набор линейных соотношений, связывающих значения сплайна в узлах сетки Δ и коэффициенты разложения k-й производной сплайна по L_∞-нормализованным B-сплайнам сетки δ. Расширив сетку δ необходимым количеством узлов влево и вправо, получаем $N+1-k$ уравнений для определения выбранных параметров.

Практическое вычисление элементов матриц $\boldsymbol{A}_k$ в каждом конкретном случае не вызывает особых проблем, можно, например, воспользоваться квадратурными формулами Гаусса, которые точны на многочленах. С другой стороны, в работе [3] было указано, что интегралы от произведений B-сплайнов можно вычислять по устойчивым рекуррентным формулам.

Для векторов $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_N)^T$ и $N \times N$ матриц $\boldsymbol{G} = (g_{i,j})$ будем рассматривать нормы

$$\|\boldsymbol{\gamma}\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |\gamma_i|, \qquad \|\boldsymbol{G}\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \sum_{j=1}^{N} |g_{i,j}|.$$

Теорема 1. *Для любого k, $1 \leqslant k \leqslant n$, матрицы $\boldsymbol{A}_k$ получаемых систем уравнений являются $(n+1)$-диагональными с неотрицательными элементами и $\|\boldsymbol{A}_k\| = 1$.*

Теорема 2. *Для любого k, $1 \leqslant k \leqslant 2m$, матрицы $\boldsymbol{A}_k$ получаемых систем уравнений вполне неотрицательны.*

Напомним, матрица называется *вполне неотрицательной*, если все её миноры любого порядка неотрицательны. Последнее свойство весьма важно, поскольку метод исключения Гаусса при решении системы уравнений с такой матрицей не требует выбора главного элемента [4].

Важной характеристикой систем уравнений, особенно при практическом построении сплайна, является величина обусловленности системы или величина нормы обратной матрицы в нашем случае (поскольку в силу теоремы 1 имеет место $\|\boldsymbol{A}_k\| = 1$). Однако помимо информации о величине возможной погрешности при практическом решении этих систем, т. е. об ошибке нахождения параметров интерполяционного сплайна, погрешность метода, в данном случае величина $s^{(k)} - f^{(k)}$, также может быть оценена в терминах обусловленности (нормы обратной матрицы). Мы установим оценку погрешности $s^{(k)} - f^{(k)}$ в равномерной норме через модуль непрерывности функции $f^{(k)}$, т. е. при минимальных требованиях к гладкости интерполируемой функции f.

Теорема 3. *Если $f \in C^k[a,b]$, то для сплайна s степени n справедливы оценки*

$$\big\|s^{(k)} - f^{(k)}\big\|_\infty \leqslant K \big\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\big\|\, \omega\big(f^{(k)}; \overline{h}\big),$$

где константа K зависит только от k и n, но не от сеток Δ и δ.

Для классического случая сплайнов чётной степени $n = 2m-1$ когда сетки Δ и δ совпадают показано, что матрицы систем определяющих уравнений хорошо обусловлены для двух средних производных $k = m-1$ и $k = m$ [5], [6]. Доказана эквивалентность хорошей обусловленности сходимости процесса интерполяции для соответствующих производных.

В частности показано, что если $P^{(k)}$ — оператор сопоставляющий k-й производной интерполируемой функции соответственно k-ю производную интерполяционного сплайна, то имеет место

Теорема 4. $D_{k,m}\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\|_\infty \leqslant \|P^{(k)}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}_k^{-1}\|_\infty$ *с некоторыми константами $D_{k,m}$ зависящими только от k и m, но не от Δ.*

Заметим, что ограниченность нормы оператора эквивалентна сходимости процесса интерполяции.

Теорема 5. *Если на последовательности сеток $\{\Delta\}$ $s^{(k)}$ сходится к $f^{(k)}$ $(f \in C^k[a,b])$, то на этой же последовательности сходится $s^{(2m-k-1)}$ к $f^{(2m-k-1)}$ $(f \in C^{2m-k-1}[a,b])$, где $k = 0, \ldots, m-2$ или $k = m+1, \ldots, 2m-1$.*

Для классического случая сплайнов чётной степени (узлы одной сетки строго посреди узлов другой сетки) установлена связь сходимости процессов интерполяции для сплайнов по Субботину и по Марсдену [7], а также связь с обусловленностью определяющих систем уравнений.

В работе [8] можно найти обзор результатов о сходимости процессов интерполяции.

Список литературы

1. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. 352 с.
2. *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. 248 с.
3. *de Boor C., Lyche T., Schumaker L.L.* On calculating with B-splines, II. Integration // Numerische Methoden der Approximationstheorie / Internat. Ser. Numer. Math., vol. 30. Basel: Birkhäuser, 1976. P. 123–146.
4. *de Boor C., Pinkus A.* Backward error analysis for totally positive linear systems // Numer. Math. 1977. Vol. 27, № 4. P. 485–490.
5. *Волков Ю.С.* Вполне неотрицательные матрицы в методах построения интерполяционных сплайнов нечётной степени // Матем. труды. 2004. Т. 7, № 2. С. 3–34.
6. *Волков Ю.С.* Исследование сходимости процесса интерполяции для производных полного сплайна // Укр. матем. вiсник. 2012. Т. 9, № 2. С. 278–296.
7. *Волков Ю.С.* Интерполяция сплайнами чётной степени по Субботину и по Марсдену // Укр. матем. жур. 2014. Т. 66, № 7. С. 891–908.
8. *Волков Ю.С., Субботин Ю.Н.* 50 лет задаче Шёнберга о сходимости сплайн-интерполяции // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 52–67.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 82–84

О некоторых функциональных пространствах, норма которых задаётся с помощью дифференциального оператора

М. Г. Гадоев, Ф. С. Исхоков

Институт математики им. А. Джураева АН РТ, Душанбе, Таджикистан

Аннотация. С помощью заданного класса дифференциальных операторов определяются нормированные функциональные пространства и для них изучаются вопросы эквивалентной нормировки и плотности класса бесконечно дифференцируемых финитных функций. Как следствие этих результатов получаются теоремы разделимости для соответствующих дифференциальных операторов.

Пусть R_n – n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Вводим единичный куб с центром в начале системы координат

$$\Pi(0) = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_n : |x_j| < \frac{1}{2}, \, j = \overline{1, n} \right\}.$$

Для любой точки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in R_n$ и любого вектора $\overrightarrow{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ с положительными компонентами определим параллелепипед $\Pi_{\overrightarrow{t}}(\xi)$ равенством

$$\Pi_{\overrightarrow{t}}(\xi) = \left\{ x \in R_n : \left(\frac{x_1 - \xi_1}{t_1}, \frac{x_2 - \xi_2}{t_2}, \ldots, \frac{x_n - \xi_n}{t_n} \right) \in \Pi(0) \right\}.$$

Пусть Ω – произвольное открытое множество в R_n и $g_j(x)$ $(j = \overline{1, n})$ – определенные в Ω положительные функции. При $\varepsilon > 0$ вводим обозначение

$$\Pi_{\varepsilon, \overrightarrow{g}}(\xi) = \Pi_{\varepsilon \overrightarrow{g}(\xi)}(\xi).$$

Далее предположим, что область Ω и положительные функции $g_j(x)$ $(j = \overline{1, n})$ связаны следующем условием погружения: существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $\xi \in \Omega$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon_0, \overrightarrow{g}}(\xi)$ содержится в Ω. Это условие является аналогом *условия погружения*, рассмотренного в работе [1]. В [1] также рассмотрены примеры областей Ω и положительных функций $g_j(x)$ $(j = \overline{1, n})$, удовлетворяющих условию погружения.

Пусть $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ - длина мультииндекса и

$$D_x^k = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{k_1} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{k_2} \ldots \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{k_n}.$$

где i — мнимая единица.

Вводим дифференциальное выражение

$$L(x, D_x) = \sum_{|k| \leqslant 2r} a_k(x) D^k \quad (x \in \Omega) \tag{1}$$

и связанное с ним функциональное пространство $W_{p;L}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, всех функций $u(x) \in L_p(\Omega)$, для которых обобщенные функции $a_k(x) D_x^k u(x)$, $|k| \leqslant 2r$, принадлежат про-

© М. Г. Гадоев, Ф. С. Исхоков, 2016

странству $L_p(\Omega)$, и конечна следующая норма

$$\|u;\, W_{p;\,L}(\Omega)\| = \left\{ \sum_{|k|\leqslant 2r} \int\limits_{\Omega} \left|a_k(x) D_x^k u(x)\right|^p dx \right\}^{1/p}. \tag{2}$$

Обозначим через $\overset{0}{W}_{p;\,L}(\Omega)$ пополнения класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (2).

Символом $B(\tau,\, \bar{g},\, \Omega)$, где τ – положительное число, обозначим класс символов

$$L(x,\, s) = \sum_{|k|\leqslant 2r} a_k(x) s^k \quad (x \in \Omega,\, s \in R_n)$$

с измеримыми коэффициентами $a_k(x)$, удовлетворяющими следующим условиям:

(I) $\inf\limits_{x\in\Omega, s\in R_n} |L(x,s)| = \delta \neq 0$

(II) $|a_k(x) s^{k'}| \leqslant \tau g_1^{-k_1''}(x) g_2^{-k_2''}(x) \dots g_n^{-k_n''}(x) |L(x,s)|$
для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$, $k = k' + k''$, $k'' \neq 0$, $|k| \leqslant 2r$;

(III) $\sum\limits_{|k|\leqslant 2r} |(a_k(x) - a_k(y))\, s^k| \leqslant \tau |L(x,s)|$
для всех $s \in R_n$ и всех $x, y \in \Omega$ таких, что $|x_j - y_j| < \varepsilon^2 g_j(x)$, $j = 1, 2 \dots, n$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Теорема 1. *Пусть существует число $\lambda > 0$ такое, что*

$$\lambda^{-1} \leqslant \frac{g_j(x)}{g_j(y)} \leqslant \lambda, j = \overline{1,\, n},$$

для всех $y \in \Omega$ и всех $x \in \Pi_{\varepsilon_0, \overrightarrow{g}}(y)$, и пусть при некотором $K > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{|k|\leqslant 2r} \left|a_k(x) s^k\right| \leqslant |L(x,\, s)|$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$. Тогда найдется число $\tau_0 = \tau_0(n, r, p, K) > 0, 1 < p < +\infty$, такое, что если $\tau \in (0,\, \tau_0)$ и $L(x,\, s) \in B(\tau,\, \bar{g},\, \Omega)$, то для всех функций $u(x) \in \overset{0}{W}_{p;\,L}(\Omega)$ выполняются неравенства

$$\|u;\, W_{p;\,L}(\Omega)\| \leqslant M_1 \|L(\cdot,\, D)u;\, L_p(\Omega)\| \leqslant M_2 \|u;\, W_{p;\,L}(\Omega)\|,$$

где положительные числа M_1, M_2 зависят только от n, p, r, K и нижней грани функции $|L(x,s)|(x \in \Omega;\ s \in R^n)$.

Теорема 2. *Пусть $1 < p < +\infty$, выполнены все условия теоремы 1 и пусть*

$$D_x^l a_k(x) \in L_{\infty,\, loc}(\Omega)$$

для всех мультииндексов l таких, что $|l| \leqslant |k| \leqslant 2r$. Тогда $W_{p;\,L}(\Omega) = \overset{0}{W}_{p;\,L}(\Omega)$, то есть множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в пространстве $W_{p;\,L}(\Omega)$.

Доказательство теорем 1 и 2 проводится методом, разработанным К. Х. Бойматовым в работе [2], где исследовалась разделимость дифференциальных операторов с частными производными.

Нормированные пространства дифференцируемых функций многих вещественных переменных, норма которых задается без привлечение дифференциального оператора, в случае, когда область Ω и весовые функции $g_j(x)\,(j = \overline{1,\, n})$ удовлетворяют условию погружения, ранее изучались в работах [1], [3–5].

Список литературы

1. *Лизоркин П.И.* Оценки смешанных и промежуточных производных в весовых L_p-нормах // Труды МИАН СССР. 1980. Т. 156. С. 130–142.
2. *Бойматов К.Х.* Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения. // Труды МИАН СССР. 1984. Т. 170. С. 37–76.
3. *Исхоков С.А.* О гладкости обобщенного решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением // Доклады РАН. 2001. Т. 378, № 3. С. 306–309.
4. *Исхоков С.А.* О существовании и гладкости обобщенного решения нелинейного дифференциального уравнения с вырождением // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44, № 2. С. 232–245.
5. *Исхоков С.А.*, *Гадоев М.Г.*, *Якушев И.А.* Неравенство Гординга для эллиптических операторов высшего порядка с нестепенным вырождением // Доклады РАН. 2012. Т. 443, № 3. С. 286–289.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 85–87

Точное неравенство Джексона в пространстве $C(S^d)$

Д. В. Горбачев

Тульский государственный университет, Тула, Россия

Аннотация. Н. П. Корнейчук (1962) доказал следующее точное неравенство Джексона в пространстве $C(S^1)$:

$$1-O(n^{-1})\leqslant\sup_{f\in C(S^1)}\frac{E_{n-1}(f)}{\omega(f,\frac{\pi}{n})}\leqslant 1,$$

где $E_s(f)$ — наилучшее приближение функции f тригонометрическими многочленами порядка s, $\omega(f,\delta)$ — модуль непрерывности f.

Мы обобщаем неравенство Корнейчука на случай многомерной сферы S^d. Существуют положительные константы $a_d\leqslant b_d$, такие что для некоторого $a_d\leqslant\gamma\leqslant b_d$

$$1-O(n^{-1})\leqslant\sup_{f\in C(S^d)}\frac{E_n(f)}{\omega(f,\frac{\gamma}{n})}\leqslant 1.$$

В 1962 г. Н. П. Корнейчук [1] доказал следующее точное неравенство Джексона в пространстве $C(S^1)$:

$$E_{n-1}(f)\leqslant\omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big),\quad n\in\mathbb{N},\tag{1}$$

где f — произвольная непрерывная вещественная 2π-периодическая функция, $E_n(f)$ — величина наилучшего равномерного приближения функции f тригонометрическими многочленами порядка $\leqslant n$, $\omega(f,t)$ — равномерный модуль непрерывности f.

Неравенство (1) называется точным неравенством Джексона. Самим Д. Джексоном оно было доказано с неточной константой.

В оценке снизу Корнейчук $\forall\,\varepsilon>0$ построил нетривиальную функцию $f_\varepsilon\in C(S^1)$, для которой

$$E_{n-1}(f_\varepsilon)\geqslant\Big(1-\frac{1}{2n}-\varepsilon\Big)\omega\Big(f_\varepsilon,\frac{\pi}{n}\Big).$$

Отметим, что до сих пор остается нерешенной задача о точной константе перед модулем непрерывности в неравенстве (1) для фиксированного n.

Мы обобщаем неравенство (1) на случай многомерной евклидовой сферы $S^d=\{x\in\in\mathbb{R}^{d+1}\colon |x|=1\}$, $d\geqslant 1$. В оценке сверху применяется идея Корнейчука о промежуточном приближении классом Липшица. В оценке снизу мы также в некотором смысле обобщаем конструкцию функции Корнейчука f_ε. Но при этом нам потребуются недавние результаты A. Bondarenko, D. Radchenko и M. Viazovska [2] о существовании на сфере S^d хорошо-распределенных сферических s-дизайнов, состоящих из C_ds^d точек и имеющих кодовое расстояние c_d/s.

Пусть M — компактное метрическое пространство с метрикой d, $C(M)$ — пространство непрерывных функций $f\colon M\to\mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|=\|f\|_{C(M)}=\sup_{x\in M}|f(x)|.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00308) и Министерства образования и науки РФ (госзадание № 5414ГЗ)

© Д. В. Горбачев, 2016

В настоящее время существуют разные способы определения модуля непрерывности функции. Мы используем классическое определение:

$$\omega(f,\delta)=\sup\bigl\{|f(x)-f(y)|\colon x,y\in M,\ d(x,y)\leqslant\delta\bigr\},\quad \delta>0.$$

В этом случае модуль непрерывности обладает хорошо изученными свойствами непрерывности, монотонности и полуаддитивности.

Пусть $KH\subset C(M)$, $K>0$, — класс Липшица, который состоит из всех функций $h\in C(M)$, удовлетворяющих условию

$$|h(x)-h(y)|\leqslant Kd(x,y),\quad x,y\in M.$$

Очевидно, что для модуля непрерывности функции $h\in KH$ выполняется оценка $\omega(h,\delta)\leqslant \leqslant K\delta$.

Пусть $F\subset C(M)$ — произвольное подпространство,

$$E(f,F)=\inf\{\|f-u\|\colon u\in F\}$$

— величина наилучшего равномерного приближения функции $f\in C(M)$ подпространством F,

$$E(KH,F)=\sup_{h\in KH}E(h,F)$$

— равномерное уклонение класса Липшица KH от подпространства F.

Теорема 1. *Для любой функции $f\in C(M)$ справедливо неравенство*

$$E(f,F)\leqslant\omega(2e,f),$$

где $e=E(H,F)$.

Для случая $M=S^1$ эта теорема получена Корнейчуком [3, гл. 8]. Из нее следует неравенство (1), если положить F равным пространству тригонометрических многочленов степени $n-1$ и учесть, что $E(H,F)=\frac{\pi}{2n}$. Это равенство было доказано в 1930 г. Ж. Фаваром.

Применим теорему 1 для случая $M=S^d$. Пусть F_n — подпространство сферических многочленов степени $<n$, $\varphi_k(t)=\frac{P_k^{(\alpha,\alpha)}(\cos t)}{P_k^{(\alpha,\alpha)}(1)}$, где $P_k^{(\alpha,\alpha)}$ — многочлены Якоби и $\alpha=d/2-1$, $w(t)=\sin^{2\alpha+1}t$ — ультрасферический вес,

$$\psi_0(t)=d_0\int_t^\pi w(t)\,dt,\quad \psi_k(t)=d_k\int_0^t\varphi_k(u)w(u)\,du,\quad d_k=\biggl(\int_0^\pi\varphi_k^2(u)w(u)\,du\biggr)^{-1}.$$

Для $n\in\mathbb{N}$ положим

$$e_{nd}=\inf_{a_k\in\mathbb{R}}\int_0^\pi\biggl|\psi_0(t)-\sum_{k=1}^{n-1}a_k\psi_k(t)\biggr|\,dt=\int_0^\pi\psi_0(t)\mathrm{sign}\widetilde{\psi}_n(t)\,dt,$$

где

$$\widetilde{\psi}_\nu(t)=\psi_\nu(t)+\sum_{k=1}^{\nu-1}a_k\psi_k(t)$$

— наименее уклоняющиеся от нуля многочлены в задаче

$$\min_{a_k\in\mathbb{R}}\int_0^\pi|\widetilde{\psi}_\nu(t)|\,dt.$$

Отметим, что величина e_{nd} тесно связана с точным неравенством Никольского между L^∞ и L^1 нормами для алгебраических многочленов с ультрасферическим весом [4].

Теорема 2. *Пусть $M = S^d$.*

1. *Справедливо неравенство*
$$E(H, F_n) \leqslant e_{nd}.$$

2. *Существует явная константа b_d, такая что*
$$2e_{nd} \leqslant \frac{b_d}{n}.$$

3. *Справедливо неравенство Джексона*
$$E(f, F_n) \leqslant \omega\Big(f, \frac{b_d}{n}\Big).$$

Множество точек $\{x_i\}_{i=1}^N \subset S^d$ называется сферическим s-дизайном, если
$$\frac{1}{|S^d|} \int\limits_{S^d} f(x)\,dx = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$
для любого сферического многочлена f степени s. Эквивалентно
$$\sum_{i,j=1}^{N} \varphi_k(x_i x_j) = 0, \quad k = 1, \ldots, s.$$

При построении функции f_ε Корнейчук неявно использовал тот факт, что точки $x_i^{(1)} = 2\pi i/n$ и $x_i^{(2)} = x_i^{(1)} + \pi/n$, $i = 1, \ldots, n$, являются $(n-1)$-дизайнами и $|x_i^{(a)} - x_j^{(b)}| \geqslant \pi/n$ $\forall\, i, j, a, b$, $x_i^{(a)} \neq x_j^{(b)}$.

В многомерном случае доказательство аналогичного результата непросто. С неявной константой его можно получить из главного результата работы [2], где доказано существования на сфере S^d сферических t-дизайнов, состоящих из $C_d t^d$ точек и имеющих кодовое (минимальное между несовпадающими точками) расстояние c_d/t.

Лемма 1. *Существуют два n-дизайна $\{x_i^{(a)}\}_{i=1}^N \subset S^d$, $a = 1, 2$, состоящих из $C_d n^d$ точек, таких что $d(x_i^{(a)}, x_j^{(b)}) \geqslant c_d/n$ $\forall\, i, j, a, b$, $x_i^{(a)} \neq x_j^{(b)}$.*

Теорема 3. *Существует функция $f \in C(S^d)$ и константа $a_d \leqslant b_d$, такая что*
$$E_{n-1}(f) \geqslant \big(1 - O(n^{-1})\big)\omega\Big(f, \frac{a_d}{n}\Big).$$

Из теорем 2 и 3 вытекает, что для некоторого $a_d \leqslant \gamma \leqslant b_d$
$$1 - O(n^{-1}) \leqslant \sup_{f \in C(S^d)} \frac{E_n(f)}{\omega(f, \frac{\gamma}{n})} \leqslant 1.$$

Список литературы

1. *Корнейчук Н. П.* Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // ДАН СССР. 1962. Т. 145, № 3. С. 514–515.
2. *Bondarenko A.*, *Radchenko D.*, *Viazovska M.* Well-separated spherical designs // Constr. Approx. 2015. Vol. 41, № 1. P. 93–112.
3. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений. — М.: Наука, 1976. 320 с.
4. *Арестов В. В.*, *Дейкалова М. В.* Неравенство Никольского для алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Труды Инст. матем. и мех. УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 34–47.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 88–89

Экстремальные задачи для преобразования Якоби

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов

Тульский государственный университет, Тула, Россия

Аннотация. Для преобразования Якоби на полупрямой решены экстремальные задачи Турана, Фейера, Дельсарта, Логана, Бомана. Описаны экстремальные функции. Общие оценки функционалов получены с помощью квадратурных формул Гаусса и Маркова на полупрямой по нулям функций Якоби. Ранее эти экстремальные задачи были решены для преобразований Фурье, Ганкеля и Данкля.

Пусть $\alpha\geqslant\beta\geqslant-1/2$, $\alpha>-1/2$, $\rho=\alpha+\beta+1$, $t\in\mathbb{R}_+$, $\Delta(t)=2^{2\rho}(\operatorname{sh}t)^{2\alpha+1}(\operatorname{ch}t)^{2\beta+1}$ — гиперболический вес, $\lambda\in\mathbb{C}$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция, $F(a,b,c;z)={}_2F_1(a,b,c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса,

$$\varphi_\lambda(t)=\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)=F\Big(\frac{\rho+i\lambda}{2},\frac{\rho-i\lambda}{2};\alpha+1;-(\operatorname{sh}t)^2\Big)$$

— функция Якоби, являющаяся собственной функцией задачи Штурма–Лиувилля:

$$\frac{d}{dt}\Big(\Delta(t)\,\frac{d}{dt}\,\varphi_\lambda(t)\Big)+(\lambda^2+\rho^2)\Delta(t)\varphi_\lambda(t)=0,\qquad \varphi_\lambda(0)=1,\quad \frac{d}{dt}\,\varphi_\lambda(0)=0,$$

$$c(\lambda)=\frac{2^{\rho-i\lambda}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(i\lambda)}{\Gamma((\rho+i\lambda)/2)\Gamma((\rho+i\lambda)/2-\beta)},\quad s(\lambda)=(2\pi)^{-1}|c(\lambda)|^{-2},$$

$$d\mu(t)=\Delta(t)\,dt,\quad d\sigma(\lambda)=s(\lambda)d\lambda.$$

Прямое и обратное преобразования Якоби задаются равенствами

$$Jf(\lambda)=\int\limits_{\mathbb{R}_+}f(t)\varphi_\lambda(t)\,d\mu(t),\quad J^{-1}g(t)=\int\limits_{\mathbb{R}_+}g(\lambda)\varphi_\lambda(t)\,d\sigma(\lambda).$$

Пусть θ, $r>0$, $\lambda(f)=\sup\{t>0:\ f(t)>0\}$. Мы решаем следующие экстремальные задачи для преобразования Якоби:

Задача Турана. Вычислить величину

$$\Lambda_T(\theta)=\sup Jf(0),$$

если $f\in C(\mathbb{R}_+)$, $f(0)=1$, $\operatorname{supp}f\subset[0,\theta]$, $Jf\geqslant0$.

Задача Фейера. Вычислить величину

$$\Lambda_F(\theta)=\sup g(0),$$

если $g\in L_1(\mathbb{R}_+,d\sigma)\cap C(\mathbb{R}_+)$, $g\geqslant0$, $J^{-1}g(0)=1$, $\operatorname{supp}J^{-1}g\subset[0,\theta]$.

Задачи Турана и Фейера – двойственные, поэтому $\Lambda_T(\theta)=\Lambda_F(\theta)$.

Задача Дельсарта. Вычислить величину

$$\Lambda_D(\theta,r)=\sup J^{-1}g(0),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00308) и Минобрнауки России (госзадания № 5414ГЗ, № 1.1333.2014К).

© Д. В. Горбачев, В. И. Иванов, 2016

если $g \in L_1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C(\mathbb{R}_+)$, $g(0) = 1$, $g(\lambda) \leqslant 0$ $(\lambda \geqslant r)$, $\operatorname{supp} J^{-1}g \subset [0, \theta]$, $J^{-1}g \geqslant 0$.

Задача Дельсарта решена только при некотором дополнительном соотношении между параметрами θ и r.

Задача Логана I. Для действительных функций вычислить величину

$$\Lambda_L^1(\theta) = \inf \lambda(g),$$

если $g \in L_1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C(\mathbb{R}_+)$, $g \not\equiv 0$, $J^{-1}g \geqslant 0$, $\operatorname{supp} J^{-1}g \subset [0, \theta]$.

Задача Логана II. Для действительных функций вычислить величину

$$\Lambda_L^2(\theta) = \inf \lambda(-g),$$

если $g \in L_1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C(\mathbb{R}_+)$, $g \not\equiv 0$, $J^{-1}g \geqslant 0$, $J^{-1}g(0) = 0$, $\operatorname{supp} J^{-1}g \subset [0, \theta]$.

Задача Бомана. Вычислить величину

$$\Lambda_B(\theta) = \inf \int_0^\infty (\lambda^2 + \rho^2) g(\lambda)\, d\sigma(\lambda),$$

если $\lambda^2 g \in L_1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$, $g \in C(\mathbb{R}_+)$, $g \geqslant 0$, $\operatorname{supp} J^{-1}g \subset [0, \theta]$, $J^{-1}g(0) = 1$.

Все задачи кроме задачи Турана являются экстремальными задачами для целых функций экспоненциального типа. Общие оценки в них получаются с помощью квадратурных формул Гаусса и Маркова на полупрямой по нулям функций Якоби, точных для целых функций экспоненциального типа [1]. Экстремальные функции строятся с помощью задачи Штурма–Лиувилля, оператора обобщенного сдвига на полупрямой с гиперболическим весом и анализа применения квадратурных формул.

Ранее аналогичные экстремальные задачи были решены нами для преобразования Ганкеля [2].

Список литературы

1. *Горбачев Д.В.*, *Иванов В.И*. Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа // Матем. сборник. 2015. Т. 206. № 8. С. 63–98.
2. *Горбачев Д.В*. Некоторые экстремальные задачи гармонического анализа и теории приближений. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2015. 200 с.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 90–91

Jackson–Stechkin inequalities in L_p with Dunkl weight

D. V. Gorbachev[1], V. I. Ivanov[1] , S. Yu. Tikhonov[2]

[1] *Tula State University, Tula, Russia*
[2] *ICREA, Centre de Recerca Matemàtica, Campus de Bellaterra, Edifici C 08193 Bellaterra, Barcelona, Spain*

Abstract. We prove that the spherical mean value of the Dunkl-type generalized translation operator is the positive L^p-bounded generalized translation operator. As application, we prove direct theorems of approximation theory and equivalence between K-functional and modules of smoothness in L^p-spaces with the Dunkl weight.

Let $v_k(x) = \prod\limits_{a\in R_+} |\langle a, x\rangle|^{2k(a)}$ be the Dunkl weight in $\mathbb{R}^d$, defined by the positive subsystem of a root system $R \subset \mathbb{R}^d$ and a multiplicity function $k\colon R \to \mathbb{R}_+$ with the property that k is invariant with respect to the reflection group generated by R, c_k be the Macdonald–Mehta–Selberg integral, $d\mu_k(x) = c_k^{-1} v_k(x)\,dx$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, L_p be Banach space of complex-valued functions endowed with a norm $\|f\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f|^p\,d\mu_k\right)^{1/p}$, $e_k(x, y)$ be the generalized exponential function,

$$\mathcal{F}_k(f)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{e_k(x, y)}\,d\mu_k$$

be the Dunkl transform, Δ_k be the Dunkl Laplacian, S be the Schwartz space, S' be the space of tempered distributions, $\lambda \geqslant -1/2$, $j_\lambda(t)$ be the normalized Bessel function, $\lambda_k = d/2 - 1 + \sum\limits_{a\in R_+} k(a)$. Note that $L_p \subset S'$.

Dunkl harmonic analysis is set out in [1]. For $k \equiv 0$ the Dunkl transform coincides with the Fourier transform and the Dunkl Laplacian —with the Laplace operator.

Let $t \in \mathbb{R}_+$, T^t be the generalized translation operator for which

$$\mathcal{F}_k(T^t f)(y) = j_{\lambda_k}(t|y|)\mathcal{F}_k(f)(y)$$

on functions from the Schwartz space. It extends to a positive operator $T^t\colon L_p \to L_p$, $\|T^t\|_{p\to p} = 1$. It can be obtained by averaging over the unit sphere $\mathbb{S}^{d-1}$ of the generalized translation operator τ^t for which [2]

$$\mathcal{F}_k(\tau^t f)(y) = e_k(t, y)\mathcal{F}_k(f)(y).$$

For $k \equiv 0$ the operator T^t coincides with the operator of mean value over the sphere. The operator τ^t is bounded in L_2. This question in L_p is open.

The first and the second authors were partially supported by RFBR № 16-01-00308, Ministry of education and science of Russian Federation № 5414GZ, № 1.1333.2014K. The third author was partially supported by MTM 2011-59174, 2014 SGR 289, and RFBR № 16-01-00350.

© D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov , S. Yu. Tikhonov, 2016

Let $\sigma, \delta > 0$, $m \in \mathbb{N}$, I be the identity operator, $E_\sigma(f)_p$ be the value of the best approximation of function $f \in L_p$ by entire functions of spherical exponential type at $\sigma > 0$,

$$\omega_m(\delta, f)_p = \sup_{0<t\leqslant\delta} \Big\|(I - T^t)^m f\Big\|_p,$$

$$^*\omega_m(\delta, f)_p = \sup_{0<t\leqslant\delta} \Big\|\sum_{s=1}^{m}(-1)^s \binom{m}{s} T^{st} f\Big\|_p$$

be its moduli of continuity (smoothness).

Let $r \in \mathbb{N}$, $\langle \Delta_k f, \varphi\rangle = \langle f, \Delta_k \varphi\rangle$ for $f \in S'$, $\varphi \in S$,

$$W_p^r = \Big\{f \in L_p\colon\ \Delta_k^r f \in L_p\Big\}$$

be Sobolev space,

$$K_r(\delta, f)_p = \inf_{g \in W_p^r} \Big\{\|f - g\|_p + \delta^{2r}\|\Delta_k^r g\|_p\Big\}$$

be K-functional in L_p.

Theorem 1. *If $\sigma > 0$, $1 \leqslant p < \infty$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, then for any $f \in W_p^r$*

$$E_\sigma(f)_p \lesssim \frac{1}{\sigma^{2r}}\omega_m\Big(\frac{1}{\sigma}, \Delta_k^r f\Big)_p, \quad E_\sigma(f)_p \lesssim \frac{1}{\sigma^{2r}}{}^*\omega_m\Big(\frac{1}{\sigma}, \Delta_k^r f\Big)_p. \tag{1}$$

For $r = 0$ the inequalities (1) are the Jackson–Stechkin inequalities.

Theorem 2. *If $\delta > 0$, $1 \leqslant p < \infty$, $r \in \mathbb{N}$, then for any $f \in L_p$*

$$K_r(\delta, f)_p \asymp \omega_r\Big(\delta, f\Big)_p \asymp {}^*\omega_{2r-1}\Big(\delta, f\Big)_p \asymp {}^*\omega_{2r}\Big(\delta, f\Big)_p. \tag{2}$$

The constants in (1), (2) depend from nonessential parameters and not depend from f, σ, δ.

For radial functions the theorems 1, 2 were proved by S.S. Platonov [3, 4].

Список литературы

1. *Rösler M.* Dunkl operators: Theory and applications // Lecture Notes in Math. 2002. Vol. 1817. P. 93–135.
2. *Rösler M.* A positive radial product formula for the Dunkl kernel // Trans. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 355. № 6. P. 2413–2438.
3. *Platonov S.S.* Bessel harmonic analysis and approximation of functions on the half-line // Izvestiya: Mathematics. 2007. Vol. 71. № 5. P. 1001–1048.
4. *Platonov S.S.* Bessel generalized translations and some problems of approximation theory for functions on the half-line // Siberian Mathematical Journal. 2007. Vol. 50. № 1. P. 123–140.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 92–93

Sharp Jackson inequality in L_p with Dunkl weight

D. V. Gorbachev[1], V. I. Ivanov[1] , S. Yu. Tikhonov[2]

[1] *Tula State University, Tula, Russia*

[2] *ICREA, Centre de Recerca Matemàtica, Campus de Bellaterra, Edifici C 08193 Bellaterra, Barcelona, Spain*

Abstract. We define the positive L^p-bounded generalized translation operator, modulus of continuity and prove the sharp Jackson inequalities in L^p-spaces, $1 \leqslant p \leqslant 2$, with Dunkl weight.

Let $v_k(x) = \prod\limits_{a\in R_+} |\langle a, x\rangle|^{2k(a)}$ be the Dunkl weight in $\mathbb{R}^d$, defined by the positive subsystem of a root system $R \subset \mathbb{R}^d$ and a multiplicity function $k\colon R \to \mathbb{R}_+$ with the property that k is invariant with respect to the reflection group generated by R, c_k be the Macdonald–Mehta–Selberg integral, $d\mu_k(x) = c_k^{-1} v_k(x)\, dx$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, L^p be Banach space of complex-valued functions endowed with a norm $\|f\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f|^p\, d\mu_k\right)^{1/p}$, $e_k(x, y)$ be the generalized exponential function,

$$\mathcal{F}_k(f)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{e_k(x, y)}\, d\mu_k$$

be the Dunkl transform, $\lambda \geqslant -1/2$, $j_\lambda(t)$ be the normalized Bessel function, t_λ be its the smallest positive zero, $\lambda_k = d/2 - 1 + \sum\limits_{a\in R_+} k(a)$.

Dunkl harmonic analysis is set out in [1]. For $k \equiv 0$ the Dunkl transform coincides with the Fourier transform.

Let $E_\sigma(f)_p$ be the value of the best approximation of function $f \in L^p$ by entire functions of spherical exponential type not higher $\sigma > 0$,

$$\omega(\delta, f)_p = \sup\Big\{\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d} T^t|f(\cdot) - f(x)|^p(x)\, d\mu(x)\Big)^{1/p}\colon\ 0 < t \leqslant \delta\Big\}$$

be its modulus of continuity, defined by the positive generalized translation operator $T^t\colon L^p \to \to L^p$, $\|T^t\|_{p\to p} = 1$ for which

$$\mathcal{F}_k(T^t f)(y) = j_{\lambda_k}(t|y|)\mathcal{F}_k(f)(y)$$

on functions from the Schwartz space.

The operator T^t can be obtained by averaging over the unit sphere $\mathbb{S}^{d-1}$ of the generalized translation operator τ^t for which [2]

$$\mathcal{F}_k(\tau^t f)(y) = e_k(t, y)\mathcal{F}_k(f)(y).$$

For $k \equiv 0$ the operator T^t coincides with the operator of mean value over the sphere.

The first and the second authors were partially supported by RFBR № 16-01-00308, Ministry of education and science of Russian Federation № 5414GZ, № 1.1333.2014K. The third author was partially supported by MTM 2011-59174, 2014 SGR 289, and RFBR № 16-01-00350.

© D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov , S. Yu. Tikhonov, 2016

Theorem. *If $\sigma > 0$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, p' is the conjugate index, then for any $f \in L^p$ sharp Jackson inequalities*

$$E_{2\sigma}(f)_p \leqslant \frac{1}{2^{1/p'}}\omega\Big(\frac{2t_{\lambda_k}}{\sigma}, f\Big)_p \ (1 \leqslant p < 2), \tag{1}$$

$$E_{\sigma}(f)_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\omega\Big(\frac{2t_{\lambda_k}}{\sigma}, f\Big)_2. \tag{2}$$

are valid.

Lower bound in inequality (1) is achieved on radial functions. It was obtained in [3]. The argument in the modulus of continuity in the inequality (2) is optimal (minimal).

Список литературы

1. *Rösler M*. Dunkl operators: Theory and applications // Lecture Notes in Math. 2002. Vol. 1817. P. 93–135.
2. *Rösler M*. A positive radial product formula for the Dunkl kernel // Trans. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 355. № 6. P. 2413–2438.
3. *Ivanov V. I*. On the sharpness of Jackson's inequality in the spaces L_p on the half-line with power weight // Mathematical Notes. 2015. Vol. 98. № 5. P. 742–751.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 94–97

Wiener's problem for positive definite functions

D. V. Gorbachev[1], S. Yu. Tikhonov[2]

[1] *Tula State University, Tula, Russia*
[2] *ICREA, Centre de Recerca Matemàtica, Campus de Bellaterra, Edifici C 08193 Bellaterra, Barcelona, Spain*

Abstract. We study the sharp constant $W_n(D)$ in Wiener's inequality for positive definite functions

$$\int_{\mathbb{T}^n} |f|^2\,dx \leqslant W_n(D)|D|^{-1}\int_D |f|^2\,dx, \quad D\subset \mathbb{T}^n.$$

N. Wiener proved that $W_1([-\delta,\delta])<\infty$, $\delta\in(0,1/2)$. E. Hlawka showed that $W_n(D)\leqslant 2^n$, where D is an origin-symmetric convex body.

We sharpen Hlawka's estimates for D being the ball B^n and the cube I^n. In particular, we prove that $W_n(B^n)\leqslant 2^{(0.401\ldots+o(1))n}$. We also obtain a lower bound of $W_n(D)$. Moreover, for a cube $D=\frac{1}{q}I^n$ with $q=3,4,\ldots$, we obtain that $W_n(D)=2^n$. Our proofs are based on the interrelation between Wiener's problem and the problems of Turán and Delsarte.

1. Introduction

Let $n\in\mathbb{N}$ and $\mathbb{T}^n=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. The Fourier series of a complex-valued function $f\in L^1(\mathbb{T}^n)$ is given by

$$f(x)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\widehat{f}_\nu e(\nu x), \qquad e(t)=e^{2\pi it},$$

where

$$\widehat{f}_\nu=\int_{\mathbb{T}^n} f(x)e(-\nu x)\,dx, \quad \nu\in\mathbb{Z}^n,$$

are the Fourier coefficients of f. The support of a function f, written supp$f$, is the closure of the subset of $\mathbb{T}^n$ where f is non-zero. Let the unit ball and the unit cube be given by $B^n=\{x\in\mathbb{R}^n\colon |x|\leqslant 1\}$ and $I^n=[-1,1]^n$, respectively. Let also $B_r:=B_r^n:=rB^n$ for $r>0$. By $|D|$ we denote the volume of $D\subset\mathbb{R}^n$. In what follows, we assume that D is an origin-symmetric convex body.

Wiener's inequality for positive definite functions in $L^2(\mathbb{T}^n)$ is given by

$$\int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|^2\,dx \leqslant C_n(D)\int_D |f(x)|^2\,dx, \quad f\in L^1_+(\mathbb{T}^n), \tag{1}$$

where

$$L^1_+(\mathbb{T}^n):=\bigl\{f\in L^1(\mathbb{T}^n)\colon \widehat{f}_\nu\geqslant 0 \text{ for any } \nu\in\mathbb{Z}^n\bigr\},$$

D. G. was supported by the RFBR (no. 16-01-00308) and the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (no. 5414GZ).

© D. V. Gorbachev, S. Yu. Tikhonov, 2016

and $D \subset \mathbb{T}^n$. Here $C_n(D)$ is a positive constant depending only on n and D. Note that $L^1_+(\mathbb{T}^n) \not\subseteq L^2(\mathbb{T}^n)$, take, for example,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1/2} \cos(2\pi k x_1),$$

see [9, Ch. V, (1.8)].

N. Wiener (unpublished result, see e.g. [8]) proved in the early 1950's that $C_1([-\delta,\delta]) < \infty$ for $\delta \in (0, 1/2)$.

For $n = 1$, H. Shapiro [8] showed that, for any $\delta \in (0, 1/2)$,

$$\int_{\mathbb{T}} |f|^2\,dx \leqslant \delta^{-1} \int_{-\delta}^{\delta} |f|^2\,dx, \quad f \in L^1_+(\mathbb{T}).$$

The latter was generalized by E. Hlawka [5] for the multivariate case as follows:

$$\int_{\mathbb{T}^n} |f|^2\,dx \leqslant \left|\frac{1}{2}D\right|^{-1} \int_D |f|^2\,dx, \quad f \in L^1_+(\mathbb{T}^n), \tag{2}$$

where $D \subset \mathbb{T}^n$ is an origin-symmetric convex body.

We study the sharp constant

$$W_n(D) := \sup_{f \in L^1_+(\mathbb{T}^n)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{T}^n} |f|^2\,dx}{|D|^{-1}\int_D |f|^2\,dx}.$$

Note that Hlawka's result implies that

$$W_n(D) \leqslant 2^n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Moreover, taking $f = 1$ we get a trivial estimate from below

$$1 \leqslant W_n(D)$$

for any $D \subset \mathbb{T}^n$.

Note that $f \in L^1_+(\mathbb{T}^n)$ if and only if f is positive definite [2, 9.2.4]. Recall that an integrable function f is positive definite [2, Chap. 9] if

$$\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(x-y)u(x)\overline{u(y)}\,dx\,dy \geqslant 0 \tag{4}$$

for any $u \in C(\mathbb{T}^n)$. It is sufficient to verify (4) only for the case of u being trigonometric polynomials.

For a continuous function $f \in C(\mathbb{T}^n)$, condition (4) is equivalent to the fact that f is positive definite in the classical sense, that is, for every finite sequence $\{x_i\}_{i=1}^N$ in $\mathbb{T}^n$ and every choice of complex numbers $\{c_i\}_{i=1}^N$, we have

$$\sum_{i,j=1}^N c_i\overline{c_j} f(x_i - x_j) \geqslant 0,$$

see [7, Ch. 1].

Note that if a function $f \in L^1_+(\mathbb{T}^n)$ is bounded in some neighborhood of the origin and therefore the series $\sum_\nu \widehat{f}_\nu$ converges, then Bochner's theorem [2, 9.2.8] implies that f can be viewed as a continuous positive definite function. In general, this is not the case. However, the following result is true.

Proposition 1. *We have*

$$W_n(D) = W_n^+(D) := \sup_{f\in F_+\setminus\{0\}} \frac{\int\limits_{\mathbb{T}^n} |f|^2\,dx}{|D|^{-1}\int\limits_D |f|^2\,dx}, \tag{5}$$

where F_+ is a set of continuous positive definite functions on $\mathbb{T}^n$.

We continue investigating multivariate inequality (2) and prove new bounds for $W_n(D)$. Moreover, we connect this problem to Turán's problem and Delsarte's problem also known as the linear programming bound problem [1, 3, 4].

The main results of the paper are new bounds of $W_n(D)$ in the case when D is a ball or a cube.

Theorem 1. *For $\delta \in (0, 1/2)$, we have*

$$W_n(\delta B^n) \leqslant 2^{(0.401\ldots+o(1))n}.$$

Theorem 2. *Let $\delta \in (0, 1/2)$. Then*

$$W_n(\delta I^n) \leqslant 2^n(1-\theta(\delta))^n,$$

where

(*i*) $\theta(\delta) \in C(0, 1/2)$, *and*, *moreover*, $\theta(\delta) = O(\delta^2)$ *as* $\delta \to 0$,

(*ii*) $\theta(\delta) = 0$ *for* $\delta^{-1} \in \mathbb{N}$,

(*iii*) $0 < \theta(\delta) < 1$ *for* $\delta^{-1} \notin \mathbb{N}$.

Note that there is a specific expression for $\theta(\delta)$, which is

$$\theta(\delta) = 1 - \delta a_{\mathbb{T}}^{-1}([-\delta,\delta]),$$

where $a_{\mathbb{T}}([-\delta,\delta])$ is the solution of Turán's problem [6].

Our next result provides an estimate of $W_n(D)$ from below.

Theorem 3. *Let $D \subset \delta I^n$ with $\delta \in (0, 1/q)$ for some $q = 2, 3, \ldots$. Then*

$$|D|q^n \leqslant W_n(D).$$

For the cube $D = \delta I^n$, this result gives

$$2^n(\delta q)^n \leqslant W_n(\delta I^n), \quad \delta \in (0, 1/q). \tag{6}$$

Letting $\delta \to \frac{1}{q}-$, this and Hlawka's inequality (3) give

Corollary 1. [Wiener's constant for the cube] *For $q = 3, 4, \ldots$, we have*

$$W_n(\frac{1}{q}I^n) = 2^n.$$

It is worth mentioning that setting $q = [\delta^{-1}]$ for $\delta^{-1} \notin \mathbb{N}$ and $q = [\delta^{-1}] - 1$ for $\delta^{-1} \in \mathbb{N}$ in (6), we obtain

$$2^n(1-\delta)^n \leqslant W_n(\delta I^n), \quad \delta \in (0, 1/2).$$

In particular, this implies that the limit

$$\lim_{\delta\to 0+} W_n(\delta I^n) = 2^n$$

exists. It is not known if this limit exists for other D.

Список литературы

1. *Cohn H.*, *Elkies N.* New upper bounds on sphere packings. I // Ann. of Math. 2003. V.157, № 2. P. 689–714.
2. *Edwards R. E.* Fourier Series: A Modern Introduction. – Springer, 1979. Vol. 1.
3. *Gorbachev D. V.* Extremal problem for entire functions of exponential spherical type, connected with the Levenshtein bound on the sphere packing density in $\mathbb{R}^n$ (in Russian) // Izvestiya of the Tula State University. Ser. Mathematics Mechanics Informatics. 2000. Vol. 6. P. 71–78.
4. *Gorbachev D. V.* An extremal problem for periodic functions with support in a ball // Math. Notes. 2001. Vol. 69, Nos. 3–4. P. 313–319.
5. *Hlawka E.* Anwendung einer Zahlengeometrischen Methode von C. L. Siegel auf Probleme der Analysis // Comment Math. Helvetici 1981. Vol. 56. P. 66–82.
6. *Ivanov V. I.* On the Turán and Delsarte problems for periodic positive definite functions // Mathematical Notes. 2006. Vol. 80. P. 870–875.
7. *Rudin W.* Fourier analysis on groups. – New York: Interscience Publ., 1962.
8. *Shapiro H. S.* Majorant problems for Fourier coefficients. Quart. J. Math. Oxford Ser. 1975. Vol. 26. № 2. P. 9–18.
9. *Zygmund A.* Trigonometric Series. – Cambridge: Cambridge University Press, 2002. Vol. I.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 98–102

Асимптотически точные оценки приближенного интегрирования криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых

П. А. Дадабоев

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан

Аннотация. В работе рассматривается задача о приближённом вычислении криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и классов пространственных кривых, задаваемых модулями непрерывности. Вычислены асимптотически точные оценки погрешности квадратурной формулы прямоугольников на рассматриваемых классах функций и кривых.

Пусть функция $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ определена и интегрируема вдоль кривой $\Gamma \subset R^m$ и

$$J(f;\Gamma) := \int\limits_{\Gamma} f(M)dt = \int\limits_{\Gamma} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)dt. \tag{1}$$

Предположим, что на кривой Γ установлено положительное направление так, что положение точки $M = M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ на кривой может быть определено длиной дуги $t = \smile{AM}$, отсчитываемой от начальной точки A. Тогда кривая Γ параметрически выразится уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(t),\ x_2 = \varphi_2(t),\ \ldots,\ x_m = \varphi_m(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant L, \tag{2}$$

а функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, заданная в точках кривой, сведётся к сложной функции $f(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t), \ldots,\ \varphi_m(t))$ от переменной t. Хорошо известно, что в этом случае интеграл (1) запишется в виде следующего определённого интеграла

$$J(f;\Gamma) = \int\limits_0^L f(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t), \ldots,\ \varphi_m(t))\,dt. \tag{3}$$

Всякая квадратурная формула

$$J(f;\Gamma) \approx \mathcal{L}_N(f;\Gamma;P,T) := \sum_{k=1}^{N} p_k\, f\Big(\varphi_1(t_k),\ \varphi_2(t_k), \ldots,\ \varphi_m(t_k)\Big) \tag{4}$$

для приближённого вычисления интеграла (3) задаётся векторами коэффициентов

$$P = \{p_k\}_{k=1}^{N}, \quad \text{где} \quad p_1, p_2, \ldots, p_N$$

– произвольные действительные числа, и векторами узлов

$$T = \{t_k:\ 0 \leqslant t_1 < \ldots < t_N \leqslant L\}.$$

Погрешность квадратурной формулы (4) обозначим

$$\Big|R_N(f;\Gamma)\Big| := \Big|R_N(f;\Gamma;P,T)\Big| = \Big|J(f;\Gamma) - \mathcal{L}_N(f;\Gamma;P,T)\Big|.$$

© П. А. Дадабоев, 2016

Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций $\{f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))\}$, определённых в точках кривой Γ и интегрируемых как сложные функции параметра t на отрезке $[0, L]$, то за величину, характеризующую точную оценку погрешности, примем верхнюю грань

$$R_N(\mathfrak{M}; \Gamma; P, T) = \sup\left\{ \Big| R_N(f; \Gamma; P, T) \Big| : \ f \in \mathfrak{M} \right\}.$$

Пусть $\mathfrak{N}(L)$ – класс кривых Γ, заданных параметрическими уравнениями (2), длина которых равна L. Наибольшую погрешность квадратурной формулы (4) всего класса функций $\mathfrak{M}$ на классе кривых $\mathfrak{N}(L)$ обозначим

$$R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}(L); P, T) = \sup\Big\{ R_N(\mathfrak{M}; \Gamma; P, T) : \ \Gamma \subset \mathfrak{N}(L) \Big\}.$$

Для вычисления последней величины, потребуем, чтобы формула (4) была точна для функции $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)) = \mathrm{const}$, то есть чтобы выполнялось равенство

$$\int\limits_0^L dt = \sum_{k=1}^N p_k = L.$$

Обозначим через $H^\omega := H^\omega[0, L]$ – множество функций $\varphi \in C[0, L]$, удовлетворяющих условию

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leqslant \omega\left(|t' - t''|\right), \quad t', t'' \in [0, L],$$

где $\omega(\delta)$ – заданный модуль непрерывности, удовлетворяющий соотношениям

$$0 \leqslant \omega(t'') - \omega(t') \leqslant \omega(t'' - t'), \quad 0 \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant L, \quad \omega(0) = 0.$$

Через $H^{\,\omega_1, \ldots, \omega_m}[0, L]$ обозначим класс гладких кривых $\Gamma \subset R^m$, длиною L, заданных параметрическими уравнениями (2), у которых координатные функции $\varphi_i(t) \in H^{\omega_i}[0, L]$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

В случае $\omega_i(t) \equiv \omega(t), \ i = \overline{1, m}$ вместо $H^{\,\omega, \ldots, \omega}[0, L]$ будем писать $H^{\,\omega, m}[0, L]$. Если $\omega(t) = Kt^\alpha, \ K > 0, \ 0 < \alpha \leqslant 1$, то получим класс Гёльдера с константой K порядка α, которую обозначим $KH^{\alpha, m}[0, L]$.

Нам в дальнейшем понадобится новый вид формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, доказательство которой приведём в этом пункте. Чтобы вывести формулу Тейлора для сложной функции $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))$, введём операторное обозначение

$$\nabla \stackrel{def}{=} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial}{\partial \varphi_m} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial t}. \tag{5}$$

Используя это обозначение для сложной функции

$$F(t) \stackrel{def}{=} f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)), \tag{6}$$

запишем выражение первой производной функции (6) через оператор (5), полагая

$$\nabla f = \nabla f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)) :=$$

$$:= \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_m} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} = F'(t),$$

Аналогично для второй производной функции (6) имеем:

$$\nabla^{(2)} f = \nabla(\nabla f) = \Big(\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial}{\partial \varphi_m} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} \Big)^2 f =$$

$$= \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_i^2} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right)^2 + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} := F''(t), \quad j = \overline{1, m};$$

и для $r = 2, 3, \dots$ получаем рекуррентную формулу

$$F^{(r)}(t) = \nabla^{(r)} f := \nabla^{(r)} f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)) := \nabla(\nabla^{(r-1)} f). \tag{7}$$

Через $W^{(r)}H_m^\omega := W^{(r)}H_m^\omega[0, L]$ $(r \in \mathbb{N},\ W^{(0)}H_m^\omega \equiv H_m^\omega)$ обозначим множество функций $f(M) := f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t))$, у которых почти всюду в области Q существуют частные производные

$$\frac{\partial^r f}{\partial\varphi_i^{r-s}\partial{\varphi^s}_j}, \quad i, j = 0, 1, \dots, k,$$

и для любых двух точек $t^{'}, t^{''} \in [0, L]$ удовлетворяющих условию

$$\left|\nabla^{(r)} f(\varphi_1(t^{'}), \varphi_2(t^{'}), \dots, \varphi_m(t^{'})) - \nabla^{(r)} f(\varphi_1(t^{''}), \varphi_2(t^{''}), \dots, \varphi_m(t^{''}))\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \left|\varphi_i(t^{'}) - \varphi_i(t^{''})\right| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \omega_i |t^{'} - t^{''}|, \tag{8}$$

где $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1, m})$ – заданные модули непрерывности, то есть непрерывные неубывающие на отрезке $[0, L]$ функции такие, что $\omega_i(0) = 0$ $(i = \overline{1, m})$.

Пользуясь введёнными обозначениями, запишем формулу Тейлора разложения функции $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t))$ в произвольной точке $t_0 \in [0, L]$ по степеням разности $(t - t_0)$. В самом деле, записав формулу Тейлора для функции $F(t)$ по степеням $(t - t_0)$ в интегральной форме (см., напр. [1, с.21])

$$F(t) := \sum_{l=0}^{r-1} \frac{F^{(l)}(t_0)}{l!}(t - t_0)^l + \frac{1}{(r-1)!}\int_0^L (t - u)_+^{r-1} F^{(r)}(u) du, \tag{9}$$

где $u_+^l = [\max(0, u)]^l$, $l \in \mathbb{N}$ и выражая производные $F^{(l)}(t_0)$ по формуле (7), получаем формулу (9) в следующем виде:

$$F(t) := \sum_{l=0}^{r-1} \frac{1}{l!} \nabla^l f(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_m(t_0))(t - t_0)^l +$$

$$+ \frac{1}{(r-1)!}\int_0^L (t - u)_+^{r-1} \nabla^r f(\varphi_1(u), \varphi_2(u), \dots, \varphi_m(u)) du. \tag{10}$$

Найдём общий вид остатка квадратурной формулы (4) в предположении точности этой формулы на множестве полиномов степени $r - 1$. Имеем

$$R_N(f, \Gamma) = \int_0^L f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)) dt -$$

$$- \sum_{k=0}^{N} p_k f(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \dots, \varphi_m(t_k)) =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\int_0^L \mathcal{K}_r(t) \nabla^{(r)} f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)) dt, \tag{11}$$

где ядро $\mathcal{K}_r$ имеет вид

$$\mathcal{K}_r(t) = \left[\frac{(L - t)^r}{r} - \sum_{k=0}^{N} p_k (t_k - t)_+^{r-1}\right], \quad u_+^m := [\max(0, u)]^m. \tag{12}$$

Формулами (11) и (12) воспользуемся при выводе основных оценок погрешности на классах функций и классах кривых.

При приближённом вычислении криволинейных интегралов вида (1) воспользуемся аналогом классической формулы средних прямоугольников

$$\int\limits_0^L f\left(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\right) dt =$$

$$= \frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right),\, \varphi_2\left(\frac{2k-1}{2N}L\right),\, \ldots, \varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) + R_N(f;\Gamma). \tag{13}$$

В этой формуле вектор коэффициентов $\overline{P} = \{\bar{p}_k : \bar{p}_k = L/N\}_{k=1}^N$ и вектор узлов $\overline{T} = \{\bar{t}_k : \bar{t}_k = (2k-1)L/(2N)\}_{k=1}^N$ заданы и требуется определить погрешность формулы (13) на классах функций $W^{(1)}H_m^\omega$ и кривых $H^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}[0,L]$:

$$R_N\Big(W^{(1)}H_m^\omega; H^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}[0,L]; \overline{P}, \overline{T}\Big) =$$

$$= \sup\Big\{|R_N(f;\Gamma;\overline{P},\overline{T})| :\ f \in W^{(1)}H_m^\omega; \Gamma \in H^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}[0,L]\Big\}. \tag{14}$$

Записав для произвольной функции $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)) \in W^{(1)}H_m^\omega$ как сложной функции одного переменного $F(t) := f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))$ формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме (10), погрешность квадратурной формулы (13) представим в виде

$$R_N(f,\Gamma;\overline{P},\overline{T}) = \int\limits_0^L f\left(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t),\, \ldots,\, \varphi_m(t)\right) dt -$$

$$- \frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), \varphi_2\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), \ldots, \varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) =$$

$$= \int\limits_0^L \mathcal{K}_1(u)\, \nabla f\left(\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_m(u)\right) du. \tag{15}$$

Основным результатом данной работы является следующее утверждение, которое доказывается с помощью (15).

Теорема. *Для погрешности квадратурной формулы прямоугольников* (13) *на классах функций* $W^{(1)}H_m^\omega$ *и кривых* $\Gamma \in H^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *справедливы оценки*

$$R_N(W^{(1)}H_m^\omega; H^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}; \overline{P}, \overline{T}) = \theta_N L \sum_{i=1}^{m} \int\limits_0^{L/(4N)} \omega_i(t)dt, \quad \frac{1}{2} \leqslant \theta_N \leqslant \frac{5}{2}.$$

Если же $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1,m})$ *– выпуклые вверх на отрезке* $[0,L]$ *модули непрерывности, то имеет место предельное равенство*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{4NR_N(W^{(1)}H_m^\omega; H^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m})}{L\sum\limits_{i=1}^{N} \int\limits_0^{L/(2N)} \omega_i(t)dt} = 1.$$

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 *при* $\omega_i(t) = \omega(t)$ $(i = \overline{1,m})$ *имеем*

$$R_N(W^{(1)}H_m^{\omega}; H^{\,\omega,m}) = \theta_N mL \int\limits_0^{L/(4N)} \omega(t)dt, \quad \text{где} \quad \frac{1}{2} \leqslant \theta_N \leqslant \frac{5}{2}.$$

Если $\omega(t)$ *– выпуклый вверх модуль непрерывности, то*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{4R_N(W^{(1)}H_m^{\omega}; H^{\,\omega,m})}{mL \int\limits_0^{L/(2N)} \omega(t)dt} = 1.$$

В частности, если $\omega(t) = Kt^{\alpha}$, $K > 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, *то*

$$R_N(KW^{(1)}H_m^{\alpha}; KH^{\,\alpha,m}) = \frac{\theta_N mKL}{\alpha+1}\left(\frac{L}{4N}\right)^{\alpha+1}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{2} \leqslant \theta_N \leqslant \frac{5}{2}.$$

Список литературы

1. *Никольский С.М.* Квадратурные формулы. – Москва: Наука, 1988. 256 с.
2. *Вакарчук С.Б.* Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Укр. матем. журнал. 1986. Т. 38, № 5. С. 643–645.
3. *Шабозов М.Ш.*, *Мирпоччоев Ф.М.* Оптимизация приближённого интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // ДАН РТ. 2010. Т. 53, № 6. С. 415–419.
4. *Шабозов М.Ш.* О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых // Матем. заметки. 2014. Т. 96, № 7. С. 637–640.
5. *Шабозов М.Ш.*, *Тухлиев К.* Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности. // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета. 2015. Сер. 1. Т. 2(60). Вып. 4. С. 72–85.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 103–108

Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости

Г. Джангибеков

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан

Аннотация. В работе в лебеговых пространствах $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$ с весом для оператора

$$A = a(z)I + b(z)K + \Big(c(z)I + d(z)K\Big)S + \Big(e(z)I + h(z)K\Big)\overline{S} +$$
$$+\Big(\alpha(z)I + \gamma(z)K\Big)B + \Big(\delta(z)I + \nu(z)K\Big)\overline{B}, \quad (Kf)(z) = \overline{f(z)},\, z \in \overline{D},$$

где S — двумерный сингулярный оператор по ограниченной области D, а B — оператор с ядром Бергмана, установлены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости и получены формулы для вычисления индекса. Указанные результаты применены к задачам Дирихле и Неймана для общих эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с двумя функциями от двух независимых переменных. Гомотопическая классификация таких систем состоит из трех компонент связности, и в каждом классе получены простые необходимые и достаточные условия нётеровости и формулы для подсчета индекса указанных задач.

1. Введение

Пусть D — конечная односвязная область комплексной плоскости z, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова $\Gamma; \overline{D} = D \cup \Gamma, B(z, \zeta)$ — керн-функция Бергмана области D (см. [1, с. 252]), представимая в виде

$$B(z, \zeta) = \frac{\omega'(z)\overline{\omega'(\zeta)}}{\pi(1 - \omega(z)\overline{\omega'(\zeta)})^2},$$

где $\omega(z)$ — однолистное конформное отображение области D на единичный круг, штрих обозначает производную, а черта над функцией — комплексное сопряжение. Положим

$$(Sf)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} ds_\zeta, \quad (Kf)(z) = \overline{f(z)},$$

$$(Bf)(z) = \iint\limits_D B(z, \zeta) f(\zeta) ds_\zeta, \quad \overline{S} = KSK, \quad \overline{B} = KBK,$$

где ds_ζ — элемент плоской меры Лебега; первый интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

В лебеговых пространствах с весом $L^p_{\beta-2/p}(D),\ 1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2,$

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f(z)\colon |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D),\ ||f||_{L^p_{\beta-2/p}} = ||F||_{L^p}\},$$

© Г. Джангибеков, 2016

рассматривается сингулярный интегральный оператор

$$\begin{aligned} A = a(z)I+b(z)K + \Big(c(z)I + d(z)K\Big)S + \Big(e(z)I + h(z)K\Big)\overline{S} + \\ + \Big(\alpha(z)I + \gamma(z)K\Big)B + \Big(\delta(z)I + \nu(z)K\Big)\overline{B}, \end{aligned} \tag{1}$$

где I — тождественный оператор, $a(z),\ b(z),\ c(z),\ d(z),\ e(z),\ h(z),\ \alpha(z),\ \gamma(z),\ \delta(z),\ \nu(z)$ — непрерывные в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ комплекснозначные функции.

Операторы вида (1) играют важную роль в теории обобщенных аналитических функций [2] и широко применяются при изучении различных краевых задач для эллиптических систем уравнений первого и второго порядка на плоскости [3, 4]. Поэтому получение эффективных условий нётеровости и формулы для индекса оператора A представляет практический интерес.

В работе [5] были установлены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости оператора A в пространствах $L^p_{\beta-2/p}(D), 1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$, и получены формулы для вычисления индекса оператора. Указанные результаты там же были применены к задачам Дирихле и Неймана для общих эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с двумя функциями от двух независимых переменных. Гомотопическая классификация таких систем состоит из трех компонент связности и в каждом классе получены простые необходимые и достаточные условия нётеровости и формулы для подсчета индекса указанных задач. Отметим, что в случае, когда система сильно эллиптична, с помощью метода сжатых отображений фредгольмовость указанных задач доказана Б. Боярским [3].

2. Гомотопическая классификация и свойства нётеровости

Введем в $\overline{D}$ следующие вспомогательные функции (при этом ради простоты записи аргументы, входящие в формулы функции, опускаются):

$$\Delta_0 = |a|^2 - |b|^2, \quad \Delta_1 = |c|^2 - |d|^2, \quad \Delta_{-1} = |e|^2 - |h|^2,$$

$$\lambda_0 = \bar{a}c - b\bar{d}, \quad \lambda_1 = \bar{h}c - e\bar{d}, \quad \lambda_{-1} = \bar{a}e - b\bar{h},$$

$$\mu_0 = a\bar{d} - \bar{b}c, \quad \mu_1 = h\bar{d} - \bar{e}c, \quad \mu_{-1} = a\bar{h} - \bar{b}e,$$

$$\alpha_1 = \bar{a}\alpha - b\bar{\gamma}, \quad \gamma_1 = \bar{a}\gamma - b\bar{\alpha}, \quad \delta_1 = \bar{a}\delta - b\bar{\nu}, \quad \nu_1 = \bar{a}\nu - b\bar{\delta},$$

$$\alpha_2 = \bar{d}\alpha - c\bar{\gamma}, \quad \gamma_2 = \bar{d}\gamma - c\bar{\alpha}, \quad \delta_2 = \bar{d}\delta - c\bar{\nu}, \quad \nu_2 = \bar{d}\nu - c\bar{\delta},$$

$$\alpha_3 = \bar{e}\alpha - h\bar{\gamma}, \quad \gamma_2 = \bar{e}\gamma - h\bar{\alpha}, \quad \delta_2 = \bar{e}\delta - h\bar{\nu}, \quad \nu_2 = \bar{e}\nu - h\bar{\delta},$$

$$\alpha_{12} = v_1\alpha_1 + \overline{w}_1\nu_1, \quad \gamma_{12} = v_1\gamma_1 + \overline{w}_1\delta_1, \quad \delta_{12} = v_1\delta_1 + \overline{w}\gamma_1, \quad \nu_{12} = v_1\nu_1 + \overline{w}\alpha_1,$$

$$v_1 = \overline{\lambda}_{-1} + \mu_{-1}\beta_1 q_1, \quad w_1 = \overline{\mu}_{-1} + \lambda_{-1}\beta_1 q_1,$$

$$\beta_1 = \Big(-\Delta_0\overline{\mu}_{-1} + (\overline{\lambda}_{-1}\overline{\mu}_0 - \mu_{-1}\lambda_0)q_1\Big)\Big(|\lambda_{-1}|^2 - |\mu_{-1}|^2 + \Delta_0\lambda_{-1}q_1 + (\lambda_{-1}\overline{\lambda}_0 - \mu_{-1}\overline{\mu}_0)q_1^2\Big)^{-1},$$

$$\omega_0 = (1 + \delta_{12})(1 - |\beta_1|^2 + \overline{\alpha}_{12} + \bar{q}_1 q_2) - (\gamma_{12} - \beta_1 q_2)(\overline{\nu}_{12} - \beta_1 q_1),$$

$$\alpha_{21} = \alpha_2 - \beta_2 q_1\overline{\gamma}_2, \quad \gamma_{21} = \gamma_2 - \beta_2 q_1\overline{\alpha}_2, \quad \delta_{21} = \delta_2 - \beta_2 q_1\overline{\gamma}_2, \quad \nu_{21} = \nu_2 - \beta_2 q_1\overline{\delta}_2,$$

$$\alpha_{31} = \alpha_3 - \beta_3 q_1\overline{\gamma}_3, \quad \gamma_{31} = \gamma_3 - \beta_3 q_1\overline{\alpha}_3, \quad \delta_{31} = \delta_3 - \beta_3 q_1\overline{\gamma}_3, \quad \nu_{31} = \nu_3 - \beta_3 q_1\overline{\delta}_3,$$

$$\beta_2 = \Big(\mu_0 - \lambda_1 q_1\Big)\Big(\Delta_1 - \overline{\lambda}_0 q_1 + \overline{\mu}_1 q_1^2\Big)^{-1},$$

$$\omega_1 = (\overline{\beta}_2 + \overline{\delta}_{21})(|\beta_2|^2 - 1 + \alpha_{21}\overline{\beta}_2 + q_1\bar{q}_2\overline{\beta}_2)^2 - (\overline{\gamma}_{21} - q_1)(\nu_{21} - \bar{q}_2)\overline{\beta}_2,$$

$$M = \max_{|t|=1} Re\Big(\mu_1 t^2 - (\lambda_0 + \overline{\lambda}_{-1})t\Big), \quad -m = \min_{|t|=1} Re\Big(\mu_1 t^2 - (\lambda_0 + \overline{\lambda}_{-1})t\Big),$$

здесь $q_1(z),\ q_2(z)$ — корни тригонометрического полинома

$$P_4(t) = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_{-1} - 2Re\{\mu_1 t^2 - (\lambda_0 + \overline{\lambda}_{-1})t\}, \quad t = e^{2i\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

такие, что $|q_1(z)| < 1$, $|q_2(z)| < 1$ для всех $z \in \overline{D}$. Через ω_{-1} обозначим функцию, полученную из ω_1 заменой $\overline{\lambda}_{-1}$, $\overline{\omega}_{-1}$, Δ_{-1}, $\overline{\lambda}_1$, α_{21}, ν_{21}, δ_{21}, γ_{21} соответственно на λ_0, μ_0, Δ_1, $\overline{\delta}_{31}$, ν_{31}, $\overline{\alpha}_{31}$, $\overline{\gamma}_{31}$.

Теорема 1. *Для нётеровости оператора A в пространствах $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty$, $0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий:*

$$|\Delta_0(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + |\mu_0(z)|^2 - |\lambda_0(z)|^2 + |\mu_{-1}(z)|^2 - |\lambda_{-1}(z)|^2}, \quad \omega_0(t) \neq 0, \quad \text{для} \quad \forall z \in \overline{D},\, t \in \Gamma; \tag{2}$$

$$|\Delta_1(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + |\mu_0(z)|^2 - |\lambda_0(z)|^2 + |\mu_1(z)|^2 - |\lambda_1(z)|^2}, \quad \omega_1(t) \neq 0, \quad \text{для} \quad \forall z \in \overline{D},\, t \in \Gamma; \tag{3}$$

$$|\Delta_{-1}(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + |\mu_{-1}(z)|^2 - |\lambda_{-1}(z)|^2 + |\mu_1(z)|^2 - |\lambda_1(z)|^2}, \quad \omega_{-1}(t) \neq 0, \quad \text{для} \quad \forall z \in \overline{D},\, t \in \Gamma; \tag{4}$$

где

$$\chi(z) = \begin{cases} M(z), & \text{если } \Delta_j(z) > 0; \\ m(z), & \text{если } \Delta_j(z) < 0,\ j = 0, 1, -1. \end{cases}$$

При этом если выполнено одно из условий (2)–(4), то индекс оператора A равен

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma \omega_j(t).$$

Рассмотрим теперь общую эллиптическую систему дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными

$$\sum_{j=0}^{2} a_j(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^{2-j} \partial y^j} + b_1(x,y) \frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x,y) \frac{\partial u}{\partial y} + b_0(x,y) u = g(x,y), \tag{5}$$

где $a_j(x,y)$, $b_j(x,y)$ $(j = 0, 1, 2)$ — квадратные матрицы размера 2×2, $u = (u_1, u_2)$ — неизвестная вектор-функция; $g = (g_1, g_2)$ — заданная вектор-функция переменных x, y.

Оператор из левой части (5) называется эллиптическим в $\overline{D}$, если в любой точке $(x, y) \in \overline{D}$ для всякого действительного параметра ξ выполняется условие

$$det \sum_{j=0}^{2} a_j(x,y) \xi^j \neq 0. \tag{6}$$

Вводя комплексную функцию $W(z) = u_1(x,y) + iu_2(x,y)$, $z = x + iy$, умножая одно из уравнений (5) на мнимую единицу i и складывая с другим, мы можем систему (5) записать в комплексном виде

$$\begin{aligned} &a(z)W_{z\bar{z}} + b(z)\overline{W}_{\bar{z}z} + c(z)W_{zz} + d(z)\overline{W}_{\bar{z}\bar{z}} + e(z)W_{\bar{z}\bar{z}} + h(z)\overline{W}_{zz} + \\ &+ a_1(z)W_{\bar{z}} + b_1(z)\overline{W}_z + c_1(z)W_z + d_1(z)\overline{W}_{\bar{z}} + e_1(z)W + h_1(z)\overline{W} = g(z), \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big).$$

Будем считать, что коэффициенты уравнения (5) являются непрерывными в $\overline{D}$ функциями, а $g(z) \in L^p(D)$, $2 < p < \infty$. По главной части системы (7) построим матричный полином

$$F_z(t) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)\bar{t} + e(z)t & b(z) + d(z)t + h(z)\bar{t} \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\bar{t} + \overline{h(z)}t & \overline{a(z)} + \overline{c(z)}t + \overline{e(z)}\bar{t} \end{pmatrix},$$

где $|t| = 1, z \in \overline{D}$. Эллиптичность системы (7) означает, что выполнено неравенство

$$detF_z(t) = |a(z) + c(z)\bar{t} + e(z)t|^2 - |b(z) + d(z)t + h(z)\bar{t}|^2 \neq 0 \tag{8}$$

для любых $z \in \overline{D},\ |t| = 1$. Множество всех полиномиальных матриц вида $F_z(t)$, удовлетворяющих условию $detF_z(t) = |P_z(t)|^2 - |Q_z(t)|^2 < 0\ (> 0)$ для всех $z \in \overline{D},\ |t| = 1$, обозначим через F^- (F^+), где

$$P_z(t) = \overline{c(z)}t^2 + \overline{a(z)}\bar{t} + \overline{e(z)}, \quad Q_z(t) = d(z)t^2 + b(z)t + h(z).$$

Две матрицы $F_z^1(t),\ F_z^2(t)$ из F^- будем считать гомотопными, если существует матрица-функция $F_z^-(t,\tau) \in F^-$, непрерывно зависящая от действительного параметра $\tau \in [0,1]$, такая, что

$$F_z^-(t;0 \equiv F_z^1(t), \quad F_z^-(t;1) \equiv F_z^2(t).$$

Известно [3], что соотношение гомотопии разбивает F^- на три класса гомотопии – связанные, открытые компоненты:

γ_0) $Ind_{|t|=1}\frac{Q_z(t)}{t} = -1$, т. е. квадратный трехчлен $Q_z(t)$ внутри круга $|t| = 1$ корней не имеет;

γ_1) $Ind_{|t|=1}\frac{Q_z(t)}{t} = 0$, т. е. квадратный трехчлен $Q_z(t)$ внутри круга $|t| = 1$ имеет один корень;

γ_2) $Ind_{|t|=1}\frac{Q_z(t)}{t} = 1$, т. е. квадратный трехчлен $Q_z(t)$ внутри круга $|t| = 1$ имеет два корня.

Эти классы образуют полную систему множества F^-, т. е. F_z^1 и F_z^2 из F^- принадлежат некоторому классу $\gamma_k,\ k = 0,1,2$, тогда и только тогда, когда $F_z^1 \sim F_z^2$.

Устанавливается, что для классов гомотопии γ_k при фиксированном k выполняется одно и только одно из неравенств (9)–(11):

$$|\Delta_0(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + |\mu_0(z)|^2 - |\lambda_0(z)|^0 + |\mu_{-1}(z)|^2 - |\lambda_{-1}(z)|^2}\,, \tag{9}$$

$$|\Delta_1(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + |\mu_0(z)|^2 - |\lambda_0(z)|^2 + |\mu_1(z)|^2 - |\lambda_1(z)|^2}\,, \tag{10}$$

$$|\Delta_{-1}(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + |\mu_{-1}(z)|^2 - |\lambda_{-1}(z)|^2 + |\mu_1(z)|^2 - |\lambda_1(z)|^2}\,,\ \forall z \in \overline{D}. \tag{11}$$

Имеет место

Лемма 1. *Пусть* $|P_z(t)| < |Q_z(t)|$ *для всех* $z \in \overline{D},\ |t| = 1$. *Тогда для выполнения неравенства* (9), (10) *или* (11) *необходимо и достаточно, чтобы соответственно* $Ind_{|t|=1}\frac{Q_z(t)}{t} = 0,\ Ind_{|t|=1}\frac{Q_z(t)}{t} = 1$ *или* $Ind_{|t|=1}\frac{Q_z(t)}{t} = -1$.

Если $|P_z(t)| < |Q_z(t)|$, *то роль* $Q_z(t)$ *сыграет* $P_z(t)$.

В соответствии с гомотопическими классами $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_0$, т. е. условиями (9), (10), (11), эллиптическая система (7) эквивалентным образом приводится к одному из трех видов:

$$\Delta_0(z)W_{z\bar{z}} + \lambda_0(z)W_{zz} + \bar{\mu}_0(z)\overline{W}_{\bar{z}\bar{z}} + \lambda_{-1}(z)W_{z\bar{z}} + \bar{\mu}_{-1}(z)\overline{W}_{zz} + T_1 = g_0(z),$$

$$\mu_0(z)W_{z\bar{z}} - \lambda_0(z)\overline{W}_{\bar{z}z} - \Delta_1(z)\overline{W}_{\bar{z}\bar{z}} - \lambda_1(z)W_{\bar{z}\bar{z}} + \mu_1(z)\overline{W}_{zz} + T_2 = g_1(z),$$

$$\mu_{-1}(z)W_{z\bar{z}} - \lambda_{-1}(z)\overline{W}_{\bar{z}z} + \lambda_1(z)W_{zz} + \bar{\mu}_1(z)\overline{W}_{\bar{z}\bar{z}} - \Delta_{-1}(z)\overline{W}_{zz} + T_3 = g_{-1}(z),$$

где $g_0 = \bar{a}g - b\bar{g},\ g_1 = \bar{d}g - c\bar{g},\ g_{-1} = \bar{h}g - e\bar{g}$; $T_j(W)$ — младшие члены.

Замечание. Типичными представителями гомотопических классов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_0$ соответственно являются дифференциальные уравнения с оператором Лапласса $W_{z\bar{z}} = g_0(z)$; сопряженное уравнение А. В. Бицадзе [6] $W_{zz} = g_1(z)$; уравнение А. В. Бицадзе $W_{\bar{z}\bar{z}} = g_{-1}(z)$.

3. Задача Дирихле

Найти непрерывные решения системы дифференциальных уравнений (7) в области D из класса $W_p^2(D),\ 2 < p < \infty$, удовлетворяющие на границе Γ условию

$$W(t)|_\Gamma = 0. \tag{12}$$

Как известно [2–4], все функции $W(z)$, обладающие в D обобщенными производными второго порядка, непрерывные в $\overline{D}$ и удовлетворяющие на Γ условию (12), единственным образом представляются в виде

$$W(z) = \iint_D G(z,\zeta) f(\zeta) ds_\zeta,$$

где

$$G(z,\zeta) = -\frac{2}{\pi} \ln\left| \frac{\zeta - z}{1 - z\overline{\zeta}} \right|$$

есть функция Грина Задачи Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге, $f(z)$ – неизвестная функция из пространства $L^p(D)$, $2 < p < \infty$. Тогда, как известно, для производных функции $W(z)$ справедливы формулы

$$W_{z\overline{z}} = f(z), \quad \overline{W}_{z\overline{z}} = \overline{f(z)},$$

$$W_{zz} = (Sf)(z) + \overline{z}^2 (Bf)(z) + T_1, \quad W_{\overline{z}\overline{z}} = (\overline{S}f)(z) + z^2 (\overline{B}f)(z) + T_2,$$

$$\overline{W}_{\overline{z}\overline{z}} = (\overline{S}\overline{f})(z) + z^2 (\overline{B}\overline{f})(z) + T_3, \quad \overline{W}_{zz} = (S\overline{f})(z) + \overline{z}^2 (B\overline{f})(z) + T_4,$$

где T_j – компактные в $L^P(D), 2 < p < \infty$ операторы. В силу этих формул получим, что задача Дирихле для системы (7) в соответствии с классами гомотопии $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_0$ эквивалентна одному из трех сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} &\Delta_0(z) f(z) + \lambda_0(z) \Big(S + \overline{z}^2 B\Big) f(z) + \overline{\mu_0(z)} \Big(\overline{S} + z^2 \overline{B}\Big) \overline{f(z)} + \\ &+ \lambda_{-1}(z) \Big(\overline{S} + z^2 \overline{B}\Big) f(z) + \overline{\mu_{-1}(z)} \Big(S + \overline{z}^2 B\Big) \overline{f(z)} + T_1 = g_0(z), \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\mu_0(z) f(z) - \lambda_0(z) \overline{f(z)} - \Delta_1(z) \Big(\overline{S} + z^2 \overline{B}\Big) \overline{f(z)} - \\ &- \lambda_1(z) \Big(\overline{S} + z^2 B\Big) f(z) + \mu_1(z) \Big(S + \overline{z}^2 B\Big) \overline{f(z)} + T_2 = g_1(z), \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &\mu_{-1}(z) f(z) - \lambda_{-1}(z) \overline{f(z)} + \lambda_1(z) \Big(S + \overline{z}^2 B\Big) f(z) + \\ &+ \overline{\mu_1(z)} \Big(\overline{S} + z^2 \overline{B}\Big) \overline{f(z)} - \Delta_{-1}(z) \Big(S + \overline{z}^2 B\Big) \overline{f(z)} + T_3 = g_{-1}(z). \end{aligned} \tag{15}$$

Применяя к уравнениям (13)–(15) теорему 1, получим, что справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы задача Дирихле* (12) *для эллиптической системы* (7) *была нётеровой, необходимо и достаточно выполнения одного из следующих* (*исключающих друг друга*) *условий*:

а) *неравенство* (9) *для всех* $z \in \overline{D}$;

б) *неравенство* (10) *для всех* $z \in \overline{D}$ *и* $a(t)\overline{d(t)} - \overline{b(t)}c(t) \neq 0, \forall t \in \Gamma$;

в) *неравенство* (11) *для всех* $z \in \overline{D}$ *и* $a(t)\overline{h(t)} - \overline{b(t)}e(t) \neq 0, \forall t \in \Gamma$;

При этом если выполнено условие а, *то задача фредгольмова*; *если выполнено условие* б, *то индекс задачи равен*

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma(a(t)\overline{d(t)} - \overline{b(t)}c(t));$$

если выполнено условие в, *то*

$$\varkappa = -2Ind_\Gamma(a(t)\overline{h(t)} - \overline{b(t)}e(t)).$$

4. Задача Неймана

Найти непрерывные решения системы (7) в области $\overline{D}$ из класса $W_p^2(D),\ 2 < p < \infty$, удовлетворяющие на границе Γ условию

$$\frac{\partial W}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma} = 0, \qquad (16)$$

где ν — внешняя нормаль к Γ.

Поскольку [2–4] любая функция, обладающая в D обобщенными производными второго порядка с непрерывными в $\overline{D}$ первыми производными, удовлетворяющая условиям (16) и

$$\int_{\Gamma} W(z) ds_z = 0,$$

может быть единственным образом представлена в виде

$$W(z) = \iint_D \widehat{G}(z,\zeta) f(\zeta) ds_\zeta, \quad f(z) \in L^p(D), \quad 2 < p < \infty,$$

где

$$\widehat{G}(z,\zeta) = -\frac{2}{\pi} \ln |(\zeta - z)(1 - z\bar{\zeta})| - \frac{1}{\pi}(|\zeta|^2 - |z|^2) + 3/4$$

есть функция Неймана для единичного круга, то так же, как и в случае задачи Дирихле, устанавливаются необходимые и достаточные условия нётеровости и формулы для индекса, ибо указанная задача с точностью до вполне непрерывных операторов сводится к тем же сингулярным интегральным уравнениям (13)–(15).

Для примера отметим, что краевые задачи Дирихле и Неймана для известного уравнения А. В. Бицадзе (см., например, [6, гл. 2, § 1]) $W_{\bar{z}\bar{z}} = g(z)$ не нётеровы по той причине, что в уравнении (15) функции $\mu_{-1}(z), \lambda_{-1}(z), \mu_1(z), \lambda_1(z)$ тождественно равны нулю в замкнутой области $\overline{D}$, вследствие чего граничное условие нётеровости

$$a(t)\overline{h(t)} - \overline{b(t)}e(t) \neq 0$$

для всех $t \in \Gamma$ нарушается.

Список литературы

1. *Курант Р.* Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. – М. 1953. С. 811-815.
2. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз. 1959. 627 с.
3. *Боярский Б.В.* Исследование по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций. – Докт. дис. М. 1960.
4. *Джураев А.* Метод сингулярных интегральных уравнений. – М. 1987. 415 с.
5. *Джангибеков Г.* Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости // ДАН России. 1993. Т. 330. № 4. С. 415–419.
6. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука. 1981. 448 с.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 109–112

Наилучшее среднеквадратическое приближение суммируемой функции на вещественной оси целыми функциями экспоненциального типа

О. А. Джурахонов

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан

Аннотация. В статье получены точные неравенства типа Джексона – Стечкина между наилучшими среднеквадратическими приближениями целыми функциями и усреднёнными с весом значениями модулей непрерывности m-го порядка.

1. В сообщение рассматривается экстремальная задача среднеквадратического приближения функций, суммируемых с квадратом на всей оси $R := (-\infty, \infty)$, целыми функциями экспоненциального типа. Обстоятельный обзор полученных точных результатов по этой тематике в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ и их сравнение с аналогичными результатами, полученными на различных классах периодических функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ с хронологическим анализом, приведены в статье [1]. Всюду далее под $L_2(\mathbb{R})$ будем понимать пространство всех вещественных измеримых на $\mathbb{R}$ функций f, удовлетворяющих условию

$$\|f\| := \|f\|_{L_2(\mathbb{R})} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Через $L_2^{(r)}(\mathbb{R}),\ r \in \mathbb{N}$, обозначим класс функций $f \in L_2(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ $(r \in \mathbb{N},\ f^{(0)} \equiv f)$ локально абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат $L_2(\mathbb{R})$. Символом $\mathbb{B}_{\sigma,2}$ $(0 < \sigma < \infty)$ обозначим сужение на $\mathbb{R}$ множества всех целых функции экспоненциального типа σ, принадлежащих пространству $L_2(\mathbb{R})$. Величину

$$A_\sigma(f) := A_\sigma(f)_{L_2(\mathbb{R})} = \inf\Big\{\ \|f - g_\sigma\| : g_\sigma\ \in \mathbb{B}_\sigma\Big\},$$

где $f \in L_2(\mathbb{R})$, называют наилучшим приближением функции f элементами множества $\mathbb{B}_{\sigma,2}$ в метрике пространства $L_2(\mathbb{R})$.

В $[2, 3]$ доказано, что для произвольной функции $f{\in}L_2(\mathbb{R})$ существует единственная целая функция $\Lambda_\sigma{\in}\mathbb{B}_{\sigma,2}$, которая наименее уклоняется от f в метрике пространства $L_2(\mathbb{R})$ и имеет вид

$$\Lambda_\sigma(f, x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{ix\tau}\chi_\sigma(\tau)F(f,\tau)d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{ix\tau}F(f,\tau)d\tau,$$

где $F(f)$ — преобразование Фурье функции f; χ_σ — характеристическая функция множества $(-\sigma, \sigma)$. При этом для квадрата величины наилучшего среднеквадратичного прибли-

© О. А. Джурахонов, 2016

жения функции $f\in L_2(\mathbb{R})$ множеством $\mathbb{B}_\sigma$ имеет место равенство [2], [3].

$$A_\sigma^2(f)=\|f-\Lambda_\sigma(f)\|^2=\int\limits_{|\tau|\geqslant\sigma}|F(f,\tau)|^2d\tau. \tag{1}$$

В [2] отмечалось, что для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$ справедливо также неравенство

$$A_\sigma(f)\leqslant\sigma^{-r}A_\sigma(f^{(r)}). \tag{2}$$

Равенством

$$\omega_m(f,t):=\omega_m(f,t)_{L_2(\mathbb{R})}=\sup\left\{\|\Delta_h^m(f)\|:|h|\leqslant t\right\},0\leqslant t<\infty,$$

где

$$\Delta_h^m(f,x):=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}f(x+kh)$$

— конечная разность m-го порядка функции f в точке x с шагом h, определим модуль непрерывности m-го порядка функции $f\in L_2(\mathbb{R})$.

Пусть теперь функция $f\in L_2(\mathbb{R})$ не эквивалентна нулю, а F-преобразование Фурье функции f. Используя свойство преобразования Фурье, запишем равенство

$$F\big(\Delta_h^m(f),t\big)=(e^{iht}-1)^mF(f,t). \tag{3}$$

Так как $\Delta_h^m(f)\in L_2(\mathbb{R})$, то по теореме Планшереля функция $F\big(\Delta_h^m(f)\big)\in L_2(\mathbb{R})$ и обе эти функции имеют одинаковые нормы, а потому из (3) следует, что

$$\|\Delta_h^m(f)\|^2=2^m\int\limits_{\mathbb{R}}|F(f,u)|^2\big(1-\cos(hu)\big)^mdu. \tag{4}$$

Учитывая определение модуля непрерывности m-го порядка и равенство (4), запишем

$$\omega_m^2(f,t)=2^m\sup_{|h|\leqslant t}\int\limits_{\mathbb{R}}|F(f,u)|^2\big(1-\cos(hu)\big)^mdu\geqslant$$

$$\geqslant\sup_{|h|\leqslant t}\int\limits_{|u|\geqslant\sigma}|F(f,u)|^2\left(2\sin\frac{hu}{2}\right)^{2m}du. \tag{5}$$

Воспользовавшись тождеством (см.,напр.[4], с.39,1-320)

$$\left(2\sin\frac{hu}{2}\right)^{2m}=C_{2m}^m-2\sum_{l=1}^{m}(-1)^{l+1}C_{2m}^{m-l}\cos(hlu),$$

перепишем неравенство (5) в следующем виде

$$\omega_m^2(f,t)\geqslant\sup_{|h|\leqslant t}\int\limits_{|u|\geqslant\sigma}|F(f,u)|^2\cdot\left(C_{2m}^m-2\sum_{l=1}^{m}(-1)^{l+1}C_{2m}^{m-l}\cos(hlu)\right)du=$$

$$=C_{2m}^m\cdot A_\sigma^2(f)-2\inf_{|h|\leqslant t}\int\limits_{|u|\geqslant\sigma}|F(f,u)|^2\sum_{l=1}^{m}(-1)^{l+1}C_{2m}^{m-l}\cos(hlu)du. \tag{6}$$

Неравенством (6) воспользуемся при доказательстве утверждения теоремы 2, приведенной чуть ниже.

2. В случае аппроксимации 2π-периодической функции $f\in L_2[0,2\pi]$ подпространством $\mathscr{T}_{n-1}$ тригонометрических полиномов T_{n-1} порядка $n-1$ в метрике пространства $L_2[0,2\pi]$ для величины наилучшего приближения

$$E_{n-1}(f):=\inf\left\{\|f-T_{n-1}\|_{L_2[0,2\pi]}:T_{n-1}\in\mathscr{T}_{n-1}\right\}$$

получен ряд точных результатов на классах функций.

Так, например, в [5] фактически доказано, что для произвольной функции $f \in L_2[0, 2\pi]$ и любых фиксированных $m, n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2[0,2\pi]\\ f\neq const}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\dfrac{n}{4}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi/n} \widetilde{\omega}_m^2(f,t)\varphi_n(t)dt\right)^{1/2}} = (C_{2m}^m)^{-1/2}, \tag{7}$$

где $\varphi_n(t) = \sin\frac{nt}{2} + \frac{1}{2}\sin t$, а $\widetilde{\omega}_m(f,t)$ - модуль непрерывности m-го порядка функции $f{\in}L_2[0, 2\pi]$. Более того, если $f{\in}L_2^{(r)}[0, 2\pi], f \neq const$, то

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}[0,2\pi]} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\dfrac{n}{4}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi/n} \widetilde{\omega}_m^2(f^{(r)},t)\varphi_n(t)dt\right)^{1/2}} = (C_{2m}^m)^{-1/2}. \tag{8}$$

Неравенства (7) и (8) на случай наилучшего среднеквадратичного приближения целыми функциями экспоненциального типа $\sigma \in \mathbb{R}_+$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ распространены В. Ю. Поповым [3]. Он доказал, что для любой $f{\in}L_2(\mathbb{R})$, f не эквивалентна нулю, и для любых фиксированных $m, n \in \mathbb{N}$ $(n > m)$ справедливо равенство

$$\sup_{f\in L_2(\mathbb{R})} \frac{A_\sigma(f)}{\left(\dfrac{\sigma}{4}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi/\sigma} \omega_m^2(f,t)\varphi_\sigma(t)dt\right)^{1/2}} = (C_{2m}^m)^{-1/2}, \tag{9}$$

а если $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$ и $f^{(r)}$ не эквивалентна нулю, то

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\sigma^r A_{\sigma(f)}}{\left(\dfrac{\sigma}{4}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi/\sigma} \omega_m^2(f^{(r)},t)\varphi_\sigma(t)dt\right)^{1/2}} = (C_{2m}^m)^{-1/2}, \tag{10}$$

где $\varphi_\sigma(t) = \sin(\sigma t/2) + (1/2)\sin\sigma t$.

Хорошо известно [6, с. 232], что если $f \in L_2(\mathbb{R})$, то все промежуточные производные $f^{(r-\nu)}(\nu = 1, 2, \ldots, r-1;\ r = 2, 3, \ldots,)$ также принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R})$, как и сама функция f, а поэтому определенный интерес представляет вычисление экстремальных характеристик, содержащих величины наилучших приближений $A_\sigma(f^{(r-\nu)})$ промежуточных производных элементами подпространства $\mathbb{B}_\sigma$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$.

Теорема 1. *Пусть $r, m \in \mathbb{N}, \nu = 0, 1, 2, \ldots, r;\ r = 2, 3, \ldots;$ и $\sigma > m$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\sigma^\nu A_\sigma(f^{(r-\nu)})}{\left(\dfrac{\sigma}{4}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi/\sigma} \omega_m^2(f^{(r)},t)\varphi_\sigma(t)dt\right)^{1/2}} = (C_{2m}^m)^{-1/2}. \tag{11}$$

Верхняя грань в левой части (11) вычисляется по всем функциям $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, производные $f^{(r)}$ которых не эквивалентны нулю.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 справедливо неравенство*

$$A_\sigma(f^{(r-\nu)}) \leqslant \frac{(C_{2m}^m)^{-1/2}}{\sigma^\nu}\omega_m\left(f^{(r)}, \frac{2\pi}{\sigma}\right), \quad \nu = 1, 2, \ldots, r. \tag{12}$$

Теорема 2. *Для произвольной функции* $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, *у которой* $f^{(r)}$ *не эквивалентна нулю и* $\omega_m^2(f^{(r)}, t)$ *— выпуклая вверх функция, при любом* $\sigma \geqslant 2$, $\ m, r \in \mathbb{N}, \nu = 0, 1, \ldots, r$, *справедливо неравенство*

$$A_\sigma(f^{(r-\nu)}) \leqslant \frac{(C_{2m}^m)^{-1/2}}{\sigma^\nu} \omega_m\left(f^{(r)}, \frac{3\pi}{4\sigma}\right). \tag{13}$$

При $r = \nu = 0$ *константу* $(C_{2m}^m)^{-1/2}$ *в правой части* (13) *при любых фиксированных* $m \in \mathbb{N}$ *и* $\sigma \geqslant 2$ *нельзя заменить меньшей во всем классе функций из* $L_2(\mathbb{R})$.

Отметим, что аналогичные результаты, когда вместо весовой функции $\varphi_\sigma(t)$ рассматривается функция $\sin nt$, получены в [7].

Список литературы

1. *Vakarchuk S.B.* On some extremal problems of approximation thory of function on the real axis // I. J. Math. Sciences. 2013. Vol. 188, № 2. P. 146–166.
2. *Ибрагимов И.И., Насибов Ф.Г.* Об оценке наилучшего приближениях суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функции конечной степени // ДАН СССР. 1970. Т. 194, № 5. С. 1013–1016.
3. *Попов В.Ю.* О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Математика. 1972. № 6. С. 65–73.
4. *Рыжик И.Н., Градштейн И.С.* Таблицы интегралов суммы рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1971. 108 с.
5. *Черных Н.И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в $f \in L_2$ // Матем. заметки. 1967. Т. 2, № 5. С. 513–522.
6. *Бекенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. – М.: Мир, 1965. 273 с.
7. *Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р.* О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа в $f \in L_2(\mathbb{R})$ и средних ν-поперечниках некоторых функциональных классов // Известия вузов. Математика. 2014. № 7. С. 1–19.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 113–115

Значения n-поперечников некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди

Дж. Дж. Заргаров

Хорогский государственный университет им. М.Назаршоева, Хорог, Таджикистан

Аннотация. В пространстве Харди для классов $W_m^{(r)}$ аналитических функций $f \in H_2^{(r)}$, задаваемых модулями непрерывности m-го порядка $\omega_m(F^{(r)}, t)$ граничного значения производной $F^{(r)}$ и удовлетворяющих условию

$$\int_0^h (h-t)\omega_m^q(F^{(r)}, t)dt \leqslant 1, \quad m \in \mathbb{N},\ 0 < q \leqslant 2,\ r \in \mathbb{Z}_+,\ 0 < t \leqslant h,\ h > 0,$$

найдены точные значения различных n-поперечников.

Вопросам получения точных неравенств типа Джексона для действительных измеримых 2π-периодических функций f в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ посвящен ряд работ (см., например, [1–4] и литературу, приведенную в них).

В данной работе доказаны точные неравенства Джексона – Стечкина для аналитических в единичном круге функций в пространстве Харди H_2.

Говорят, что аналитическая в круге $|z| < 1$ функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 \leqslant \rho < 1, \quad 0 \leqslant t < 2\pi,$$

принадлежит пространству Харди H_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, если

$$\|f\|_p := \|f\|_{H_p} = \lim \Big\{ M_p(f, \rho) :\ \rho \to 1-0 \Big\} < \infty,$$

где

$$M_p(f;\rho) := \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty; \quad \max_{0 \leqslant t < 2\pi} |f(\rho e^{it})|, \quad p = \infty \right\}.$$

Всюду далее интегралы понимаются в смысле Лебега и, как известно [5], норма реализуется на угловых граничных значениях функции $f \in H_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то есть

$$\|f\|_p = \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p dt \right)^{1/p}, 1 \leqslant p < \infty;\ \operatorname*{essup}_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} (|f(e^{it})|) :\ p = \infty \right\}.$$

Положим

$$F(t) := f(e^{it}) = \lim \Big\{ f(\rho e^{it}) :\ \rho \to 1 \Big\}.$$

© Дж. Дж. Заргаров, 2016

Через $F^{(r)}$ обозначим граничные значения производной r-го порядка $f^{(r)}(z) = d^r f/dz^r$. Если $f \in H_p,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$ имеет граничные значения F, то их гладкость характеризуется модулем непрерывности m-го порядка

$$\omega_m(F;t)_{H_p} = \sup\Big\{\|\triangle_m(F,\cdot,h)\|_p:\ |h| \leqslant t\Big\},$$

где

$$\triangle_m(F;u,h) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}F(u+kh)$$

— разность m-го порядка функции F с шагом h. В частности,

$$\omega_m^2(F^{(r)},t)_2 = 2^m \sup\left\{\sum_{k=r+1}^{\infty}\alpha_{k,r}^2|c_k|^2(1-\cos(k-r)h)^m:\ h \in [0,t]\right\},$$

где положено $\alpha_{k,r} = k(k-1)\dots(k-r+1),\ k \geqslant r,\ k,\ r \in \mathbb{N}$.

Пусть

$$\mathcal{P}_{n-1} = \left\{p_{n-1}(z) : p_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1}a_k z^k,\ a_k \in \mathbb{C}\right\}.$$

Величину

$$E_n(f)_p := E(f,\mathcal{P}_{n-1})_p = \inf\Big\{\|f-p_{n-1}\|_{H_p}:\ p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1}\Big\}$$

назовем наилучшим приближением функции $f \in H_p,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$ степени $\leqslant n-1$ в пространстве Харди $H_p,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Известно, что

$$E_n^2(f)_2 := \inf\Big\{\|f-p_{n-1}\|_{H_2}:\ p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1}\Big\} = \sum_{k=n}^{\infty}|c_k|^2.$$

В данной работе вводим в рассмотрение следующую экстремальную характеристику

$$\chi_{m,n,r,q}(h) := \sup_{f \in H_2^{(r)}} \frac{2^m \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int_0^h (h-t)\omega_m^q(F^{(r)},t)_2 dt\right)^{m/2}},$$

где $m,n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ 0 < q \leqslant 2,\ 0 < h \leqslant \pi/(n-r),\ n > r$.

Теорема 1. *Для любых* $m,n,r \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant q \leqslant 2,\ 0 < h \leqslant \pi/(n-r),\ n > r$ *справедливы равенства*

$$\chi_{m,n,r,q}(h) = \left(\frac{2}{h^2}\int_0^h (h-t)\left(\sin\frac{n-r}{2}t\right)^{mq} dt\right)^{-1/q}.$$

Через $b_n(\mathfrak{M},H_2),\ d^n(\mathfrak{M},H_2),\ d_n(\mathfrak{M},H_2),\ \delta_n(\mathfrak{M},H_2),\ \Pi_n(\mathfrak{M},H_2)$ обозначим соответственно бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным и проекционными n-поперечниками выпуклого центрально-симметричного подмножество $\mathfrak{M}$ из пространство H_2.

Для любых целых положительных $m,n,r\ (r < n)$ и $0 < h \leqslant \pi/(n-r)$ через $W_m^{(r)}$ обозначим класс функций из $H_2^{(r)}$

$$W_m^{(r)} = \left\{f \in H_2^{(r)} : \int_0^h (h-t)\omega_m^q(F^{(r)},t)_2 dt \leqslant 1\right\}.$$

При тех же ограничениях на указанных параметров, также полагаем

$$W_{m,q}^{(r)}(h,\Phi)=\left\{f\in H_2^{(r)}:\ \frac{2}{h^2}\int\limits_0^h(h-t)\omega_m^q(F^{(r)},t)_2dt\leqslant\Phi^q(h)\right\}.$$

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 2. *Пусть $m,n,r\in\mathbb{N}$, $n>r$, $0<q\leqslant 2$ и $0<h\leqslant\pi/(n-r)$. Тогда имеет место равенство*

$$\gamma_n(W_m^{(r)},H_2)=\frac{2^m}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}\left(\int\limits_0^h(h-t)\left(\sin\frac{n-r}{2}t\right)^{mq}dt\right)^{-1/q},$$

где $\gamma_n(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных n-поперечников.

В частности, если $h=\pi/(n-r)$, то

$$\gamma_n(W_m^{(r)},H_2)=\frac{2^{-m-2/q}(n-r)^{2/q}}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}\left(\int\limits_0^{\pi/2}t\,(\cos t)^{mq}\,dt\right)^{-1/q}.$$

Теорема 3. *Пусть $m,r\in\mathbb{N}$, $1/r<q\leqslant 2$. Если мажоранта Φ при любом $h\in[0,2\pi]$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^q(h)}{\Phi^q(\pi/(n-r))}\geqslant\left(\frac{\pi}{(n-r)h}\right)^2\left(\int\limits_0^{\pi/2}t\big(\cos t\big)^{mq}dt\right)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\begin{cases}\displaystyle\int\limits_0^{(n-r)h}\left(\frac{(n-r)h}{2}-t\right)\big(\sin t\big)^{mq}, & \text{если}\ \ 0\leqslant h\leqslant\pi/(n-r),\\ \displaystyle\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/2}t\big(\cos t\big)^{mq}dt+\frac{1}{8}\left(\frac{(n-r)h}{2}-1\right)^2, & \text{если}\ \ h>\pi/(n-r),\end{cases}$$

то для любых натуральных n,r $(n>r)$ справедливы равенства

$$\gamma_{2n-1}(W_{m,q}^{(r)}(h,\Phi),H_2)=\gamma_{2n}(W_{m,q}^{(r)}(h,\Phi),H_2)=$$

$$=2^{-(m+3/q)}\,\pi^{2/q}\left(\int\limits_0^{\pi/2}t\,(\cos t)^{mq}\,dt\right)^{-1/q}\cdot\frac{\Phi(\pi/(n-r))}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}.$$

Список литературы

1. *Вакарчук С.Б.* Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. 2005. Т. 78, № 5. С. 792–796.
2. *Вакарчук С.Б.* Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. 2006. Т. 80, № 1. С. 11–19.
3. *Шабозов М.Ш.* Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0,2\pi]$ // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 616–623.
4. *Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.* Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. 2011. Т. 90, № 5. С. 764–775.
5. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H_p. – М.: Мир. 1984. 256 с.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 116–122

Дробные дифференциальные уравнения и аномальная диффузия

М. Илолов[1], Х. С. Кучакшоев[2] , Д. Н. Гулджонов[3]

[1] *Центр инновационного развития науки и новых технологий АН РТ, Душанбе, Таджикистан*
[2] *Филиал МГУ имени М. В. Ломоносова, Душанбе, Таджикистан*
[3] *Институт математики имени А.Джураева АН РТ, Душанбе, Таджикистан*

Аннотация. В работе рассматриваются параболические уравнения с оператором Лапласа дробного порядка. Такие уравнения возникают при описание процесса диффузии в сильно неоднородных средах.

1. Введение. Настоящая работа посвящена параболическим уравнениям, в которых взамен оператора Лапласа рассматривается оператор дробного порядка производных по пространственным переменным. Вводится понятие «дробное дифференциальное уравнение (ДДУ)» вместо общепринятого «уравнения в частных производных дробного порядка» и тем самым подчеркивается важность дробных аналогов диффузии, градиента, дивергенции, ротора и других элементов дробного векторного анализа. Осуществляется переход от уравнения изотропной нормальной диффузии (модель случайных блужданий)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u,$$

описывающего диффузию в однородных средах, к дробным уравнениям изотропной и анизотропной аномальной диффузии (модель случайных блужданий непрерывного по времени и полеты Леви) вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta^{\alpha/2} u, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant 2, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (J_M^{1-\beta} \nabla u), \quad 0 < \beta < 1, \tag{2}$$

отражающим процессы в сильно неоднородных средах. Здесь оператор $J_M^{1-\beta}[\vartheta]$ определен для векторнозначной функции ϑ и имеет вид

$$J_M^{1-\beta}[\vartheta] = F^{-1}\left[\int\limits_{|m|=1} m(im\cdot\xi)^{\beta-1} m\cdot\widehat{\vartheta}(\xi) M(dm)\right],$$

где $m \in R^n$, M — вероятностная мера на единичной сфере в R^n, описывающая анизотропную диффузию. Близкий подход изложен в работе [1].

Соответствующие стохастические процессы изучены в [2] и [3].

Во втором параграфе работы изложены элементы дробного анализа Фурье применительно к уравнениям (1) и (2).

Третий параграф посвящен дробному интегродифференциальному исчислению Рисса. Наконец, в четвертом параграфе приводится численный анализ одномерного уравнения аномальной диффузии.

© М. Илолов, Х. С. Кучакшоев , Д. Н. Гулджонов, 2016

2. Элементы дробного анализа Фурье. Пусть Ω — открытая область евклидова пространства R^n и $-\Delta = -\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ — дифференциальный оператор 2-го порядка (лапласиан). Рассмотрим уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f, \tag{3}$$

где функция источника $f \in L^2(\Omega)$ — пространство Лебега. Уравнение (3) имеет решение $u \in H^2(\Omega)$ — пространство Соболева.

Наряду с (3) рассмотрим аналогичное уравнение порядка $2s$, где s — действительное положительное число

$$(-\Delta)^s u = f, \tag{4}$$

но уже содержащее лапласиан дробного порядка.

Возникает вопрос о том, как задавать оператор в (4) и над какими классами функций определен и действует оператор $(-\Delta)^s$. Ответ следует искать в анализе Фурье. Введем прямое и обратное преобразования Фурье и вспомним их основные свойства.

Для комплекснозначных функций $u \in L^1(R^n)$ определим преобразований Фурье

$$F[u] = \widehat{u}, \quad \widehat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{R^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x) d\xi \tag{5}$$

и

$$F^{-1}[u] = \check{u}, \quad \check{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{R^n} e^{ix\cdot\xi} u(x) d\xi. \tag{6}$$

Для $u \in L^2(R^n)$ преобразования Фурье определяются с помощью свойства плотности вида

$$\overline{L^1(R^n) \cap L^2(R^n)} = L^2(R^n).$$

Имеют места следующие утверждения (см., например, [4]):

i) Теорема Планшереля. Предположим, что $u \in L^2(R^n)$. Тогда $\widehat{u}, \check{u} \in L^2(R^n)$ и

$$||\widehat{u}||_{L^2(R^n)} = ||\check{u}||_{L^2(R^n)} = ||u||_{L^2(R^n)}. \tag{7}$$

ii) Равенство Парсеваля. Пусть $u, v \in L^2(R^n)$. Тогда

$$\int\limits_{R^n} u\bar{v} dx = \int\limits_{R^n} \widehat{u}\bar{\widehat{v}} dx. \tag{8}$$

iii) Преобразование Фурье для производной по направлению. Пусть $u \in H^k(R^n)$ для некоторого целого $k \geqslant 1$ и m — единичный вектор в R^n. Пусть через $m \cdot \nabla^k$ обозначена k-я производная по направлению m. Тогда

$$F(m \cdot \Delta^k) u = (m \cdot i\xi)^k \widehat{u}. \tag{9}$$

Переходим теперь к рассмотрению оператора Лапласа и его дробного аналога (3).

С учетом (3), (5) и (6) выпишем

$$-\Delta u = F^{-1}[|\xi|^2 F_u]. \tag{10}$$

Именно равенство (10) наводит на мысль о том, что дробный оператор Лапласа может быть определен следующим образом:

$$(-\Delta)^s u = F^{-1}[|\xi|^{2s} F_u]. \tag{11}$$

Далее, учитывая (7), (8), (9), для положительного целого k отметим, что частная производная порядка k по переменной x_j функции $u \in H^k(R^n)$ удовлетворяет соотношению

$$\partial_j^k u = F^{-1}[(i\xi_j)^k F_u]. \tag{12}$$

По аналогии с (12) можно определить частную производную порядка $s > 0$ для пробной функции $u \in C_0^\infty(R^n)$ с помощью равенства

$$\partial_j^s u = F^{-1}[(i\xi_j)^s F_u]. \tag{13}$$

Определение (13) в свою очередь приводит к неравенству

$$(-\Delta)^s \neq \sum_{j=1}^{n} \partial_j^{2s},$$

поскольку в общем случае $(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^s \neq \xi_1^{2s} + \ldots + \xi_n^{2s})$ и преобразование Фурье является оператором инъекции.

Далее заметим, что если градиентный оператор определить как

$$(-\Delta)^s = (\partial_1^s, \ldots, \partial_n^s),$$

то получим $(-\Delta)^s \neq -\nabla^r \cdot \nabla^t$ для любых r и t. Таким образом, ясно, что действия над дробным лапласианом и дробными производными не такие простые, как в случае классического оператора Лапласа $(-\Delta = -\nabla \cdot \nabla)$.

Отсутствие хороших свойств связано с тем, что дифференциальные уравнения дробного порядка носят нелокальный характер. Если L — оператор дробного порядка, то для $x \in R^n$, $L[u]x$ зависит не только от значений u в любом малом шаре вокруг x (как в случае классических опреаторов), но также от значений u в других точках y в области нелокально относительно x. Дробный оператор Лапласа, определенный в (11), в свою очередь зависит от значении u во всех точках R^n.

3. Потенциалы и производные Рисса функций многих переменных.

Идея введения дробной степени прозрачна в образах Фурье:

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f = F^{-1}|x|^\alpha F f, \tag{14}$$

где F и F^{-1} — прямые и обратные преобразования Фурье соответственно.

На каких классах функций находит свою реализацию данная дробная степень?

Здесь устанавливается, что отрицательные степени $(-\Delta)^{\alpha/2}$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$, будут потенциалами Рисса

$$I^\alpha \varphi = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int\limits_{R^n} \frac{\varphi(y)dy}{|x-y|^{n-\alpha}}, \quad \alpha \neq n,\, n+2,\, n+4, \tag{15}$$

на классах функций Лизоркина (нормировочная постоянная $\gamma_n(\alpha)$ будет определена ниже).

Положительные степени будут реализованы в виде гиперсингулярных интегралов $D^\alpha f$ (см. ниже (27)). Ясно, что основным средством исследования операции риссова интегродифференцирования является преобразование Фурье.

Заметим, что для оператора Лапласа Δ имеем

$$F(\Delta\varphi) = -|x|^2 F\varphi$$

или

$$-\Delta\varphi = F^{-1}|x|^2 F\varphi, \tag{16}$$

и, кроме того, для свертки

$$f * \varphi = \int\limits_{R^n} f(x-y)\varphi(y)dy$$

преобразование Фурье вычисляется по формуле

$$F(f * \varphi) = F(f)F(\varphi). \tag{17}$$

Поэтому, рассматривая потенциал Рисса (15), мы должны знать преобразование Фурье функции $|x|^{\alpha-n}$. Оно вычислено в монографии [9] с помощью формулы Бохнера для преобразования Фурье радиальных функций ($\varphi = \varphi(|x|)$).

Введя пространство Лизоркина основных функций и требуя обращения в нуль образов Фурье только в одной точке — начале координат, положим

$$\Psi = \{\psi(x) : \psi \in S(R^n), (D^j\psi) = 0, |j| = 0, 1, 2, \ldots\}, \tag{18}$$

где $S(R^n)$ — пространство основных функций Шварца.

Примером класса функций (13) может стать функция $\psi(x) = \exp(-|x|^2 - |x|^{-2})$.

Введем теперь класс Φ, двойственный к (18), состоящий из преобразований Фурье функций из Ψ:

$$\Phi = F(\Psi) = \{\varphi(x) : \varphi \in S(R^n), \varphi = F(\psi), \psi \in \Psi\} \tag{19}$$

Легко заметить, что класс Φ состоит из тех и только тех шварцевых функций, которые ортогональны многочленам:

$$\int\limits_{R^n} x^j \varphi(x) dx = 0, \ \ |j| = 0, 1, 2, \ldots \tag{20}$$

(см., например, [10]).

Таким образом, Φ есть класс функций из $S(R^n)$, все моменты которых равны нулю.

Функция $|x|^{-\alpha}$, как элемент пространства Ψ, порождает регулярный функционал

$$(|x|^{-\alpha}, \psi) = \int\limits_{R^n} |x|^{-\alpha} \varphi(x) dx \tag{21}$$

для всех $\alpha \in C$ ввиду того, что $(D^j\psi)(0) = 0, \ |j| = 0, 1, 2, \ldots$.

Преобразование Фурье функции $|x|^{-\alpha}$, понимаемое в смысле (21), вычисляется по формуле

$$F(|x|^{-\alpha}) = \frac{(2\pi)^n}{\gamma_n(\alpha)} \begin{cases} |x|^{\alpha-n}, & \alpha \neq n + 2k, \ \alpha \neq -2k, \\ |x|^{\alpha-n} \ln \frac{1}{|x|}, & \alpha = n + 2k, \\ (-\Delta)^{-\alpha/2}\delta, & \alpha = -2k, \end{cases} \tag{22}$$

где $\delta = \delta(x)$ — дельта функция, $k = 0, 1, 2, \ldots$, множитель $\gamma_n(\alpha)$ определяется следующим образом:

$$\gamma_n(\alpha) = \begin{cases} 2^\alpha \pi^{n/2} \Gamma(\alpha/2)/\Gamma(\frac{n-1}{2}), & \alpha \neq n + 2k, \ \alpha \neq -2k, \\ 1, & \alpha = -2k, \\ (-1)^{(n-\alpha/2)} \pi^{n/2} 2^{\alpha-1} \left[\frac{\alpha-n}{2}\right]! \Gamma(\frac{\alpha}{q}), & \alpha \neq n + 2k. \end{cases} \tag{23}$$

Таким образом, потенциал Рисса определен для всех α, $\operatorname{Re}\alpha > 0$, как свертка

$$I^\alpha \varphi = \int\limits_{R^n} k_\alpha(x - y)\varphi(y) dy, \tag{24}$$

где

$$k_\alpha(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \begin{cases} |x|^{\alpha-n}, & \alpha - n \neq 0, 2, 4, \ldots, \\ |x|^{\alpha-n} \ln \frac{1}{|x|}, & \alpha - n = 0, 2, 4, \ldots, \end{cases} \tag{25}$$

и нормировочный множитель дается равенством (23).

Теорема 1. *Пространство Лизоркина* Φ *инвариантно относительно риссова потенциала* I^α, *причем*

$$I^\alpha(\Phi) = \Phi$$

и

$$I^\alpha I^\beta \varphi = I^{\alpha+\beta}\varphi, \quad \varphi \in \Phi, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0, \quad \operatorname{Re}\beta > 0. \tag{26}$$

Оператор I^α действует так же в пространствах $L_p(R^n)$ и $L_p(R^n,\rho)$.

Теорема 2. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty, 1 \leqslant q \leqslant \infty, \alpha > 0$. *Оператор* I^α *ограничен из* $L_p(R^n)$ *в* $L_q(R^n)$ *тогда и только тогда, когда*

$$0 < \alpha < n, \quad 1 < p < \frac{n}{\alpha}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}.$$

Производная Рисса

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f = F^{-1}|x|^\alpha F f, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0,$$

реализуется в виде свертки с обобщенной функцией $|x|^{\alpha-n}$.

Такая свертка, т. е. интеграл с ядром $|x-y|^{-\alpha-n}$, в противоположность потенциалу Рисса имеет порядок особенности больше размерности пространства R^n и будет поэтому гиперсингулярным оператором. Такой интеграл расходится, и поэтому рассматриваемая свертка нуждается в корректном определении.

Пусть $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$. Сходимость свертки в этом случае можно обеспечить (на достаточно хороших функциях), взяв ее в виде

$$\int\limits_{R^n} \frac{f(y)-f(x)}{|y-x|^{n+\alpha}} dy = -\int\limits_{R^n} \frac{f(x)-f(x-y)}{|y|^{n+\alpha}} dy. \tag{27}$$

Этот интеграл сходится при $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$ на дифференцируемых и ограниченных функциях.

4. Решение системы Келлера – Сиджела с дробными производными Рисса. Рассмотрим одномерную систему вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} - \chi(uv_x)_x, & t > 0,\ x \in R,\ n-1 < \alpha < n, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -u, & t > 0,\ x \in R, \end{cases} \tag{28}$$

где

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} = -\gamma(\alpha)\Big({}_0D_x^\alpha + {}_0D_L^\alpha\Big) u(x,t) \tag{29}$$

является дробной производной Рисса по x.

Здесь $\alpha \neq 1, \gamma(\alpha) = 1/2\cos(\frac{\pi x}{2})$ и

$${}_0D_x^\alpha u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial u}{\partial x^n} \int\limits_0^S \frac{u(\xi,t)}{x-\xi}^{\alpha-1-n} d\xi,$$

$${}_0D_L^\alpha u(x,t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial u}{\partial x^n} \int\limits_S^L \frac{u(\xi,t)}{x-\xi}^{\alpha-1-n} d\xi,$$

Система (28), (29) в многомерном случае и с производными целого порядка подробнейшим образом исследована в работах [6]–[12].

Дробное конечно-разностное отношение определяется с помощью равенства

$$\Delta_h^\alpha \theta(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha+1)\theta(x-kh)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}-k+1)\Gamma(\frac{\alpha}{2}+k+1)}. \tag{30}$$

С помощью (30) определим дискретизацию дробной производной Рисса в виде

$$\lim_{h\to 0} \Delta_h^\alpha \theta(x) = \lim_{h\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha+1)\theta(x-kh)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}-k+1)\Gamma(\frac{\alpha}{2}+k+1)}. \tag{31}$$

Обозначим коэффициенты ряда (30) через g_k. Тогда легко заметить, что $g_0 > 0$. При $|k| \geqslant 1, g_k = -g_{-k} \leqslant 0$.

Аппроксимационный коэффициент производной функции (31) определяется как

$$|2\sin\frac{z}{2}|^\alpha = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}-k+1)\Gamma(\frac{\alpha}{2}+k+1)} e^{ikz}. \tag{32}$$

Лемма. *Предположим, что* $f \in C^5(R)$ *и* $f^{(n)} \in L_1(R)$, $n > 5$, *и*

$$\Delta_h^\alpha f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}-k+1)\Gamma(\frac{\alpha}{2}+k+1)} f(x-kh), \tag{33}$$

тогда, дробная конечная разность определяется как

$$h^{-\alpha}\Delta_h^\alpha f(x) = \frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial x^\alpha} + O(h^2),$$

где $h = \frac{b-a}{h}$ *и* m *— число разбиений сегмента* [a,b].

Рассмотрим теперь систему (28) с начальными и краевыми условиями вида

$$\begin{cases} u(0,x) = u_0(x), & a < x < b, \\ u(t,a) = u_1(t), & 0 < t < T, \\ u(t,b) = u_2(t), & 0 < t < T, \\ v(t,a) = v_1(t), & 0 < t < T, \\ v(t,b) = v_2(t), & 0 < t < T. \end{cases} \tag{34}$$

Для дискретизации задачи (28) и (34) воспользуемся известным методом МакКормака [11]. Введем на множестве $[0,T] \times [a,b]$ равномерную сетку с шагом h по переменной x и с шагом τ по переменной t, т. е.

$$\begin{cases} \omega_h = \{x_j = jh,\ j = 0,\ldots,N,\ hN = b-a\}, \\ \omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0,\ldots,K,\ K\tau = T\}. \end{cases}$$

Будем обозначать через

$$\begin{cases} y_j^n = u(n\tau, jh),\ j = 0,\ldots,N,\ n = 0,\ldots,K, \\ z_j^n = v(n\tau, jh),\ j = 0,\ldots,N,\ n = 0,\ldots,K, \end{cases}$$

приближенное решение задачи (28), (34).

Для оценки сеточных функций $z_j^n = y_j^n - u_j^n$ на сетке $\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$ используем следующую норму:

$$\|z\|_{C(\omega_{h\tau})} = \max_{0\leqslant n\leqslant K} \|z^n\|_{C(\omega_h)},$$

где

$$\|z^n\|_{C(\omega_h)} = \max_{0\leqslant j\leqslant N} |z_j^n|.$$

Введём следующие обозначения:

$$y_{t,j}^n = \frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau}, \quad y_{\bar{x}x,j}^n = \frac{y_{j-1}^n - 2y_j^n + y_{j+1}^n}{h^2}, \tag{35}$$

$$z_{x,j}^n = \frac{z_{j+1}^n - z_j^n}{h}, \quad z_{\bar{x},j}^n = \frac{z_j^n - z_{j-1}^n}{h}, \quad z_{\bar{x}x,j}^n = \frac{z_{j-1}^n - 2z_j^n + z_{j+1}^n}{h^2}. \tag{36}$$

Используя обозначения (35), (36), заменим задачу (27), (34) следующей разностной схемой:

$$y_j^{n+1} = y_j^n - \frac{D\tau}{h^\alpha} \sum_{k=-m+1}^{i} g_k y_{i-k}^n - \chi \frac{y_{j+1}^{n+1} + y_j^{n+1}}{2h} z_{x,j}^{n+1} +$$

$$+\chi\frac{y_j^{n+1}+y_{j-1}^{n+1}}{2h}z_{\bar{x},j}^{n+1},\quad j=1,\ldots,N-1,\quad n=0,\ldots,K-1,$$
$$y_j^{(0)}=u_0(x_j),\quad j=0,\ldots,N,\quad y_0^{n+1}=u_1(t_{n+1}),\quad y_N^{n+1}=u_2(t_{n+1}),\quad n=0,\ldots,K-1,\quad (37)$$
$$z_{\bar{x}x,j}^{n+1}=-\frac{1}{2}(y_{j-1}^n+y_{j+1}^n),\quad j=1,\ldots,N-1,\quad n=0,\ldots,K-1,$$
$$z_0^{n+1}=v_1(t_{n+1}),\quad z_N^{n+1}=v_2(t_{n+1}),\quad n=0,\ldots,K-1.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Разностная схема* (37) *задачи* (28), (34) *условно устойчива.*

Доказательство приводится с использованием круговой теоремы Гершгорина для локализации собственных значений соответствующей системы алгебраических уравнений (37).

Список литературы

1. *Webb M.*, *Trefethen L.N. and Gonnet P.* Stability of Barycentric Interpolation Formulas for Extrapolation. // SIAM J. Sci. Comput. 2012. Vol. 34, № 6. P. A3009–A3015.
2. *Учайкин В.В.* Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы. УФН. 2003. Т. 173(8). С. 847–876.
3. *Metzler R. and Klafter J.* Intermediate processes and critical phenomena: Theory, method and progress of fractional operators and their applications to modern mechanics // Phys. Rev. 2000. Vol. 339. P. 1–77.
4. *Гельфанд И.М.*, *Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Добросвет, 2000. 400 с.
5. *Самко С.Г.*, *Килбас А.А.*, *Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
6. *Escudero C.* The fractional Keller-Segel model // Nonlinearity. 2006. Vol. 19. P. 2909–2918.
7. *Perthame B.*, *Charles F.*, *Despres B.*, *Sentis R.* Nonlinear stability of a Vlasov equation for plasmas // KRM. 2013. Vol. 6, № 2. P. 269–290.
8. *Keller E.F. and Segel A.* Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability // J. Theor. Biol. 1970. Vol. 26. P. 399–416.
9. *Escudero C.* The fractional Keller-Segel model // ArXiv. Math., 2006. Vol. 16. P. 1–12.
10. *Илолов М.*, *Кучакшоев Х.С.* Нелинейная диффузия и хемотаксический коллапс // ДАН РТ. 2011. Т. 54. С. 873–879.
11. *Burdene E.O. and Berg H.C.* Complex patterns formed by motile cells of Esherichia coli. Nature (London). 1991. V. 349. P. 630–633.
12. *Escudero C.* Chemotactic collapse and mesenchymal morphogenesis // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. P. 022903.
13. *Pasquet M. at.all.* Hospicells (ascites-derived stromal cells) promote tumorigenicity and angiogenesis // Jnt. J. Cancer. 2010. Vol. 126. P. 2090–2101.
14. *Almad Reza Haghighi*, *Abdolrahman Dok'vand*, *Hamideh Hoseini Ghejlo* Solution of the fractional diffusion equation with the Riesz fractional derivative using McCormack method // Communications on Advanced Computational Science and Applications. 2014. P. 1–14.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 123–127

Теоремы вложения разных метрик для некоторых классов весовых функциональных пространств

С. А. Исхоков

Институт математики им. А. Джураева АН РТ, Душанбе, Таджикистан

Аннотация. В докладе обсуждаются вложения разных метрик для некоторых весовых функциональных пространств, которые являются обобщениями классического пространства Соболева.

Пусть Ω – некоторая область в n-мерном евклидовом пространстве R_n точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В 30-е годы прошлого столетия С. Л. Соболев ввел то понятие обобщенной производной, которое впоследствии стало общепринятым, и определил пространства $W_p^r(\Omega)$ функций, суммируемых по модулю со степенью $p \geqslant 1$ вместе со всеми своими обобщенными производными до порядка r включительно. Он также установил основные соотношения между этими пространствами, которые теперь называются теоремами вложения. Эти пространства играют важную роль в процессе исследования разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений и имеют разнообразные обобщения. Одним из этих обобщений являются пространства $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, которые определяются как класс всех комплекснозначных измеримых в ограниченной области Ω функций $u(x)$, имеющих обобщенные в смысле С. Л. Соболева производные $u^{(k)}(x)$ до порядка r включительно, с конечной нормой

$$\|u; W^r_{p;\alpha}(\Omega)\| = \left\{ \|u; L^r_{p;\alpha}(\Omega)\|^p + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \tag{1}$$

где

$$\|u; L^r_{p;\alpha}(\Omega)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{\alpha p}(x) |u^{(k)}(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Здесь и далее $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ – длина мультииндекса и $\rho(x)$ – регуляризованное расстояние точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$ области Ω.

Классы $W^r_{p;\alpha}(\Omega)$ являются банаховыми пространствами с нормой (1).

Первый результат типа теорем вложения для пространств $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ был получен В. И. Кондрашевым [1]. Систематическое исследование этих пространств принадлежит Л. Д. Кудрявцеву [2]. Оно развивалось и дополнялось работами многих математиков (по поводу библиографии см. обзорную работу [3]). Подробное доказательство некоторых свойств пространств $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ (теоремы вложения, прямые и обратные теоремы о следах и т. д.) приведены в монографии С. М. Никольского [4].

Пусть $C_0^\infty(\Omega)$ – множество бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций. Символом $\overset{\circ}{W}{}^r_{p,\,\alpha}(\Omega)$ обозначим замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в метрике пространства

© С. А. Исхоков, 2016

$W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$. С функциональными классами $\overset{\circ}{W}{}^r_{p,\,\alpha}(\Omega)$ тесно связано весовое пространство $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ с "согласованными весами", которое определяется с помощью нормы

$$\|u; V^r_{p;\alpha}(\Omega)\| = \left\{ \sum_{|k|\leqslant r} \int_\Omega \rho^{(\alpha+|k|-r)p}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Если $\alpha + 1/p \notin \{1,\, \ldots,\, r\}$, то (см. [3]) $V^r_{p;\alpha}(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}^r_{p,\,\alpha}(\Omega)$ с точностью до эквивалентности норм.

Результаты по весовым пространствам $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ играют важную роль в процессе исследования краевых задач для эллиптических уравнений со степенным вырождением на границе (см. [3] и имеющую там библиографию). Анализ опубликованных работ по этому направлению указывает на то, что установленные теоремы вложения для пространств $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, в основном, являются теоремами вложения одной метрики, в том смысле, что в этих вложениях оба пространства определяются с помощью одной и той же степени интегрируемости. Однако, как было показано в работах [5-9], применение теорем вложения разных метрик значительно расширит класс эллиптических дифференциальных уравнений, для которых ставятся и изучаются вариационные краевые задачи. Ниже мы определяем весовые функциональные пространства, которые являются обобщениями пространств $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ и сформулируем для них теорем вложения разных метрик, или весовые интегральные неравенства разных метрик.

Пространство $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$

Пусть Ω – ограниченная область в евклидовом n-мерном пространстве R_n, граница которой является замкнутым $(n-1)$-мерным многообразием $\partial\Omega$. Следующая теорема вложения разных метрик для пространств $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ доказывается методом «регулярных мостов», разработанным в главе 10 монографии [4]. Это доказательство проведено в [7].

Теорема 1. *Пусть граница $\partial\Omega$ области Ω принадлежит классу C^1 и пусть выполнены условия*

$$0 \leqslant m \leqslant r, \quad 1 < p \leqslant q < +\infty, \quad \alpha_m > -\frac{1}{q}, \quad \alpha - m \leqslant \alpha_m + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}.$$

Тогда справедливо вложение

$$W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \to W^{r-m}_{q;\,\alpha_m}(\Omega).$$

Здесь и далее вложение $B_1 \to B_2$, где $B_1,\ B_2$ – нормированные пространства с нормами $\|\cdot; B_1\|,\ \ \|\cdot; B_2\|$ соответственно, означает, что все элементы пространства B_1 можно рассматривать как элементы пространства B_2 и, кроме того, $\|u; B_2\| \leqslant C\|u; B_1\|$ для любого $u \in B_1$ с положительной константой C, не зависящей от u.

Пространство $V^r_p(\Omega;\, \sigma,\, \delta)$

Пусть Ω – произвольное открытое множество в R_n; $\sigma(x)$, $\delta(x)$ – положительные измеримые функции, заданные во множестве Ω. Пусть r – натуральное число и $1 \leqslant p < +\infty$. Вводим пространство $V^r_p(\Omega;\, \sigma,\, \delta)$ функций $u(x)$ $(x \in \Omega)$, имеющих обобщенные по Соболеву производные $u^{(k)}(x)$ до порядка r включительно, с конечной нормой

$$\|u; V^r_p(\Omega;\, \sigma,\, \delta)\| = \left\{ \sum_{|k|\leqslant r} \int_\Omega \sigma^p(x)\delta^{(|k|-r)p}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx \right\}^{1/p}. \tag{2}$$

Если Ω – ограниченная область в R_n с $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$ и $\delta(x) = \rho(x)$, $\sigma(x) = \rho^\alpha(x)$, $\alpha \in R_1$, то пространство $V^r_p(\Omega;\, \sigma,\, \delta)$ совпадает с пространством $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$.

Обозначим через $d(x)$ расстояния от точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$, если $\partial\Omega \neq \varnothing$. В случае $\Omega = R_n$ положим $d(x) = (1+|x|^2)^{1/2}$. Предположим, что $\sigma(x)$, $\delta(x) \in C^1(\Omega)$ и удовлетворяют следующим условиям

$$\delta(x) \leqslant \varkappa\, d(x), \quad |\nabla\delta(x)| \leqslant \varkappa; \quad |\nabla\sigma(x)| \leqslant \varkappa\, \sigma(x)\delta^{-1}(x) \quad (\forall x \in \Omega), \tag{3}$$

где $\varkappa$ – некоторое положительное число.

Примеры. Если $\Omega \subset R^n$ – ограниченное множество, то функция $\delta(x) = \exp\,(-c/\rho(x))$, где $c \geqslant \operatorname{diam}\Omega$ удовлетворяет условиям (3). В случае $\Omega = R_n$ и $d(x) = (1+|x|^2)^{1/2}$ функция $\delta(x) = \ln d(x)$ удовлетворяет условиям (3).

Теорема 2. *Пусть* $\sigma(x)$, $\delta(x)$ *удовлетворяют условиям* (3), $p \in [1, +\infty)$ *и* $r \in \mathbb{N}$. *Тогда*

(I) *множество* $C_0^\infty(\Omega)$ *плотно в пространстве* $V_p^r(\Omega;\, \sigma,\, \delta)$ *и норма* (2) *пространства* $V_p^r(\Omega;\, \sigma,\, \delta)$ *эквивалентна величине*

$$\left\{ \sum_{|k|=r} \int_\Omega \sigma^p(x)|u^{(k)}(x)|^p dx + \int_\Omega \sigma^p(x)\delta^{-rp}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx \right\}^{1/p};$$

(II) *имеет место вложение*

$$V^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \to V^{r-s}_{q;\,\alpha_s}(\Omega),$$

если выполняются условия

$$1 \leqslant p \leqslant q < \infty, \quad s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geqslant 0, \quad \alpha - s + \frac{n}{p} - \frac{n}{q} \leqslant \alpha_s.$$

Пространство $W_p^r(\Omega; \sigma, \overrightarrow{g})$

Пусть Ω – произвольное открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве R_n и пусть $\Pi(0) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R_n : |x_i| < 1/2, i = \overline{1,n}\}$ – единичный куб с центром в начале координат. Для любой точки $\xi \in R_n$ и любого вектора $\overrightarrow{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ с положительными компонентами определим параллелепипед $\Pi_{\overrightarrow{t}}(\xi)$ равенством

$$\Pi_{\overrightarrow{t}}(\xi) = \{x \in R_n : ((x_1-\xi_1)/t_1, \ldots, (x_n-\xi_n)/t_n) \in \Pi(0)\}.$$

Пусть $g_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ — определенные в Ω положительные функции. Положим

$$\Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(\xi) = \Pi_{\varepsilon\cdot\overrightarrow{g}(\xi)}(\xi), \quad \text{где} \quad \overrightarrow{g}(\xi) = (g_1(\xi), \ldots, g_n(\xi)).$$

Далее, предполагается, что множество Ω и функции $g_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ связаны условием: существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $\xi \in \Omega$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(\xi)$ содержится в Ω. Это условие является аналогом условия погружения, рассмотренного в работе П.И.Лизоркина [10]. В работе [10] также рассмотрены примеры областей Ω и положительных функций $g_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$, удовлетворяющих условию погружения.

Пусть $\sigma(x)$ – определенная в Ω положительная функция. Предположим, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существуют положительные числа $\lambda(\varepsilon), \nu(\varepsilon)$ такие, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \lambda(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \nu(\varepsilon) = 1$$

и

$$\frac{1}{\nu(\varepsilon)} \leqslant \frac{\sigma(x)}{\sigma(\xi)} \leqslant \nu(\varepsilon),\ \frac{1}{\lambda(\varepsilon)} \leqslant \frac{g(x)}{g(\xi)} \leqslant \lambda(\varepsilon),\ i = \overline{1,n},$$

для всех $x \in \Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(\xi)$ и всех $\xi \in \Omega$.

Не трудно заметить, что $\Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(\xi) \subset \Pi_{\varepsilon_0,\overrightarrow{g}}(\xi)$ для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и всех $\xi \in \Omega$.

Пусть $1 \leqslant p < +\infty$ и r - натуральное число. Символом $L^s_{p,r}(\Omega; \sigma, \overrightarrow{g})$, где целое число s такое, что $0 \leqslant s \leqslant r$, обозначим класс функций $u(x)$, $x \in \Omega$, имеющих обобщенные по Соболеву производные $u^{(k)}(x)$, $|k| \leqslant r$, с конечной полунормой

$$\|u; L^s_{p,r}(\Omega; \sigma, \overrightarrow{g})\| = \left\{ \sum_{|k|=s} \int_\Omega (\sigma(x) g_1^{k_1-r}(x) g_2^{k_2-r}(x) \dots g_n^{k_n-r}(x) |u^{(k)}(x)|)^p dx \right\}^{1/p},$$

а символом $W^r_p(\Omega; \sigma, \overrightarrow{g})$ - пространство функций $u \in L^r_{p,r}(\Omega; \sigma, \overrightarrow{g})$ с конечной нормой

$$\|u; W^r_p(\Omega; \sigma, \overrightarrow{g})\| = \left\{ \|u; L^r_{p,r}(\Omega; \sigma, \overrightarrow{g})\|^p + \|u; L^0_{p,r}(\Omega; \sigma, \overrightarrow{g})\|^p \right\}^{1/p}. \qquad (4)$$

Пространство $W^r_p(\Omega; \sigma, \overrightarrow{g})$ является банаховым с нормой (4), и, согласно результатам работы [11], в сделанных выше предположениях при всех $p \in [1, \infty)$ и всех натуральных r множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в этом пространстве.

Теорема 3. *Пусть целое число s такое, что $0 \leqslant s \leqslant r$, и выполняются условия*

$$1 \leqslant p \leqslant q_0 < +\infty, \; r - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q_0} > 0.$$

Тогда для всех $v \in W^r_p(\Omega; \sigma, \overrightarrow{g})$ имеет место неравенство

$$\left\| v; L^s_{q_0,r}\left(\Omega; \sigma(g_1 g_2 \dots g_n)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q_0}}, \overrightarrow{g}\right)\right\| \leqslant M \left\| v; W^r_p(\Omega; \sigma, \overrightarrow{g})\right\|,$$

где число $M > 0$ не зависит от функции $v(x)$.

Теорема 4. *Пусть s – целое число и $0 \leqslant s < r$. Пусть $p \geqslant 1$, $1 \leqslant q_1 \leqslant q_0$ и числа q_0 удовлетворяют условиям:*

$$\frac{1}{p} - \frac{r-s}{n} < \frac{1}{q_0} \quad \textit{при} \quad n - (r-s)p > 0;$$

$$q_0 - \textit{любое конечное число при } n - (r-s)p \leqslant 0.$$

Тогда для любого $\tau > 0$ и всех $v \in W^r_p(\Omega; \sigma, \overrightarrow{g})$ справедливо неравенство

$$\left\| v; L^s_{q_0,r}\left(\Omega; \sigma(g_1 g_2 \dots g_n)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q_0}}, \overrightarrow{g}\right)\right\| \leqslant \tau \left\| v; W^r_p(\Omega; \sigma, \overrightarrow{g})\right\| +$$
$$+ c_1 \tau^{-\mu} \left\| v; L_{q_1}(\Omega; \sigma(g_1 g_2 \dots g_n)^{-r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q_1}}, \overrightarrow{g})\right\|$$

где

$$\mu = \frac{q_1^{-1} - q_0^{-1} + sn^{-1}}{q_0^{-1} - p^{-1} + (r-s)n^{-1}}.$$

Пространство $W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)$

Пусть $\sigma(t)$ – бесконечно дифференцируемая функция, определенная при $t > 0$, такая, что $0 \leqslant \sigma(t) \leqslant 1$ для любого $t \in [\frac{1}{2}; 1]$ и $\sigma(t) \equiv 0$, когда $t \geqslant 1$, $\sigma(t) = 1$ для любого $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$. Для любых двух вещественных чисел α, β определим функцию

$$\varphi_{\alpha,\beta}(t) = \sigma(t)\ t^{-\alpha} + (1 - \sigma(t))\ t^\beta \quad (t > 0).$$

Пусть $R^+_n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_n : x_n > 0\}$, $p \in (1; +\infty)$ и r – некоторое целое неотрицательное число. Определим весовой класс $L^r_{p;\alpha,\beta}(R^+_n)$ функций $u(x)$, заданных в полупространстве R^+_n, с конечной полунормой

$$\left\| u; L^r_{p;\alpha,\beta}(R^+{}_n)\right\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{R^+{}_n} \left(\varphi_{\alpha,\beta}(x_n) \left|u^{(k)}(x)\right|\right)^p dx \right\}^{1/p}.$$

Ведем весовое функциональное пространство $W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)$ с конечной нормой

$$\left\|u;W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)\right\| = \left\{\left\|u;L^r_{p;\alpha,\beta}(R^+_n)\right\|^p + \left\|u;L^0_{p;\alpha,\gamma}(R^+_n)\right\|^p\right\}^{1/p}.$$

Теорема 5. *Пусть целое число* $s\in(0,r)$ *и пусть*

$$\alpha_0-\alpha\leqslant r-s+\frac{1}{q_0}-\frac{1}{p},$$
$$\alpha_0<\frac{1}{q_0},\quad 1<p\leqslant q_0<\infty,$$
$$\beta-\beta_0\geqslant r-s+\frac{1}{q_0}-\frac{1}{p},\quad \beta_0+r-s-1<-\frac{1}{q_0}.$$

Тогда для всех функций $u\in W^r_{p;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}({R^+}_n)$ *справедливо неравенство*

$$\left\|u;L^s_{q_0;\,\alpha_0,\,\beta_0}(R^+_n)\right\|\leqslant M\left\|u;W^r_{p;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}({R^+}_n)\right\|,$$

где число $M>0$ *не зависит от функции* $u(x)$.

Обозначим через $\widetilde{C}_0^\infty({R^+}_n)$ множество бесконечно дифференцируемых функций финитных сверху, то есть обращающихся в нуль при больших значениях x_n. Символом $\widetilde{W}^r_{p;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}({R^+}_n)$ обозначим замыкания множества $\widetilde{C}_0^\infty({R^+}_n)$ в метрике пространства $W^r_{p;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}({R^+}_n)$.

Теорема 6. *Пусть* $1<p\leqslant q_0<\infty$ *и целое число* s *такое, что* $1\leqslant s\leqslant r-1$. *Пусть выполнены условия*

$$\alpha_0-\alpha\leqslant r-s+\frac{1}{q_0}-\frac{1}{p},\quad \alpha_0<\frac{1}{q_0},\ \beta_0=\beta-r+s-\frac{1}{q_0}+\frac{1}{p},\quad \beta+\frac{1}{p}\not\in\{1,2,\ldots,r-s\}.$$

Тогда для всех функций $u\in\widetilde{W}^r_{p;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}({R^+}_n)$ *справедливо неравенство*

$$\left\|u;L^s_{q_0;\,\alpha_0,\,\beta_0}({R^+}_n)\right\|\leqslant M\left\|u;W^r_{p;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}({R^+}_n)\right\|,$$

где число $M>0$ *не зависит от функции* $u(x)$.

Список литературы

1. *Кондрашев В.И.* Об одной оценке для семейства функций, удовлетворяющих некоторым интегральным неравенствам // ДАН СССР. 1938. Т. 18, № 4–5. С. 253–254.
2. *Кудрявцев Л.Д.* Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений // Труды МИРАН. 1959. Т. 55. С. 1–182.
3. *Никольский С.М.*, *Лизоркин П.И.*, *Мирошин Н.И.* Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений // Известия вузов. Математика. 1988. № 8. С. 4–30.
4. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. 2-е изд. – М.: Наука, 1977. 455 с.
5. *Исхоков С.А.*, *Кужмуратов А.Я.* О вариационной задаче Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов // ДАН России. 2005. Т. 403, № 2. С. 165–168.
6. *Исхоков С.А.*, *Кужмуратов А.Я.* О гладкости обобщенного решения вариационной задачи Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения в дивергентной форме // ДАН Республики Таджикистан. 2008. Т. 51, № 12. С. 802–809.
7. *Iskhokov S.A.* Existence and uniqueness of solutions for variational Dirichlet problems of a nonlinear degenerate differential equation // Матем. заметки ЯГУ. 2008. Т. 15, № 1. С. 21–37.
8. *Исхоков С.А.* Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 2. С. 201–216.
9. *Исхоков С.А.*, *Гадоев М.Г.*, *Константинова Т.П.* Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов, порожденных некоэрцитивными формами // ДАН России. 2015. Т. 462, № 1. С. 7–10.
10. *Лизоркин П. И.* Оценки смешанных и промежуточных производных в весовых L_p-нормах // Труды МИРАН. 1980. Т. 156, С. 130–142.
11. *Исхоков С.А.* О гладкости обобщенного решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 11. С. 536–542.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 128–132

О коэрцитивных свойствах и разделимости нелинейного оператора Гельмгольца с матричным потенциалом в весовом пространстве

О. Х. Каримов

Институт математики им. А.Джураева АН РТ, Душанбе, Таджикистан

Аннотация. В работе исследованы коэрцитивные свойства нелинейного оператора Гельмгольца с матричным потенциалом в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$ и доказана его разделимость в этом весовом пространстве. Рассмотренные нелинейные операторы не являются слабыми возмущениями линейных операторов.

1. Пусть $\rho(x)$ — положительная функция, определенная в R^n, l — некоторое натуральное число. Символом $L_{2,\rho}(R^n)^l$ — обозначим пространство вектор-функций $u(x) = (u_1(x), ..., u_l(x)), u_j(x) \in L_2(R^n), (j = \overline{1, l})$ с конечной нормой

$$\|u; L_{2,\rho}(R^n)^l\| = \left(\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{R^n} \rho(x) |u_j(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пространство $L_{2,\rho}(R^n)^l$ является гильбертовым пространством, и в нём скалярное произведение определяется с помощью равенства

$$(u, \upsilon)_\rho = \sum_{j=1}^{l} \int\limits_{R^n} \rho(x) u_j(x) \overline{\upsilon_j(x)} dx \quad .$$

Рассмотрим оператор Гельмгольца с нелинейным матричным потенциалом

$$L[u] = (-\Delta + k^2)u(x) + V(x, u(x))u(x), \tag{1}$$

где $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, а значения $V(x, \omega)$, $x \in R^n, \omega \in C^l$ являются квадратными положительно-определёнными эрмитовыми матрицами из $\operatorname{End} C^l$.

Определение 1. *Уравнение* (1) (*и соответствующий ему дифференциальный оператор*), *следуя* [1], [2], *называется разделимым в* $L_{2,\rho}(R^n)^l$, *если* $(-\Delta + k^2)u(x)$, $V(x, u(x))u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l \ \forall \ u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l \cap W_{2,loc}^2(R^n)^l$ *такие, что* $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l$.

Разделимость дифференциальных выражений и соответствующие неравенства коэрцитивности исследованы во многих работах (см. [1] – [5] и имеющиеся там ссылки). Коэрцитивные оценки и разделимость для эллиптических операторов второго порядка в линейном случае при $l = 1$ изучалась в работе [4]. Вопрос о разделимости оператора Гельмгольца в линейном случае (т. е. в случае $V(x, u(x))u(x) = q(x)$), исследовался в работах [6] и [7]. В работе [8] изучалась разделимость нелинейного оператора Шредингера в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$.

© О. Х. Каримов, 2016

В данной работе рассматривается нелинейный оператор Гельмгольца в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$. Следует отметить, что разделимость нелинейных дифференциальных операторов в основном изучалась в случае, когда исследуемый оператор является слабым возмущением линейного оператора. В отличие от этого, рассматриваемые ниже нелинейные дифференциальные операторы могут не являться слабым возмущением линейного оператора.

2. Для $z^{(i)} = (z_1^{(i)}, \ldots, z_l^{(i)})$ $(i = 1, 2)$ положим $\langle z^{(1)}, z^{(2)} \rangle = \sum\limits_{j=1}^{l} z_j^{(1)} \overline{z_j^{(2)}}$. Далее обозначим $(u, v) = \int\limits_{R^n} \langle u(x), v(x) \rangle dx$, если интеграл в правой части абсолютно сходится.

Предположим, что значения матрица-функции $V(x, \omega) \in C(R^n \times C^l; \operatorname{End} C^l)$ являются квадратными положительно-определёнными эрмитовыми матрицами порядка l. Введём следующие обозначения:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_l, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_l) = V^{1/2}(x, \omega),\ (x_i \in R,\ \xi_j,\ \eta_j \in R),$$
$$Q(x_1, x_2, ..., x_n, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_l, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_l) = F^2(x, \omega),\ (x_i \in R,\ \xi_j,\ \eta_j \in R),$$

где ω определяется по формуле $\omega = (\xi_1 + i\eta_1,\ \ldots,\ \xi_l + i\eta_l)$.

Здесь $V^{\frac{1}{2}}(x, \omega)$ определяется как квадратный корень от положительно-определенной эрмитовой матрицы.

Определение 2. *Будем говорить, что матрица-функция $V(x, \omega)$ принадлежит классу $T_{\sigma_1,\sigma_2}^{\delta_1,\delta_2,\chi_1,\chi_2}$, если выполняются следующие условия для всех $x \in R^n, \omega = (\xi_1 + i\eta_1,\ \ldots,\ \xi_l + i\eta_l) \in C^l, \Omega = (\mu_1 + i\nu_1,\ \ldots,\ \mu_l + i\nu_l)$:*

$$\left\| F^{-\frac{1}{2}}(x, u)u \right\|^2 \leqslant \delta_1 \|F(x, u)u\|^2, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| F^{-\frac{1}{2}}(x, u) \frac{\partial F(x, u)}{\partial x_i} F^{-\frac{3}{2}}(x, u) \right\|^2 \leqslant \chi_1, \tag{3}$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{l} \mu_j F^{-\frac{1}{2}}(x, u) \frac{\partial F(x, u)}{\partial \xi_i} \omega + \nu_j F^{-\frac{1}{2}}(x, u) \frac{\partial F(x, u)}{\partial \eta_i} \omega; C^l \right\| \leqslant \sigma_1 \left\| F^{\frac{1}{2}}(x, u)\Omega; C^l \right\|, \tag{4}$$

$$\|V^{-1}(x, u)u\|^2 \leqslant \delta_2 \|u\|^2, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| Q^{-\frac{1}{2}}(x, u) \frac{\partial Q(x, u)}{\partial x_i} Q^{-1}(x, u) \right\|^2 \leqslant \chi_2, \tag{6}$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{l} \mu_j F^{-1}(x, u) \frac{\partial Q(x, u)}{\partial \xi_i} \omega + \nu_j F^{-1}(x, u) \frac{\partial Q(x, u)}{\partial \eta_i} \omega; C^l \right\| \leqslant \sigma_2 \left\| F(x, u)\Omega; C^l \right\|. \tag{7}$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть матрица-функция $V(x, \omega)$ принадлежит классу $T_{\sigma_1,\sigma_2}^{\delta_1,\delta_2,\chi_1,\chi_2}$ и пусть весовая функция $\rho(x)$ принадлежит классу $C^1(R^n)$ и для всех $x \in R^n$, $\omega = (\xi_1 + i\eta_1,\ \ldots,\ \xi_l + i\eta_l) \in C^l$ удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \rho(x)}{\partial x_i} \rho^{-\frac{1}{2}}(x) Q^{-\frac{1}{2}}(x, \omega) \right\| \leqslant \sigma. \tag{8}$$

Тогда при выполнении условий

$$0 < \sigma_1 < 1,\, 0 < \sigma_2 < 1, \quad \chi_1 + 2\delta_1 k^2 + \sigma < 4, \quad \chi_2 + 2\delta_2 k^2 + \sigma < 4,$$

нелинейный оператор Гельмгольца (1) *разделяется в пространстве* $L_{2,\rho}(R^n)^l$ *и для всех решений* $u \in L_{2,\rho}(R^n)^l \cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$ *уравнения*

$$-(\Delta + k^2)u(x) + V(x, u(x))u(x) = f(x)$$

с правой частью $f \in L_{2,\rho}(R^n)^l$ *выполняется следующее коэрцитивное неравенство*:

$$\|(\Delta + k^2)u(x); L_{2,\rho}(R^n)^l\| + \|V(x, u(x))u(x); L_{2,\rho}(R^n)^l\| +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \|V^{\frac{1}{2}}(x, u(x))\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\| + \|V^{\frac{1}{2}}(x, u(x))u(x); L_{2,\rho}(R^n)^l\| \leqslant M\|f(x); L_{2,\rho}(R^n)^l\|, \quad (9)$$

где положительное число M *не зависит от* u, f.

Далее мы остановимся на некоторых основных моментах доказательства этой теоремы. Сначала сформулируем без доказательства две вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть в уравнении* (1) *вектор-функция* f *принадлежит пространству* $L_{2,\rho}(R^n)^l$ *и вектор-функция* u *принадлежит классу* $L_{2,\rho}(R^n)^l \cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$. *Тогда, при выполнении условия* (8), *вектор-функции* $V^{\frac{1}{2}}(x, u(x))u(x)$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *принадлежат пространству* $L_{2,\rho}(R^n)^l$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (2) – (4), (8). *Тогда, если вектор-функция* u *из класса* $L_{2,\rho}(R^n)^l \cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$ *является решением уравнения* (1) *с правой частью* $f \in$ $\in L_{2,\rho}(R^n)^l$, *то вектор-функции* $F^{\frac{3}{2}}(x, u(x))u(x)$, $F^{\frac{1}{2}}(x, u(x))\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, ..., n$, *принадлежат пространству* $L_{2,\rho}(R^n)^l$.

3. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$ — фиксированная неотрицательная функция, обращающаяся в единицу при $|x| < 1$. Для любого положительного числа ε положим $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$. Используя равенство

$$(f, \rho\varphi_\varepsilon V(x, u)u) = (-\Delta u, \rho\varphi_\varepsilon V(x, u)u) - k^2(u, \rho\varphi_\varepsilon V(x, u)u) + (V(x, u)u, \rho\varphi_\varepsilon V(x, u)u),$$

где (,) — скалярное произведение в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$, после несложных преобразований получим

$$(f, \rho\varphi_\varepsilon V(x, u)u) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon V(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + B_1^\varepsilon(u) + B_2^\varepsilon(u) + B_3^\varepsilon(u) +$$

$$+B_4^\varepsilon(u) - k^2(u, \rho\varphi_\varepsilon V(x, u)u) + (V(x, u)u, \rho\varphi_\varepsilon V(x, u)u), \quad (10)$$

где

$$B_1^\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}Q(x, u)u\right),$$

$$B_2^\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon\sum_{j=1}^{l}(\mathrm{Re}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial Q(x, u)}{\partial \xi_j} + \mathrm{Im}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial Q(x, u)}{\partial \eta_j})u\right),$$

$$B_3^\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial Q(x, u)}{\partial x_i}u\right), \quad B_4^\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial x_i}Q(x, u)u\right).$$

Здесь и далее значения $Q(x,u)$, $\frac{\partial Q(x,u)}{\partial x_i}$, $\frac{\partial Q(x,u)}{\partial \xi_j}$, $\frac{\partial Q(x,u)}{\partial \eta_j}$ взяты в точке $(x_1, \ldots, x_n, \operatorname{Re} u_1(x), \ldots, \operatorname{Re} u_l(x), \mathcal{J}\, u_1(x), \ldots, \mathcal{J}\, u_l(x))$. Так как $\left\|\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}\right\| \leqslant M_0\varepsilon$, то, применяя неравенство Коши — Буняковского, можно получить оценку

$$|B_1^\varepsilon(u)| \leqslant M_0\varepsilon \sum_{i=1}^n \left\|F^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\| \cdot \left\|F^{\frac{3}{2}}(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|.$$

В силу леммы 2 отсюда следует, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}|B_1^\varepsilon(u)| = 0$. Относительно функционалов $B_m^\varepsilon(u)$, $m = 2,3,4$, получаются следующие оценки:

$$|B_2^\varepsilon(u)| \leqslant \sigma_2 \sum_{i=1}^n \left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2,$$

$$|B_3^\varepsilon(u)| \leqslant \frac{\beta}{2}\sum_{i=1}^n \left(F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \frac{\chi_2}{2\beta}(V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon V(x,u)u),$$

$$|B_4^\varepsilon(u)| \leqslant \frac{\beta}{2}\sum_{i=1}^n \left(F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \frac{\sigma}{2\beta}(V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon V(x,u)u).$$

Здесь β — произвольное положительное число, и χ_2, σ_2 и σ — константы из условий (6), (7) и (8). На основе вышеполученных оценок, учитывая неравенство (5), из равенства (10) находим

$$|(f, \varphi_\varepsilon V(x,u)u)| \geqslant \left(1 - \frac{\chi_2}{2\beta} - k^2\delta_2 - \frac{\sigma}{2\beta}\right)\cdot (V(x,u)u, \varphi_\varepsilon V(x,u)u) + \\ + (1 - \beta - \sigma_2)\cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon V(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - |B_1^\varepsilon(u)|.$$

Далее применим неравенство Коши — Буняковского и затем, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим неравенство

$$\|f; L_{2,\rho}(R^n)^l\|\|V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l\| \geqslant |(f, V(x,u)u)| \geqslant \left(1 - \frac{\chi_2+\sigma}{2\beta} - k^2\delta_2\right) \\ \cdot (V(x,u)u, V(x,u)u) + (1-\beta-\sigma_2)\cdot\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, V(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right). \qquad (11)$$

Далее подбираем числа $\beta > 0$ так,чтобы выполнялись условия

$$\frac{\chi_2+\sigma}{2\beta} + k^2\delta_2 < 1, \quad \beta + \sigma_2 < 1.$$

Теперь из неравенства (11) после несложных преобразований получим коэрцитивное неравенство (9). Разделимость нелинейного оператора Гельмгольца в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$ следует из коэрцитивного неравенства (9). Теорема доказана.

Список литературы

1. *Everitt W.N.*,*Gierz M.* Some properties of the domains certain differentail operators // Proc. London Math. Soc., 1971. Vol. 3. P. 301.
2. *Everitt W.N.*,*Gierz M.* Some properties of the domains of the power of certain differentail operators // Proc. London Math. Soc(3)., 1972. Vol. 24. P. 756.
3. *Бойматов К.Х.* Теоремы разделимости, весовые просранства и их приложения // Труды МИАН СССР. 1984. Т. 170. С. 37-76.
4. *Бойматов К.Х.* Коэрцитивные оценки и разделимость для эллиптических дифференциальных операторов второго порядка // ДАН СССР. 1988. Т. 301, № 5. С. 1033-1036.

5. *Отелбаев М*. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Труды МИАН СССР. 1983. Т. 161. С. 195-217.
6. *Saleh Omram and Khaled A. Gepreel*. Separation of the Helmholtz Partial Differential Eduation in Hilbert Space // Adv. Studies Thetor. Phus., 2012. Vol. 6, № 9. P. 399-410.
7. *Каримов О.Х*. О коэрцитивных свойствах и разделимости оператора Гельмгольца // ДАН Республики Таджикистан. 2015. Т. 58, № 3. С. 198-203.
8. *Каримов О.Х*. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов с матричными коэффициентами // ДАН Республики Таджикистан. 2005. Т. XLVIII, № 3-4. С. 38-43.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 133–136

Точные неравенства разных метрик типа Ремеза на классах функций с заданной функцией сравнения

В. А. Кофанов

Днепропетровский национальный университет, Днепр, Украина

Аннотация. Получены точные неравенства разных метрик типа Ремеза на классах функций с заданной функцией сравнения. Как следствие получены неравенства такого типа для тригонометрических полиномов и сплайнов.

Пусть $G \subset \mathbf{R}$. Будем рассматривать пространства $L_p(G)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, всех измеримых функций $x : G \to \mathbf{R}$, для которых $\|x\|_{L_p(G)} < \infty$, где

$$\|x\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\int\limits_G |x\,(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, & \text{если } 1 \leqslant p < \infty; \\ \operatorname{vrai\,sup}\limits_{\mathrm{t} \in \mathrm{G}} |x\,(t)|\,, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Пусть $d > 0$, I_d – окружность, реализованная в виде отрезка $[0, d]$ с отождествленными концами. Для $r \in \mathbf{N}$, $G = \mathbf{R}$ или $G = I_d$, через $L^r_\infty(G)$ обозначим пространство всех функций $x \in L_\infty(G)$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка и таких, что $x^{(r)} \in L_\infty(G)$. Для таких G вместо $\|x\|_{L_\infty(G)}$ будем писать $\|x\|_\infty$.

Будем говорить, что $f \in L^1_\infty(\mathbf{R})$ является функцией сравнения для $x \in L^1_\infty(\mathbf{R})$, если существует такое $\alpha \in \mathbf{R}$, что

$$\max_{t \in \mathbf{R}} x(t) = \max_{t \in \mathbf{R}} f(t) + \alpha, \qquad \min_{t \in \mathbf{R}} x(t) = \min_{t \in \mathbf{R}} f(t) + \alpha.$$

и из равенства $x(\xi) = f(\eta) + \alpha$, где $\xi, \eta \in \mathbf{R}$, вытекает неравенство $|x'(\xi)| \leqslant |f'(\eta)|$, если указанные производные существуют.

Нечетную 2ω-периодическую функцию $\varphi \in L^1_\infty(I_{2\omega})$ будем называть S-функцией, если она обладает свойствами: φ – четная относительно $\omega/2$, $|\varphi|$ – выпуклая вверх на $[0, \omega]$ и строго монотонная на $[0, \omega/2]$.

Для 2ω-периодической S-функции φ через $S_\varphi(\omega)$ обозначим класс функций x из пространства $L^1_\infty(\mathbf{R})$, для которых φ является функцией сравнения. Отметим, что классы $S_\varphi(\omega)$ рассматривались в работах болгарских математиков (Bojanov B., Naidenov N.). Примерами классов $S_\varphi(\omega)$ являются соболевские классы

$$\{x \in L^r_\infty(\mathbf{R}) : \|x\|_\infty \leqslant A_0, \;\; \|x^{(r)}\|_\infty \leqslant A_r\},$$

а также ограниченные подмножества пространства T_n (тригонометрических полиномов порядка не выше n) и пространства $S_{n,r}$ (сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $k\pi/n, k \in \mathbf{Z}$).

В теории аппроксимации полиномами важную роль играют неравенства типа Ремеза

$$\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi})} \leqslant C(n, \beta)\, \|T\|_{L_\infty(I_{2\pi} \setminus B)} \tag{1}$$

© В. А. Кофанов, 2016

на классе T_n, где $B-$ произвольное измеримое по Лебегу множество $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leqslant \beta \in$ $\in (0, 2\pi)$.

Начало этой тематике положила работа Ремеза, в которой он нашел точную константу в неравенстве вида (1) для алгебраических многочленов. В неравенстве Ремеза экстремальным является многочлен Чебышева 1-го рода. Точная константа в неравенстве (1) для тригонометрических полиномов неизвестна. В ряде работ получены двухсторонние оценки для точных констант $C(n, \beta)$. Кроме того, известно асимптотическое поведение констант $C(n, \beta)$ при $\beta \to 2\pi$ (Ganzburg M.I.) и $\beta \to 0$ (Nursultanov E., Tikhonov S.). В последней работе доказано неравенство

$$\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi})} \leqslant \left(1 + 2\operatorname{tg}^2 \frac{n\beta}{4m}\right) \|T\|_{L_\infty(I_{2\pi} \setminus B)} \tag{2}$$

для произвольного полинома $T \in T_n$, имеющего минимальный период $2\pi/m$, и любого измеримого по Лебегу множества $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leqslant \beta$, где $\beta \in (0, 2\pi m/n)$. Равенство в (2) достигается для полинома $T(t) = \cos nx + \frac{1}{2}(1 - \cos\beta/2)$. Этот результат был обобщен в работе Кофанова В. А., где для любой d-периодической функции $x \in S_\varphi(\omega)$ ($\varphi-$ заданная функция сравнения) и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset I_d$, $\mu B \leqslant \beta$, доказаны неравенства

$$\|x\|_\infty \leqslant \frac{3\|\varphi\|_\infty - \varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)}{\|\varphi\|_\infty + \varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)} \|x\|_{L_\infty(I_d \setminus B)} \tag{3}$$

и

$$E_0(x)_\infty \leqslant \frac{2\|\varphi\|_\infty}{\|\varphi\|_\infty + \varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)} \|x\|_{L_\infty(I_d \setminus B)}, \tag{4}$$

где $E_0(x)_\infty-$ наилучшее равномерное приближение константами функции x. Оба неравенства (3) и (4) являются точными на классе $S_\varphi(\omega)$ и обращаются в равенство для функции $x(t) = \varphi(t) + \frac{1}{2}\left(\|\varphi\|_\infty - \varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)\right)$.

В данной работе представлены дальнейшие результаты в этом направлении.

Теорема 1. *Пусть $p \in [1, \infty]$, $\varphi-$ S-функция с периодом 2ω, $\beta \in (0, 2\omega)$. Для любой d-периодической функции $x \in S_\varphi(\omega)$ и измеримого множества $B \subset I_d$, $\mu B \leqslant \beta$, имеет место неравенство*

$$E_0(x)_\infty \leqslant \frac{\|\varphi\|_\infty}{E_0(\varphi)_{L_p(I_{2\omega} \setminus B_1)}} \|x\|_{L_p(I_d \setminus B)}, \tag{5}$$

где $B_1 := \left[\frac{\omega-\beta}{2}, \frac{\omega+\beta}{2}\right]$.

Неравенство (5) является точным и обращается в равенство для функции $x(t) =$ $= \varphi(t) - \alpha_p(\varphi, B_1)$ и множества $B = B_1$, где $\alpha_p(\varphi, B_1)-$ константа наилучшего приближения функции φ в метрике пространства $L_p(I_{2\omega} \setminus B_1)$.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 выполнено точное на классе $S_\varphi(\omega)$ неравенство*

$$E_0(x)_\infty \leqslant \frac{\|\varphi\|_\infty}{\left\|\varphi + \varphi\left(\frac{\beta}{4}\right)\right\|_{L_1(I_{2\omega} \setminus B_1)}} \|x\|_{L_1(I_d \setminus B)},$$

Замечание. Неравенство (4) также является следствием неравенства (5).

Символом $\varphi_r(t)$, $r \in \mathbf{N}$, обозначим сдвиг r-го 2π-периодического интеграла с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin t$, удовлетворяющий условию $\varphi_r(0) = 0$. Для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$. Ясно, что сплайн $\varphi_{\lambda,r}(t)$ является S-функцией с периодом $2\pi/\lambda$. Пусть далее $K_r := \|\varphi_r\|_\infty-$ константа Фавара.

Теорема 2. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, $p \in [1, \infty]$, $\beta \in (0, 2\pi)$. Тогда для любой функции $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$ и произвольного измеримого множества $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leqslant \beta/\lambda$, где $\lambda = \left(\frac{K_r\|x^{(r)}\|_\infty}{E_0(x)_\infty}\right)^{\frac{1}{r}}$, имеет* *место неравенство*

$$E_0(x)_\infty \leqslant \frac{\|\varphi_r\|_\infty}{E_0(\varphi_r)^\alpha_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_1)}} \|x\|^\alpha_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_\infty, \tag{6}$$

где $\alpha = \frac{r}{r+1/p}$, $B_1 := \left[\frac{\pi-\beta}{2}, \frac{\pi+\beta}{2}\right]$.

Неравенство (6) является точным и обращается в равенство для функции $x(t) = \varphi_r(t) - \alpha_p(\varphi_r, B_1)$ *и множества* $B = B_1$, *где* $\alpha_p(\varphi_r, B_1)$*– константа наилучшего приближения сплайна* φ_r *в метрике пространства* $L_p(I_{2\pi} \setminus B_1)$.

Следствие 2. *В условиях теоремы 2 для любого* $k \in \mathbf{N}$, $k < r$, *имеет место неравенство*

$$\|x^{(k)}\|_\infty \leqslant \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{E_0(\varphi_r)^\alpha_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_1)}} \|x\|^\alpha_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_\infty, \tag{7}$$

где $\alpha = \frac{r-k}{r+1/p}$, $B_1 := \left[\frac{\pi-\beta}{2}, \frac{\pi+\beta}{2}\right]$.

Неравенство (7) является точным и обращается в равенство для той же функции и того же множества, что и неравенство (6).

Следствие 3. *В условиях теоремы 2 выполнены точные на классе* $L^r_\infty(I_{2\pi})$ *неравенства*

$$E_0(x)_\infty \leqslant \|\varphi_r\|_\infty \left(\frac{\|x\|_{L_1(I_{2\pi}\setminus B)}}{\|\varphi_r + \varphi_r(\frac{\beta}{4})\|_{L_1(I_{2\pi}\setminus B_1)}}\right)^{\frac{r}{r+1}} \|x^{(r)}\|^{\frac{1}{r+1}}_\infty,$$

$$\|x^{(k)}\|_\infty \leqslant \|\varphi_{r-k}\|_\infty \left(\frac{\|x\|_{L_1(I_{2\pi}\setminus B)}}{\|\varphi_r + \varphi_r(\frac{\beta}{4})\|_{L_1(I_{2\pi}\setminus B_1)}}\right)^{\frac{r-k}{r+1}} \|x^{(r)}\|^{\frac{k+1}{r+1}}_\infty,$$

$$\|x^{(k)}\|_\infty \leqslant \|\varphi_{r-k}\|_\infty \left(\frac{2\,\|x\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)}}{\|\varphi_r\|_\infty + \varphi_r\left(\frac{\pi-\beta}{2}\right)}\right)^{\frac{r-k}{r}} \|x^{(r)}\|^{\frac{k}{r}}_\infty,$$

Замечание. При $\beta = 0$ неравенство (6) а также следствия 2 и 3 были доказаны ранее в работах Бабенко В.Ф., Кофанова В.А., Пичугова С.А.

Теорема 3. *Пусть* $p \in [1, \infty]$, $n, m \in \mathbf{N}$, $m \leqslant n$, $\beta \in (0, 2\pi m/n)$. *Если тригонометрический полином* $T \in T_n$ *имеет минимальный период* $2\pi/m$, *то для любого измеримого множества* $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leqslant \beta$, *имеет место неравенство*

$$E_0(T)_\infty \leqslant \left(\frac{n}{m}\right)^{1/p} \frac{\|T\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}}{E_0(\sin n(\cdot))_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_1^m)}}, \tag{8}$$

где $B_1^m = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} \left\{B_1^{m,n} + \frac{2k\pi}{n}\right\}$, $\qquad B_1^{m,n} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\beta}{m}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\beta}{m}\right)\right]$.

Неравенство (8) является точным и обращаются в равенство для полинома $T(t) = \sin nt - \alpha_p(\sin n(\cdot), B_1^m)$ *и множества* $B = B_1^m$, *где* $\alpha_p(\sin n(\cdot), B_1^m)$*– константа наилучшего приближения функции* $\sin n(\cdot)$ *в метрике пространства* $L_p(I_{2\pi} \setminus B_1^m)$.

Следствие 4. *В условиях теоремы 3 выполнены точные на классе* T_n *неравенства*

$$E_0(T)_\infty \leqslant \frac{n}{m} \; \frac{\|T\|_{L_1(I_{2\pi}\setminus B)}}{\|\sin n(\cdot) + \sin n\frac{\beta}{4m}\|_{L_1(I_{2\pi}\setminus B_1^m)}}$$

и

$$E_0(T)_\infty \leqslant \left(1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{n\beta}{4m}\right) \|T\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)}\,.$$

Замечание. Последнее неравенство вытекает также из неравенства (2) Нурсултанова Е. и Тихонова С.

Теорема 4. *Пусть* $p \in [1, \infty]$, $r, n, m \in \mathbf{N}$, $m \leqslant n$, $\beta \in (0, 2\pi m/n)$. *Если сплайн* $s \in S_{n,r}$ *имеет минимальный период* $2\pi/m$, *то для любого измеримого множества* $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leqslant \beta$, *имеет место неравенство*

$$E_0(s)_\infty \leqslant \left(\frac{n}{m}\right)^{1/p} \frac{\|\varphi_{n,r}\|_\infty}{E_0(\varphi_{n,r})_{L_p(I_{2\pi} \setminus B_1^m)}} \|s\|_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)}, \tag{9}$$

где $B_1^m = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} \left\{ B_1^{m,n} + \frac{2k\pi}{n} \right\}$, $\qquad B_1^{m,n} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{n} - \frac{\beta}{m} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{n} + \frac{\beta}{m} \right) \right]$.

Неравенство (9) является точным и обращается в равенство для сплайна $s(t) = \varphi_{n,r}(t) - \alpha_p(\varphi, B_1^m)$ *и множества* $B = B_1^m$, *где* $\alpha_p(\varphi_{n,r}, B_1^m)$*– константа наилучшего приближения сплайна* $\varphi_{n,r}$ *в метрике пространства* $L_p(I_{2\pi} \setminus B_1^m)$.

Следствие 5. *В условиях теоремы 4 выполнены точные на классе* $S_{n,r}$ *неравенства*

$$E_0(s)_\infty \leqslant \frac{n}{m} \; \frac{\|\varphi_{n,r}\|_\infty}{\|\varphi_{n,r}(\cdot) + \varphi_{n,r}\left(\frac{\beta}{4m}\right)\|_{L_1(I_{2\pi} \setminus B_1^m)}} \|s\|_{L_1(I_{2\pi} \setminus B)}$$

и

$$E_0(s)_\infty \leqslant \frac{2\|\varphi_{n,r}\|_\infty}{\|\varphi_{n,r}\|_\infty + \varphi_{n,r}\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\beta}{2m}\right)} \|s\|_{L_\infty(I_{2\pi} \setminus B)}.$$

Замечание. При $\beta = 0$ и $m = 1$ неравенства (8) и (9) были доказаны ранее в работах Бабенко В.Ф., Кофанова В.А., Пичугова С.А.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 137–141

Приближение непрерывных функций линейными интерполяционными сплайнами

У. К. Конунова

Хорогский государственный университет им. М.Назаршоева, Хорог, Таджикистан

Аннотация. В работе найдены некоторые оценки совместного приближения функции и её производной линейными интерполяционными сплайнами в пространстве L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Линейные интерполяционные сплайны (ломаные) в качестве приближающего аппарата использовались в ряде работ [1–3], где для некоторых классов функций найдены точные оценки погрешности в равномерной метрике пространства $C[0,1]$ непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций и в метрике пространства $L_p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$.

Напомним, что функцию $S_1(x)$ называют сплайном первой степени на сетке

$$\Delta_n : 0 = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = 1,$$

если она непрерывна на отрезке $[0,1]$ и совпадает с линейной функцией на каждом из частичных отрезков $[x_{k-1}, x_k](k = \overline{1,n})$. Пусть на $[0,1]$ задана непрерывная функция $f(x)$ и сплайн $S_1(x) := S_1(f;x)$ интерполирует ее в узлах равномерной сетки $x_k = k/n$, то есть $S_1(f;x_k) = f(x_k)$ $(k = \overline{0,n})$. В этом случае функцию $S_1(f;x)$ называют линейным интерполяционным сплайном.

Пусть ω – заданный модуль непрерывности, т. е. непрерывная неубывающая полуаддитивная функция, в нуле равная нулю. Обозначим через $H^{\omega}[0,1]$ класс функций $f \in C[0,1]$, удовлетворяющих условию

$$|f(x^{'}) - f(x^{''})| \leqslant \omega(|x^{'} - x^{''}|), \quad \text{для любых} \quad x^{'}, x^{''} \in [0,1],$$

а через $W^{(1)}H^{\omega}[0,1]$ – класс функций $f \in C^{(1)}[0,1]$, модуль непрерывности первой производной которых удовлетворяет неравенству $\omega(f^{'}, t) \leqslant \omega(t)$ при всех $t \in [0,1]$.

В. Н. Малоземов [1, 2] доказал следующие две теоремы.

Теорема A. *Если ω – выпуклый вверх модуль непрерывности, то*

$$\sup\left\{\|f - S_1(f)\|_{C[0,1]} : f \in H^{\omega}[0,1]\right\} = \omega\left(\frac{1}{2n}\right), \tag{1}$$

$$\sup\left\{\|f - S_1(f)\|_{C[0,1]} : f \in W^{(1)}H^{\omega}[0,1]\right\} = \frac{1}{4}\int\limits_0^{1/n} \omega(t)dt. \tag{2}$$

Теорема B. *Для произвольного модуля непрерывности $\omega(t)$*

$$\sup\left\{\|f^{'}(x) - S_1^{'}(f;x)\|_{C[0,1]} : f \in W^{(1)}H^{\omega}[0,1]\right\} = n\int\limits_0^{1/n} \omega(t)dt. \tag{3}$$

В. Ф. Сторчай [3] перенес утверждение (1) теоремы A на пространство $L_p[0,1]$ $(p \geqslant 1)$, установив следующее утверждение.

© У. К. Конунова, 2016

Теорема С. *Если ω – выпуклый вверх модуль непрерывности, то при любом $1 \leqslant p < < \infty$ имеет место равенство*

$$\sup\{\|f - S_1(f)\|_{L_p[0,1]} : f \in H^\omega[0,1]\} = \left(2n \int\limits_0^{1/(2n)} \omega^p(t)dt\right)^{1/p}. \tag{4}$$

Очевидно, что (1) получается из (4) при $p \to \infty$.

В некоторых задачах аппроксимации требуется получить аналоги равенств (2), (3) в пространстве $L_p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$. В этой заметке указанная задача решена без каких-либо ограничений на модуль непрерывности ω.

Заметим, что сплайн $S_1(f;x)$, интерполирующий функцию f в точках $x_k = k/n$ ($k = = \overline{0,n}$), представим на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ в виде

$$S_1(f;x) = H_{0,k}(x)f(x_{k-1}) + H_{1,k}(x)f(x_k) = \sum_{\mu=0}^{1} H_{\mu,k}(x)f(x_{\mu+k-1}), \tag{5}$$

где

$$H_{0,k}(x) = n(x_k - x), \ \sum_{\mu=0}^{1} H_{\mu,k}(x) = 1. \tag{6}$$

Из (5) очевидно, что значения $S_1(f;x)$ в фиксированной точке $x \in [0,1]$ определяются значениями $f(x)$ в концах соответствующего отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ куда она попадает, поэтому погрешность интерполяции можно оценить локально на каждом из таких частичных отрезков. Нам потребуется следующая

Лемма 1. *Пусть $f \in C^{(1)}[0,1]$. Тогда в каждой точке $x \in [0,1]$ справедливо следующее интегральное представление погрешности*:

$$e_n(f;x) := f(x) - S_1(f;x) =$$
$$= -\frac{1}{n}H_{0,k}(x)H_{1,k}(x)\int\limits_0^1 \left[f'(x + t(x_k - x)) - f'(x + t(x_{k-1} - x))\right]dt. \tag{7}$$

Доказательство. Рассмотрим значения $f(x_{k-1})$, $f(x_k)$, $f(x)$ функции f, где $x \in \in [x_{k-1}, x_k]$. На основании интерполяционной формулы Ньютона значение $f(x)$ выражается через значение $f(x_{k-1})$ и разностные отношения $f(x_{k-1}, x_k)$ и $f(x_{k-1}, x_k, x)$ (см., например, [4, с. 47]):

$$f(x) = f(x_{k-1}) + (x - x_{k-1})f(x_{k-1}, x_k) + (x - x_{k-1})(x - x_k)f(x_{k-1}, x_k; x). \tag{8}$$

Сумма первых двух слагаемых правой части равенства (8) представляет собой интерполяционный многочлен первой степени в ньютоновой форме, совпадающий со сплайном $S_1(f;x)$, интерполирующим f в узлах x_{k-1} и x_k. Поэтому последний член правой части (8) должен совпадать с остатком интерполирования. Итак имеем

$$e_n(f;x) := f(x) - S_1(f;x) = (x - x_{k-1})(x - x_k)f(x_{k-1}, x_k; x). \tag{9}$$

Но так как (см., например [4, с.49-50])

$$f(x_{k-1}, x_k; x) = \frac{f(x, x_k) - f(x, x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = n[f(x, x_k) - f(x, x_{k-1})] =$$
$$= n\int\limits_0^1 [f'(x + t(x_k - x)) - f'(x + t(x_{k-1} - x))]dt,$$

то равенство (9) приобретает вид

$$e_n(f;x) := n(x-x_{k-1})(x-x_k)\int_0^1 [f^{'}(x+t(x_k-x)) - f^{'}(x+t(x_{k-1}-x))]dt =$$

$$= -\frac{1}{n}H_{0,k}(x)H_{1,k}(x)\int_0^1 [f^{'}(x+t(x_k-x)) - f^{'}(x+t(x_{k-1}-x))]dt,$$

чем и завершаем доказательство леммы 1.

Лемма 2. *Пусть* $f \in C^{(1)}[0,1]$. *Тогда в каждой точке* $x \in [x_{k-1}, x_k]$ *справедливо интегральное представление*

$$e_n^{'}(f;x) := f^{'}(x) - S_1^{'}(f;x) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{1} H_{\mu,k}(x)\int_0^1 \left[f^{'}(x) - f^{'}(x+t(x_{k-\mu}-x))\right]dt. \tag{10}$$

Доказательство. В силу представления (5) и равенства (6) очевидно, что производная $S^{'}(f;x)$ определена для $x \neq x_k (k=\overline{0,n})$. Следуя [2], доопределим производную $S^{'}(f;x)$ на всем отрезке $[0,1]$, положив

$$S_1^{'}(f;x_k) = n[f(x_k) - f(x_{k-1})],\ k=\overline{1,n-1};$$

$$S_1^{'}(f;1) = n[f(1) - f(x_{n-1})].$$

Используя определение и свойства разделенных разностей функции $f(x)$ для $x \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k=\overline{1,n})$, запишем

$$e_n^{'}(f;x) = f^{'}(x) - S_1^{'}(f;x) = f^{'}(x) - x[f(x_k) - f(x_{k-1})] =$$

$$= f^{'}(x) - n(x_k - x)\frac{f(x_k)-f(x)}{x_k - x} - n(x-x_{k-1})\frac{f(x)-f(x_{k-1})}{x-x_{k-1}} =$$

$$= f^{'}(x) - H_{0,k}(x)f(x_k,x) - H_{1,k}(x)f(x_{k-1},x) =$$

$$= f^{'}(x) - \sum_{\mu=0}^{1} H_{\mu,k}(x)f(x_{k-\mu},x). \tag{11}$$

Представляя разделенно-разностные отношения в интегральной форме, с учетом тождества (6), перепишем $e^{'}(f;x)$ в виде

$$e_n^{'}(f;x) = \sum_{\mu=0}^{1} H_{\mu,k}(x)\int_0^1 \left[f^{'}(x) - f^{'}(x+t(x_{k-\mu}-x))\right]dt,$$

откуда и следует утверждение леммы 2. Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть* ω *– произвольный модуль непрерывности. Тогда при* $p \in [1,+\infty)$ *справедливо неравенство*

$$\sup\left\{\|f - S_1(f)\|_{L_p[0,1]} : f \in W^{(1)}H^{\omega}[0,1]\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\Gamma^2(p+1)}{\Gamma(2p+2)}\right)^{1/p} \cdot \frac{1}{\sqrt[q]{n}}\left(\int_0^{1/n} \omega^p(t)dt\right)^{1/p}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty. \tag{12}$$

Доказательство. В силу леммы 1 для любой точки $x \in [x_{k-1}, x_k]$ и произвольной функции $f \in C^{(1)}[0,1]$ имеем

$$|e_n(f;x)| \leqslant |f(x) - S_1(f;x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n}H_{0,k}(x)H_{1,k}(x)\int\limits_0^1 \left|f^{'}(x+t(x_k-x))-f^{'}(x+t(x_{k-1}-x))\right|dt.$$

Применяя к интегралу в правой части неравенство Гельдера для интегралов с учётом определения модуля непрерывности, получаем

$$|e_n(f;x)|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n}H_{0,k}(x)H_{1,k}(x)\left(\int\limits_0^1 \left|f^{'}(x+t(x_k-x))-f^{'}(x+t(x_{k-1}-x))\right|^p dt\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n}H_{0,k}(x)H_{1,k}(x)\left(\int\limits_0^1 \omega^p(f^{'};t(x_k-x_{k-1}))dt\right)^{1/p}=\frac{1}{n}H_{0,k}(x)H_{1,k}(x)\left(n\int\limits_0^{1/n}\omega^p(f^{'};t)dt\right)^{1/p}=$$

$$=n(x_k-x)(x-x_{k-1})\left(n\int\limits_0^{1/n}\omega^p(f^{'};t)dt\right)^{1/p},\quad 1\leqslant p<\infty. \tag{13}$$

Из (13) для произвольной $f\in W^{(1)}H^{\omega}[0,1]$ будем иметь

$$\|e_n(f;x)\|^p_{L_p[0,1]}=\sum_{k=1}^n\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}|e_n(f;x)|^p dx\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^n n^{p+1}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}(x_k-x)^p(x-x_{k-1})^p dx\int\limits_0^{1/n}\omega^p(f^{'};t)dt=$$

$$=\sum_{k=1}^n n^{p+1}h_k^{2p+1}\int\limits_0^1 t^p(1-t)^p dt\int\limits_0^{1/n}\omega^p(t)dt=\frac{\Gamma^2(p+1)}{\Gamma(2p+2)}\cdot\frac{1}{n^p}\left(n\int\limits_0^{1/n}\omega^p(t)dt\right).$$

Отсюда, сразу следует неравенство

$$\|e_n(f;x)\|_{L_p[0,1]}\leqslant\left(\frac{\Gamma^2(p+1)}{\Gamma(2p+2)}\right)^{1/p}\cdot\frac{1}{\sqrt[q]{n}}\left(\int\limits_0^{1/n}\omega^p(t)dt\right)^{1/p}$$

которое и завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 2. *Для произвольного модуля непрерывности ω при любом $p\in[1,\infty)$ имеет место неравенство*

$$\sup\left\{\|f^{'}(x)-S_1^{'}(f;x)\|_{L_p[0,1]}: f\in W^{(1)}H^{\omega}[0,1]\right\}\leqslant\sqrt[p]{\frac{2}{p+1}}\left(n\int\limits_0^{1/n}\omega^p(t)dt\right)^{1/p}. \tag{14}$$

Доказательство. Так как для функции $f\in C^{(1)}[0,1]$ согласно утверждению леммы 2 имеет место равенство (10), то для произвольной точки $x\in[x_{k-1},x_k]$ $(k=\overline{1,n})$ и любой функции $f\in W^{(1)}H^{\omega}[0,1]$ с учетом неравенства Гельдера

$$\left(\int\limits_a^b|\varphi(x)+\psi(x)|^p dx\right)^{1/p}\leqslant\left(\int\limits_a^b|\varphi(x)|^p dx\right)^{1/p}+\left(\int\limits_a^b|\psi(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

при $1\leqslant p<\infty$ имеем

$$\|e_n(f;x)\|^p_{L_p[x_{k-1},x_k]}=\|f^{'}(x)-S_1^{'}(f;x)\|^p_{L_p[x_{k-1},x_k]}=$$

$$= \left\| \sum_{\mu=0}^{1} H_{\mu,k}(x) \int\limits_0^1 \left[f'(x) - f'(x + t(x_{k-\mu} - x))\right]^p dt \right\|^p_{L_p[x_{k-1},x_k]} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |H_{0,k}(x)|^p \left(\int\limits_0^1 \left| f'(x) - f'(x + t(x_{k-\mu} - x)) \right| dt \right)^p dx +$$

$$+ \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |H_{1,k}(x)|^p \left(\int\limits_0^1 \left| f'(x) - f'(x + t(x_{k-1} - x)) \right| dt \right)^p dx \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |H_{0,k}(x)|^p dx + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |H_{1,k}(x)|^p dx \right\} \left(n \int\limits_0^{1/n} \omega^p(t) dt \right)^p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{(p+1)n} \left(n \int\limits_0^{1/n} \omega(t) dt \right)^p \leqslant \frac{2}{(p+1)n} \left(n \int\limits_0^{1/n} \omega^p(t) dt \right). \qquad (15)$$

Отметим, что при выводе правой части (15), мы воспользовались элементарным неравенством

$$\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b |g(x)| dx \leqslant \left(\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p}, \ 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Используя неравенство (15), получаем

$$\|f'(x) - S_1'(f;x)\|^p_{L_p[0,1]} = \sum_{k=1}^{n} \|f'(x) - S_1'(f;x)\|^p_{L_p[x_{k-1},x_k]} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(p+1)n} \left(n \int\limits_0^{1/n} \omega^p(t) dt \right) = \frac{2}{p+1} \left(n \int\limits_0^{1/n} \omega^p(t) dt \right),$$

или что то же самое

$$\|f'(x) - S_1'(f;x)\|_{L_p[0,1]} \leqslant \sqrt[p]{\frac{2}{p+1}} \left(n \int\limits_0^{1/n} \omega^p(t) dt \right)^{1/p},$$

откуда и вытекает неравенство (14). Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. *Малозёмов В.Н.* К полигональной интерполяции // Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 5. С. 537-540.
2. *Малозёмов В.Н.* Об отклонении ломаных // Вестник ЛГУ. Математика. механика, астрономия. 1966. Вып. 2, № 5. С. 150-153.
3. *Сторчай В.Ф.* Об отклонении ломаных в метрике L_p // Матем. заметки. 1969. Т. 5, № 1. С. 31-37.
4. *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов. Физматгиз. 1959. 327 с.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 142–143

Методы полиномиальной оптимизации в экстремальных геометрических задачах на сфере трехмерного евклидова пространства

Н. А. Куклин

Институт математики и механики УрО РАН им. Н. Н. Красовского, Институт математики и компьютерных наук Уральского федерального университета им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

Аннотация. В докладе рассмотрены методы разложения пространства $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ в прямую сумму минимальных инвариантных (относительно компактной группы $\mathrm{S}(n)\times\mathrm{O}(3)$) подпространств, а также представлены новые результаты для конкретных экстремальных геометрических задач об оптимальном расположении точек на евклидовой сфере.

Пусть $\mathbb{S}^2$ — единичная сфера в трехмерном евклидовом пространстве. Для целого числа $n \geqslant 2$ обозначим через $(\mathbb{S}^2)^n$ декартово произведение n копий сферы $\mathbb{S}^2$. Элементы множества $(\mathbb{S}^2)^n$ являются упорядоченными наборами из n точек сферы $\mathbb{S}^2$ и называются сферическими кодами. На множестве $(\mathbb{S}^2)^n$ есть естественная геометрическая симметрия, а именно, будем считать два сферических кода одинаковыми, если один получается из другого

(1) перестановкой точек;

(2) действием некоторого ортогонального преобразования на все точки кода;

(3) композицией (1) и (2).

Таким образом, $(\mathbb{S}^2)^n$ инвариантно относительно компактной группы $\mathrm{S}(n)\times\mathrm{O}(3)$, где $\mathrm{S}(n)$ — конечная группа перестановок n-элементного множества, а $\mathrm{O}(3)$ — ортогональная группа трехмерного евклидова пространства.

Пусть W есть многочлен от $3n$ переменных с вещественными коэффициентами, инвариантный относительно группы $\mathrm{S}(n)\times\mathrm{O}(3)$. Рассмотрим задачу о нахождении величины $\min\{W(Q)\mid Q\in(\mathbb{S}^2)^n\}$. К такой задаче могут быть сведены различные экстремальные геометрические задачи об оптимальном расположении точек на сфере: задача Томсона, задача о контактном числе, задача о диктаторах.

Обозначим через $\mathcal{A}$ алгебру многочленов от $3n$ переменных. Множество $(\mathbb{S}^2)^n$ является аффинным алгебраическим многообразием в $\mathbb{R}^{3n}$; обозначим через $\mathcal{I}\subset\mathcal{A}$ соответствующий идеал. Через $\mathcal{A}_{\leqslant d}\subset\mathcal{A}$ обозначим подпространство многочленов степени не выше d, а через $(\mathcal{A}/\mathcal{I})_{\leqslant d}\subset\mathcal{A}/\mathcal{I}$ — соответствующее подпространство в факторалгебре. Пусть $\Sigma_{\leqslant 2d}\subset(\mathcal{A}/\mathcal{I})_{\leqslant 2d}$ есть множество конечных сумм квадратов элементов из $(\mathcal{A}/\mathcal{I})_{\leqslant d}$. Schmüdgen's Positivstellensatz [1] влечет сходимость

$$\sup\{\gamma\in\mathbb{R}\mid W-\gamma\in\Sigma_{\leqslant 2d}\}\nearrow\min\{W(Q)\mid Q\in(\mathbb{S}^2)^n\}$$

Работа выполнена при поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-9356.2016.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

© Н. А. Куклин, 2016

при $d \to \infty$. Задача $\sup\{\gamma \in \mathbb{R} \mid W - \gamma \in \Sigma_{\leqslant 2d}\}$ является задачей полуопределенного программирования (см., например, [2]).

Получающиеся задачи полуопределенного программирования оказываются сложными уже при малых n и d — размер матрицы зависит от размерности пространства $(\mathcal{A}\,/\,\mathcal{I})_{\leqslant d}$, а число ограничений — от размерности $(\mathcal{A}\,/\,\mathcal{I})_{\leqslant 2d}$. Чтобы уменьшить размеры матриц и количество ограничений, можно воспользоваться тем, что многочлен W является инвариантным относительно компактной группы $\mathrm{S}(n) \times \mathrm{O}(3)$. Впервые такой подход применялся в работе [3] для (отличной от рассматриваемой в данной работе) задачи минимизации многочленов, инвариантных относительно конечной группы отражений. Уменьшение соответствующих величин происходит за счет выбора специального базиса в пространстве $\mathcal{A}\,/\,\mathcal{I}$ из разложения $\mathcal{A}\,/\,\mathcal{I}$ в прямую сумму минимальных инвариантных подпространств.

Список литературы

1. *Schmüdgen K*. The K-moment problem for compact semi-algebraic sets // Math. Ann. 1991. Vol. 289. P. 203–206.
2. *Lasserre J.B*. Moments, Positive Polynomials and Their Applications // Imperial College Press Optimization Series. 2010. P. 361.
3. *Gatermann K*., *Parrilo P*. Symmetry groups, semidefinite programs, and sums of squares. J. Pure Appl. Algebra. 2004. Vol. 192. P. 95–128.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 144–144

Compact Precomputed Voxelized Shadows Construction on GPU

N. A. Kuklin[1,2], A. A. Kuklina[2]

[1]*Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,*
[2]*Institute of Mathematics and Computer Sciences of the Ural Federal University,*
Yekaterinburg, Russia

Аннотация. We consider the problem of producing high-quality shadows in real-time for 3D computer graphics software. In [1, 4] authors have proposed new data structure for object geometry representation by binary voxel grid. This binary data was packed to directed acyclic graph — traditional sparse voxel octree with merged identical subtrees. This approach has been extended to shadowing by voxelizing shadow volumes instead of object geometry [2, 3]. Obtained structure enables high-quality filtered shadows to be reconstructed for any point in the scene in real-time.

In [1–4] authors have used CPU-based bottom-up algorithm that reduces sparse voxel octree to minimal directed acyclic graph. In the present paper we construct new parallel algorithm for such reduction that runs entirely on GPU.

Список литературы

1. *Kämpe V.*, *Sintorn E.*, *Assarsson U.* High resolution sparse voxel dags // ACM Trans. Graph. 2013. Vol. 32, № 4 (July). P. 101:1–101:13.
2. *Sintorn E.*, *Kämpe V.*, *Olsson O.*, *Assarsson U.* Compact precomputed voxelized shadows // ACM Trans. Graph. 2014. Vol. 33, № 4 (July). P. 150:1–150:8.
3. *Kämpe V.*, *Sintorn E.*, *Assarsson U.* Fast, memory-efficient construction of voxelized shadows // In Proc. ACM I3D. 2015. P. 25–30.
4. *Villanueva A.J.*, *Marton F.*, *Gobbetti E.* SSVDAGs: symmetry-aware sparse voxel DAGs // Proceedings of the 20th ACM SIGGRAPH Symposium on Interactive 3D Graphics and Games. 2016. P. 7–14.

This work was supported by the Program for State Support of Leading Scientific Schools of the Russian Federation (project no. NSh-9356.2016.1) and by the Competitiveness Enhancement Program of the Ural Federal University (Enactment of the Government of the Russian Federation of March 16, 2013 no. 211, agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013).

© N. A. Kuklin, A. A. Kuklina, 2016

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 145–150

О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических функций

М. Р. Лангаршоев

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан

Аннотация. В банаховых пространствах Харди и весовом пространстве Бергмана найдены точные значения бернштейновских, колмогоровских, гельфандовских и линейных n-поперечников классов аналитических в единичном круге функций, у которых усреднённые с весом модули непрерывности r-ых производных мажорируются заданной функцией, удовлетворяющей некоторым ограничениям. Построены наилучшие линейные методы приближения указанных классов аналитических в единичном круге функций, реализующих линейных n-поперечников.

1. Пусть X – произвольное банахово пространство; S – единичный шар в X; $\Lambda_n \subset X$ – произвольное подпространство размерности n; $\Lambda^n \subset X$ – линейное подпространство коразмерности n; $\mathscr{L}(f,\Lambda_n)$ – линейный непрерывный оператор, переводящий произвольный элемент $f \in X$ в элемент из Λ_n. Через $E(f,\Lambda_n)_X$ обозначим наилучшее приближение элемента $f \in X$ элементами $\varphi \in \Lambda_n$:

$$E(f,\Lambda_n)_X = \inf\Big\{\|f-\varphi\|_X : \ \varphi \in \Lambda_n\Big\},$$

а через

$$\mathscr{E}(f,\mathscr{L}(f,\Lambda_n))_X = \Big\|f-\mathscr{L}(f,\Lambda_n)\Big\|_X$$

обозначим уклонение элемента $f \in X$ от $\mathscr{L}(f,\Lambda_n)$ в метрике пространства X. Для центрально-симметричного множества $\mathfrak{M} \subset X$ полагаем

$$E(\mathfrak{M},\Lambda_n)_X \overset{def}{=} \sup\Big\{E(f,\Lambda_n)_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\},$$

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M},\mathscr{L},\Lambda_n)_X \overset{def}{=} \sup\Big\{\mathscr{E}(f,\mathscr{L}(f,\Lambda_n))_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Величины

$$b_n(\mathfrak{M};X) = \sup\{\sup\{\varepsilon>0 : \ (\varepsilon S \cap \Lambda_{n+1}) \subset \mathfrak{M}\} : \ \Lambda_{n+1} \subset X\}, \tag{1}$$

$$d^n(\mathfrak{M};X) = \inf\{\sup\{\|f\|_X : \ f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\} : \ \Lambda^n \subset X\}, \tag{2}$$

$$d_n(\mathfrak{M};X) = \inf\{E(\mathfrak{M},\Lambda_n)_X : \ \Lambda_n \in X\}, \tag{3}$$

$$\delta_n(\mathfrak{M};X) = \inf\{\inf\{\mathscr{E}(\mathfrak{M},\mathscr{L},\Lambda_n)_X : \ \mathscr{L} : X \to \Lambda_n\} : \ \Lambda_n \subset X\} \tag{4}$$

соответственно называют бернштейновский, гельфандовский, колмогоровский, линейный n-поперечниками. Между указанными величинами выполняются соотношения [1, 2]:

$$b_n(\mathfrak{M};X) \leqslant \begin{matrix} d_n(\mathfrak{M};X) \\ d^n(\mathfrak{M};X) \end{matrix} \leqslant \delta_n(\mathfrak{M};X). \tag{5}$$

© М. Р. Лангаршоев, 2016

Если существует подпространство $\Lambda_{n+1} \subset X$, для которого достигается внешний верхний грань в (1), то оно называется экстремальным для $b_n(\mathfrak{M}, X)$. Подпространство $\Lambda_*^n \subset X$ коразмерности n, такое, что

$$d^n(\mathfrak{M}; X) = \sup\{\|f\|_X : \ f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda_*^n\}$$

называют экстремальным для гельфандовского n-поперечника (2). Если существует подпространство $\Lambda_n^* \subset X$, на котором достигается нижняя грань в (3), то такого подпространство называют экстремальным подпространством для $d_n(\mathfrak{M}; X)$. При этом, очевидно, что

$$d_n(\mathfrak{M}; X) = E(\mathfrak{M}, \Lambda_n^*)_X.$$

Если существует линейный оператор $\mathscr{L}^* : X \to \Lambda_n^*$, для которого

$$\delta_n(\mathfrak{M}; X) = \mathscr{E}(\mathfrak{M}, \mathscr{L}^*, \Lambda_n^*)_X,$$

то его называют наилучшим линейным методом приближения множества $\mathfrak{M}$ в пространстве X, а Λ_n^* – экстремальным подпространством для линейного n-поперечника.

2. В пространствах Харди H_q, $q \geqslant 1$ и Бергмана $\mathscr{B}_{q,\gamma}$, $q \geqslant 1$ с весом $\gamma \geqslant 0$ вопросы вычисления точных значений различных n-поперечников некоторых классов аналитических в единичном круге функций и построения наилучших линейных методов приближения рассматривались, например, в монографиях [1, 2] и работах [3–12]. Здесь мы продолжим исследование в этом направление и вычислим точные значения всех перечисленных выше n-поперечников классов аналитических в единичном круге функций $W_a^{(r)}X(\Phi, \mu)$, $r \in \mathbb{N}$, $\mu \geqslant 1$ (X есть пространство H_q, либо весовое пространство Бергмана $\mathscr{B}_{q,\gamma}$), у которых усреднённые с весом модули непрерывности r-ых производных по аргумента мажорируются заданной функцией Φ, удовлетворяющей некоторым определённым естественным ограничениям.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{C}$ – соответственно множество натуральных, положительных и комплексных чисел; $U_\rho := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < \rho\}$ – круг радиуса ρ $(0 < \rho \leqslant 1)$, $U_1 = U$; $A(U_\rho)$ – множество аналитических в круге U_ρ функций.

Для произвольной $f \in A(U_\rho)$ положим

$$M_q(f; \rho) \overset{def}{=} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right)^{1/q}, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. При $q = \infty$ будем предполагать функцию $f(z)$ непрерывной в замкнутом круге $\overline{U}_\rho := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leqslant \rho\}$. Символом H_q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ обозначим банахово пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_q := \|f\|_{H_q} = \lim_{\rho \to 1-0} M_q(f; \rho). \tag{6}$$

Хорошо известно, что норма (6) реализуется на угловых граничных значениях $f(t) := = f(e^{it})$ функций $f \in H_q$. Символом $H_{q,\rho}$ $(1 \leqslant q \leqslant \infty, 0 < \rho \leqslant 1, \ H_{q,1} \equiv H_q)$ обозначим пространство Харди функций $f \in A(U_\rho)$, для которых $\|f(z)\|_{q,\rho} \overset{def}{=} \|f(\rho z)\|_q < \infty$. Для любого $r \in \mathbb{N}$ через $f_a^{(r)}(z)$ обозначим производную r-го порядка функции $f \in A(U)$ по аргументу комплексного переменного $z = \rho\, exp(it)$. При этом

$$f_a^{(1)}(z) := \frac{\partial f(z)}{\partial t} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = f'(z)zi \ \text{ и } \ f_a^{(r)}(z) = \left\{ f_a^{(r-1)}(z) \right\}_a^{(1)}, \ r \geqslant 2.$$

Под $H_{q,a}^{(r)}$ будем понимать класс функций $f \in A(U)$, у которых $f_a^{(r)} \in H_q$, $q \geqslant 1$.

Через $l_q \overset{def}{=} l_q(U)$, $1 \leqslant q < \infty$ обозначим банахово пространство комплекснозначных в круге U функций f, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{l_q} = \left(\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(U)} |f(z)|^q dxdy\right)^{1/q} = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} \rho|f(\rho e^{it})|^q d\rho dt\right)^{1/q},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Пусть $\gamma(|z|) \geqslant 0$ – некоторая измеримая не эквивалентная нулю функция, суммируемая на множестве U. Через $l_{q,\gamma} \overset{def}{=} l_q(U,\gamma)$, $1 \leqslant q < \infty$, обозначим множество комплекснозначных функций f, для которых $\gamma^{1/q}f \in l_q(U)$, $\|f\|_{l_{q,\gamma}} = \|\gamma^{1/q}f\|_{l_q}$. Под $\mathscr{B}_{q,\gamma} \overset{def}{=} \mathscr{B}_q(U,\gamma)$, $1 \leqslant q < \infty$, понимаем банахово пространство $f \in A(U)$ таких, что $f \in l_{q,\gamma}$. При этом

$$\|f\|_{\mathscr{B}_{q,\gamma}} = \left(\int\limits_0^1 \rho\gamma(\rho)M_q^q(f,\rho)d\rho\right)^{1/q}.$$

В частном случае, когда $\gamma \equiv 1$, пространство $\mathscr{B}_q := \mathscr{B}_{q,1}$ является обычным пространством Бергмана. Символом $\mathscr{B}_{q,\gamma,\rho}$ $(1 \leqslant q \leqslant \infty,\ 0 < \rho \leqslant 1,\ \mathscr{B}_{q,\gamma,1} \equiv \mathscr{B}_{q,\gamma})$ обозначим пространство функций $f \in A(U_\rho)$, для которых $\|f(z)\|_{\mathscr{B}_{q,\gamma,\rho}} \overset{def}{=} \|f(\rho z)\|_{\mathscr{B}_{q,\gamma}} < \infty$, а под $\mathscr{B}^{(r)}_{q,\gamma,a}$ будем понимать класс функций $f \in A(U)$, у которых $f_a^{(r)} \in \mathscr{B}_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. В [8] доказано, что по сравнению с $\mathscr{B}_q$, пространство $\mathscr{B}_{q,\gamma}$ позволяет изучать функции $f \in A(U)$ с менее жесткими ограничениями на их поведение вблизи границы окружности $\Gamma := \{\zeta \in \mathbb{C} :\ |\zeta| = 1\}$. Очевидно, что $H_q \subset \mathscr{B}_q \subset \mathscr{B}_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q < \infty$. Под $X := X(U)$ будем понимать любое из вышеприведённых банаховых пространств H_q, $\mathscr{B}_{q,\gamma}$, а $X_\rho := X_\rho(U)$ означает $H_{q,\rho}$ или $\mathscr{B}_{q,\gamma,\rho}$. Аналогичным образом под $X_a^{(r)} := X_a^{(r)}(U)$ будем понимать $H^{(r)}_{q,a}$, либо $\mathscr{B}^{(r)}_{q,\gamma,a}$, а $X^{(r)}_{\rho,a}$ есть $H^{(r)}_{q,\rho,a}$, либо $\mathscr{B}^{(r)}_{q,\gamma,\rho,a}$.

Для произвольной функции $f \in X(U)$ запишем модуль непрерывности

$$\omega(f;2t)_X = \sup\Big\{\|f(ze^{ih}) - f(ze^{-ih})\|_X :\ |h| \leqslant t\Big\}.$$

Обозначим через $\mathscr{P}_n$ множество комплексных алгебраических полиномов $p_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ $(n \in \mathbb{N},\ a_k \in \mathbb{C})$ степени n, а равенством

$$E_n(f)_X = E(f,\mathscr{P}_n)_X \overset{def}{=} \inf\Big\{\|f - p_n\|_X :\ p_n \in \mathscr{P}_n\Big\}$$

определим наилучшее приближение функции $f \in X(U)$ элементами $\mathscr{P}_n$.

Пусть $\Phi(u)$ – положительная неубывающая функция, определённая для $u \geqslant 0$ и удовлетворяющая условию $\lim\Big\{\Phi(u) :\ u \to 0\Big\} = \Phi(0) = 0$. Используя функцию Φ в качестве мажоранты, для произвольных $\mu \geqslant 1$ и любых $r \in \mathbb{N}$ введём в рассмотрение класс функций

$$W_a^{(r)}X(\Phi,\mu) =$$

$$= \left\{ f \in X_a^{(r)} :\ \frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega(f_a^{(r)};2t)_X \left[1 + (\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right] dt \leqslant \Phi(h),\ h \in (0,\pi] \right\}.$$

В работах [11, 12], соответственно, при $X = H_q$ и $X = \mathscr{B}_{q,\gamma}$ доказано, что если при заданном $\mu \geqslant 1$ и любых $h \in (0,\pi]$, $n \in \mathbb{N}$ мажоранта Φ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/(2\mu n))} \geqslant \frac{\pi}{2\mu}\int\limits_0^1 (\sin nht)_* \left[1 + (\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2}\right] dt, \tag{7}$$

где
$$(\sin x)_*^m := \Big\{ (\sin x)^m\,,\ \text{если}\ \ 0\leqslant x\leqslant \pi/2; \quad 1,\ \text{если}\ \ t\geqslant \pi/2\Big\},$$
то при любых $n,r\in\mathbb{N}$ справедливы равенства
$$b_n\left(W_a^{(r)}X(\Phi;\mu);X(U)\right)=d_n\left(W_a^{(r)}X(\Phi;\mu);X(U)\right)=$$
$$=E_{n-1}\left(W_a^{(r)}X(\Phi;\mu)\right)_{X(U)}=\frac{\pi}{4\mu n^r}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \tag{8}$$

При этом условия (7) выполняется, например, для мажоранта $\Phi_*(h)=h^\alpha$, где
$$\alpha:=\alpha(\mu)=\left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^2\int\limits_0^1 t\cos\left(\frac{\pi t}{2\mu}\right)\left[1+(\mu^2-1)\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right]dt. \tag{9}$$

Из равенства (9) вытекает, что $\alpha(1)=(\pi/2)-1$, $\lim\{\alpha(\mu):\ \mu\to\infty\}=1$ и при всех значений $\mu\in[1,\infty)$ имеет место неравенство $(\pi/2)-1\leqslant\alpha(\mu)\leqslant 1$. Распространим результат полученный в (8) на более общее пространство X_ρ.

Теорема 1. *Пусть при заданном $\mu\geqslant 1$ и любых $n\in\mathbb{N}$ мажоранта Φ удовлетворяет ограничению* (7). *Тогда для произвольных $n,r\in\mathbb{N}$ и любых $\rho\in(0,1]$ имеют место равенства*
$$b_n\left(W_a^{(r)}X(\Phi;\mu);X_\rho(U)\right)=d_n\left(W_a^{(r)}X(\Phi;\mu);X_\rho(U)\right)=$$
$$=E_{n-1}\left(W_a^{(r)}X(\Phi;\mu)\right)_{X_\rho(U)}=\frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \tag{10}$$

Докажем, что результат приведённой в теореме 1 справедлив также для гельфандовского и линейного n-поперечников. Каждой функции
$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)z^k\in X(U),$$
где c_k – коэффициенты Тейлора функции f, сопоставим линейный полиномиальный оператор $(n-1)$-й степени
$$\mathscr{L}_{\rho,r-1}(f,\mathscr{P}_n;z)=c_0+\sum_{k=1}^{n-1}\mu_{k,\rho,r-1}c_k(f)z^k, \tag{11}$$
где
$$\mu_{k,\rho,r-1}\overset{def}{=}1-\rho^{2(n-k)}\left(\frac{k}{2n-k}\right)^{r-1}\left\{1-\gamma_{k,n}\left(1-\frac{k^2}{(2n-k)^2}\right)\right\},\quad k=\overline{1,n-1},$$
$$\gamma_{k,n}\overset{def}{=}n\mu\int\limits_0^{\pi/(2n)}\cos kx\cos nx\,dx,\quad k=\overline{1,n-1}.$$

Теорема 2. *Если мажоранта Φ при любых $\mu\geqslant 1,\ n\in\mathbb{N}$ и $h\in(0,\pi]$ удовлетворяет ограничению* (7), *то для любых $n,r\in\mathbb{N}$ и $\rho\in(0,1]$ справедливы равенства*
$$\lambda_n\left(W_a^{(r)}X(\Phi;\mu);X_\rho(U)\right)=E_{n-1}\left(W_a^{(r)}X(\Phi;\mu)\right)_{X_\rho(U)}=$$
$$=\mathscr{E}\left(W_a^{(r)}X(\Phi;\mu),\mathscr{L}_{\rho,r-1},\mathscr{P}_{n-1}\right)_{X_\rho(U)}=\frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right), \tag{12}$$
где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из n-поперечников $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$.

Доказательство. В [6] (случай $X_\rho=H_{q,\rho}$) и [11] (случай $X_\rho=\mathscr{B}_{q,\gamma,\rho}$) для произвольной функции $f\in X_{\rho,a}^{(r)}(U)$ доказано неравенство
$$\left\|f-\mathscr{L}_{\rho,r-1}(f,\mathscr{P}_{n-1})\right\|_{X_\rho(U)}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{\rho^n}{2n^{r-1}} \int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} \omega(f_a^{(r)}; 2t)_{X(U)}\, [1 + (\mu^2 - 1)\sin(\mu n t)]\, dt, \tag{13}$$

обращающееся в равенство для функции $f(z) = az^n$, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что для произвольной функции $f \in W_a^{(r)} X(\Phi;\mu)$ из правой части неравенства (13), учитывая определение класса $W_a^{(r)} X(\Phi;\mu)$, имеем

$$\frac{\rho^n}{2n^{r-1}} \int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} \omega(f_a^{(r)}; 2t)_{X(U)}\, [1 + (\mu^2 - 1)\sin(\mu n t)]\, dt =$$

$$= \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r} \left(\frac{2\mu n}{\pi} \int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} \omega(f_a^{(r)}; 2t)_{X(U)}\, [1 + (\mu^2 - 1)\sin(\mu n t)]\, dt \right) \leqslant \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\, \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \tag{14}$$

Теперь из неравенства (13) с учётом (14) получаем

$$\left\| f - \mathscr{L}_{\rho,r-1}(f, \mathscr{P}_{n-1}) \right\|_{X_\rho(U)} \leqslant \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\, \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \tag{15}$$

Покажем, что существует функция $f_0 \in W_a^{(r)} X(\Phi;\mu)$, удовлетворяющая условию (7) для которой неравенство (15) обращается в равенство. Легко проверить, что этим свойством обладает функция

$$f_0(z) = \frac{\pi\rho^n}{4\mu(in)^r}\, \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right) \frac{z^n}{\|z^n\|_{X_\rho}},$$

для которой $\mathscr{L}_{\rho,r-1}(f_0, \mathscr{P}_{n-1}; z) \equiv 0$ и, следовательно,

$$\left\| f_0 - \mathscr{L}_{\rho,r-1}(f_0, \mathscr{P}_{n-1}; z) \right\|_{X_\rho(U)} = \|f_0\|_{X_\rho(U)} = \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\, \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right).$$

Таким образом, имеем

$$\mathscr{E}\left(W_a^{(r)} X(\Phi;\mu), \mathscr{L}_{\rho,r-1}, \mathscr{P}_{n-1}\right)_{X_\rho(U)} =$$

$$= \sup\left\{ \left\| f - \mathscr{L}_{\rho,r-1}(f, \mathscr{P}_{n-1}; \cdot) \right\|_{X_\rho(U)} :\ f \in W_a^{(r)} X(\Phi;\mu) \right\} =$$

$$= \left\| f_0 - \mathscr{L}_{\rho,r-1}(f_0, \mathscr{P}_{n-1}) \right\|_{X_\rho(U)} = \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\, \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \tag{16}$$

Равенства (16) означают, что линейный полиномиальный оператор, определённый равенством (11), является наилучшим линейным методом приближения класса $W_a^{(r)} X(\Phi;\mu)$ в метрике пространства $X_\rho(U)$ и реализует знак равенства в неравенстве (15). Из (16) сразу следует оценка сверху для линейного n-поперечника

$$\delta_n\left(W_a^{(r)} X(\Phi;\mu); X_\rho(U)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathscr{E}\left(W_a^{(r)} X(\Phi;\mu), \mathscr{L}_{\rho,r-1}, \mathscr{P}_{n-1}\right)_{X_\rho(U)} = \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\, \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \tag{17}$$

Аналогичную оценку сверху получим для гельфандовского n-поперечника. В самом деле, для произвольной функции $f \in W_a^{(r)} X(\Phi;\mu) \cap L_*^n$, с учётом неравенства (15) и соотношения

$$c_k(f) = f^{(k)}(0)/k! = 0, \quad k = \overline{0, n-1},$$

запишем неравенство

$$\|f\|_{X_\rho(U)} \leqslant \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\, \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \tag{18}$$

Из (18) и определения гельфандовского n-поперечника получаем

$$d^n\left(W_a^{(r)} X(\Phi;\mu), X_\rho(U)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup\left\{\|f\|_{X_\rho(U)}:\ f\in W_a^{(r)}X(\Phi;\mu)\right\}\leqslant \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \tag{19}$$

Сравнивая оценки сверху (17) и (19) с утверждением теоремы 1 и учитывая неравенство (5) получаем требуемые равенства (12), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Следуя [6], символом $\widetilde{\mathscr{P}}_{n-1}$ обозначим n-мерное подпространство, порождённое базисом

$$\widetilde{\varphi}_k(z)=\left\{1-\left(\frac{k}{2n-1}\right)^{r-1}\left[1-\gamma_{k,n}\left(1-\left(\frac{k}{2n-1}\right)^2\right)\right]|z|^{2(n-k)}\right\}z^k,$$
$$k=0,1,\ldots,n-1;\ r\in\mathbb{N}.$$

Для произвольной функции $f\in X(U)$ полагаем

$$\widetilde{\mathscr{L}}_{r-1}(f,\widetilde{\mathscr{P}}_{n-1};z)=\sum_{k=0}^{n-1}c_k(f)\widetilde{\varphi}_k(z).$$

В принятых обозначениях справедлива следующая

Теорема 3. *Для любых $\mu\geqslant 1$, $r,n\in\mathbb{N}$ выполняются равенства*

$$\lambda_n\left(W_a^{(r)}X(\Phi;\mu);l_{q,\gamma}\right)=\overline{\lambda}_n\left(W_a^{(r)}X(\Phi;\mu);\mathscr{B}_{q,\gamma}\right)=\mathscr{E}\left(W_a^{(r)}X(\Phi;\mu),\widetilde{\mathscr{L}}_{r-1},\widetilde{\mathscr{P}}_{n-1}\right)_{\mathscr{B}_{q,\gamma}}=$$

$$=\frac{\pi}{4\mu n^r}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right)\left(\int_0^1\rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q},\quad 1\leqslant q\leqslant\infty, \tag{20}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, а $\overline{\lambda}_n(\cdot)$ – один из n-поперечников $d^n(\cdot)$, либо $b_n(\cdot)$.

Список литературы

1. *Тихомиров В.М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи матем. наук. 1960. Т. 15, № 3. С. 81-120.
2. *Pinkus A.* n-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag, New York, Tokyo. 1985. 252 p.
3. *Тайков Л.В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 285-294.
4. *Айнуллоев Н.*, *Тайков Л.В.* Наилучшее приближение в смысле Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Матем. заметки. 1986. Т. 40, № 3. С. 341-351.
5. *Вакарчук С.Б.* Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки. 1995. Т. 57, № 1. С. 30-39.
6. *Вакарчук С.Б.* О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости // Укр. матем. журнал. 2004. Т. 56, № 9. С. 1155-1171.
7. *Вакарчук С.Б.*, *Забутная В.И.* О наилучших линейных методах приближения функций классов Л.В.Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q\geqslant 1$, $0<\rho\leqslant 1$ // Матем. заметки. 2009. Т. 85, № 3. С. 323-329.
8. *Вакарчук С.Б.*, *Шабозов М.Ш.* О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Матем. сборник. 2010. Т. 201, № 8. С. 3-22.
9. *Шабозов М.Ш.*, *Шабозов О.Ш.* О наилучшем приближение некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $B_{2,\gamma}$ // ДАН России. 2007. Т. 412, № 4. С. 466-469.
10. *Шабозов М.Ш.*, *Лангаршоев М.Р.* О наилучших линейных методах и значениях поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // ДАН России. 2013. Т. 450, № 5. С. 518-521.
11. *Шабозов М.Ш.*, *Саидусайнов М.С.* Значения n-поперечников и наилучшие линейные методы приближения некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 5. С. 40-57.
12. *Шабозов М.Ш.*, *Юсупов Г.А.* Наилучшие линейные методы приближения и поперечники некоторых классов функций в пространстве Харди // ДАН Республики Таджикистан. 2014. Т. 57, № 2. С. 97-102.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 151–160

О восстановлении сигналов по спектру

Г. Г. Магарил-Ильяев[1], К. Ю. Осипенко[2]

[1]*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия*
[2]*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*

Аннотация. В докладе приводятся различные примеры оптимального восстановления функций (сигналов) по их неточно и/или неполно заданному спектру. В основе предлагаемого подхода к задачам восстановления лежат идеи А. Н. Колмогорова о наилучшем приближении классов функции подпространствами фиксированной размерности. Такой подход является определенной альтернативой широко распространенному регуляризационному подходу, предложенному А. Н. Тихоновым.

Восстановление сигнала по его спектру (т. е. по его преобразованию Фурье или, как говорят, по его частотам), который задан неполно и/или неточно, — одна из основных проблем во многих прикладных задачах. Существуют различные способы восстановления, но наиболее распространенный из них — это регуляризация по А. Н. Тихонову. Она заключается в предъявлении некоторого алгоритма восстановления и доказательству его сходимости к исходному сигналу (скажем, в данной точке) при стремлении к нулю погрешности измерения. При этом остаются без внимания, по крайней мере, следующие вопросы: возможен ли лучший способ восстановления? Можно ли доказать эффективность предъявленного алгоритма, не устремляя погрешность к нулю, ведь она обусловлена неточностями измерения и не может быть сделана сколь угодно малой?

В данной работе мы хотим продемонстрировать, на ряде совсем простых примеров, подход к задаче восстановления сигнала по спектру, основанный на идеях А. Н. Колмогорова. Этот подход представляет определенную альтернативу регуляризационному подходу в том смысле, что он позволяет строить наилучшие среди всех возможных методы восстановления сигнала, и с учетом той погрешности, которая есть на самом деле. При этом важно отметить, что оптимальные методы выписываются явно и используют далеко не всю имеющуюся информацию о спектре (даже если она измерена точно), и если эта информация известна с погрешностью, то указывается порог (зависящий от погрешности измерения), за пределами которого информация о спектре вообще не нужна — оптимальный метод ее не использует. Полезная же информация, т. е. та, которая используется, подвергается определенному "сглаживанию". Следует сказать, что это вполне соответствует тому, что происходит на практике — высокие частоты отбрасываются, а низкие сглаживаются.

Краткий комментарий по поводу сформулированных здесь утверждений приведен в конце работы.

Мы начинаем с примера из учебника В. А. Ильина и Э. Г. Позняка [1], демонстрирующего возможности регуляризации по Тихонову.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 14-01-00456, 14-01-00744)

© Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, 2016

Пусть 2π-периодическая функция $x(\cdot)$ такова, что ее ряд Фурье

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

где

$$a_k = a_k(x(\cdot)) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos kt\,dt, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_k = b_k(x(\cdot)) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin kt\,dt, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

сходится к $x(\cdot)$ равномерно.

Вместо точных коэффициентов Фурье функции известны их приближенные значения $\widetilde{a}_k$, $\widetilde{b}_k$ такие, что

$$\frac{(a_0 - \widetilde{a}_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}((a_k - \widetilde{a}_k)^2 + (b_k - \widetilde{b}_k)^2) \leqslant \delta^2. \tag{1}$$

По этой информации требуется восстановить значение функции $x(\cdot)$ в некоторой точке τ.

Нетрудно показать, что как бы быстро не сходился исходный ряд к $x(\tau)$ и как бы не было мало $\delta > 0$, можно указать такие числа $\widetilde{a}_k$, $\widetilde{b}_k$, удовлетворяющие (1), что сумма ряда

$$\frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\widetilde{a}_k \cos kt + \widetilde{b}_k \sin kt)$$

будет отличаться от $x(\tau)$ на любое наперед заданное число или даже ряд будет расходиться.

Предлагается следующая процедура восстановления. В качестве приближенного значения функции в точке τ рассматривается ряд

$$\frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1 + k^2\alpha}(\widetilde{a}_k \cos k\tau + \widetilde{b}_k \sin k\tau),$$

где α того же порядка малости, что и δ (например, можно положить $\alpha = \delta$).

Доказывается, что если функция $x(\cdot)$ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{T})$ ($\mathbb{T}$ — отрезок $[-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами) с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

и $x(\cdot)$ непрерывна в τ, то данный ряд сходится к $x(\tau)$ при $\delta \to 0$.

При этом авторы в заключительном замечании пишут (выделено жирным шрифтом нами):

… должны ли мы, желая получить как можно более точное представление об интересующем нас физическом процессе, неограниченно совершенствовать точность прибора или путь к этому лежит через развитие таких математических методов обработки результатов измерений, которые позволяют при **имеющейся точности** *измерения частотных характеристик извлечь* **максимальную** *информацию об изучаемом процессе.*

Подход, который предлагается здесь к исследованию подобного рода задач, предполагает наличие некоторой априорной информации о функции $x(\cdot)$. Но тогда появляется возможность учитывать имеющуюся точность измерения и ставить вопрос о нахождении наилучшего метода среди всех возможных.

Априорная информация о функции будет состоять в том, что эта функция принадлежит некоторому классу. Обозначим через $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$ пространство 2π-периодических абсолютно непрерывных функций $x(\cdot)$, у которых первая производная $\dot{x}(\cdot)$ принадлежит $L_2(\mathbb{T})$. В данной работе будем рассматривать следующий класс функций

$$W_2^1(\mathbb{T}) = \{\, x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T}) : \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant 1 \,\}.$$

Если $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$, то для каждого $t \in \mathbb{T}$ справедливо равенство

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Приведем теперь несколько примеров нахождения оптимальных методов восстановления функций из класса $W_2^1(\mathbb{T})$.

1. Восстановление функции в точке, когда все коэффициенты Фурье известны приближенно в метрике l_2. Здесь мы рассматриваем пример, приведенный выше, но с позиций оптимального восстановления.

Обозначим через l_2 пространство суммируемых с квадратом вещественных последовательностей со скалярным произведением

$$\langle y, y' \rangle = \frac{y_0 y_0'}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} y_k y_k',$$

где $y = (y_0, y_1, \ldots)$, $y' = (y_0', y_1', \ldots)$ и с соответствующей нормой

$$\|y\|_{l_2} = \left(\frac{y_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 \right)^{1/2}.$$

Если функция $x(\cdot)$ принадлежит $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$, то ее коэффициенты Фурье принадлежат l_2. Пусть $F\colon \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T}) \to l_2$ — преобразование Фурье $x(\cdot)$, т. е. $Fx(\cdot) = (a_0(x(\cdot)), a_1(x(\cdot)), b_1(x(\times$ $\times)), \ldots)$ — набор коэффициентов Фурье функции $x(\cdot)$.

Предположим, что о каждой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$ нам известны приближенно ее коэффициенты Фурье, а именно, известен вектор

$$y = (\widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1, \widetilde{b}_1 \ldots) \in l_2$$

такой, что

$$\|Fx(\cdot) - y\|_{l_2} \leqslant \delta,$$

где $\delta > 0$.

Любой метод восстановления $x(\tau)$ должен сопоставлять вектору (наблюдению) y число, которое, согласно данному методу, есть некоторое приближение к $x(\tau)$. Таким образом, любой метод — это некоторая функция $\varphi\colon l_2 \to \mathbb{R}$. *Погрешностью* данного метода назовем величину

$$e(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^1(\mathbb{T}),\ y\in l_2 \\ \|Fx(\cdot)-y\|_{l_2}\leqslant\delta}} |x(\tau) - \varphi(y)|.$$

Нас интересует величина

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta) = \inf_{\varphi\colon l_2\to\mathbb{R}} e(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta, \varphi),$$

называемая *погрешностью оптимального восстановления* и метод $\widehat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань, называемый *оптимальным методом восстановления*, т. е. такой метод $\widehat{\varphi}$, что

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta) = e(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta, \widehat{\varphi}).$$

Теорема 1 ([2]). *Для любого* $\delta > 0$

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta) = (\widehat{a} + \delta^2)\biggl(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+\widehat{a}k^2)^2}\biggr)^{1/2},$$

где $\widehat{a} = \widehat{a}(\delta)$ *— единственное решение уравнения*

$$\frac{\frac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+ak^2)^2}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+ak^2)^2}} = \delta^2.$$

Метод $\widehat{\varphi}$, *действующий по правилу*

$$\widehat{\varphi}(y) = \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+\widehat{a}k^2}(\widetilde{a}_k \cos k\tau + \widetilde{b}_k \sin k\tau),$$

является оптимальным.

Как видно из формулировки теоремы, для любого $\delta > 0$ метод регуляризации, предложенный в [1], является оптимальным на классе $W_2^1(\mathbb{T})$ при $\alpha = \widehat{a}(\delta)$. Кроме того, минимальная ошибка оценивания $x(\tau)$ дается величиной $E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta)$, которая стремится к нулю при $\delta \to 0$.

2. Восстановление функции в точке по неточно заданному конечному набору ее коэффициентов Фурье. Здесь также моделируется ситуация, рассмотренная выше, но в более естественной, на наш взгляд, постановке: мы располагаем лишь конечным набором коэффициентов Фурье, известных по модулю с точностью до некоторого δ.

Итак, рассматривается задача восстановления функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$ в точке $\tau \in \mathbb{T}$ по следующей информации: известны числа $\widetilde{a}_k, \widetilde{b}_k$, для которых

$$|a_k - \widetilde{a}_k| \leqslant \delta, \quad k \in A, \quad |b_k - \widetilde{b}_k| \leqslant \delta, \quad k \in B,$$

где A и B — некоторые конечные множества из $\mathbb{N}$. Положим $N = \mathrm{card}A + \mathrm{card}B$ и

$$F_{A,B}x(\cdot) = (\{a_k\}_{k\in A}, \{b_k\}_{k\in B}).$$

Через l_∞^N обозначим пространство векторов $y = (y_1, \dots, y_N)$ с нормой

$$\|y\|_{l_\infty^N} = \max_{1\leqslant k\leqslant N} |y_k|.$$

Таким образом, можно сказать, что информация о функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$ состоит в том, что вместо набора ее коэффициентов Фурье $F_{A,B}x(\cdot)$ нам известны их приближенные значения

$$y = (\{\widetilde{a}_k\}_{k\in A}, \{\widetilde{b}_k\}_{k\in B})$$

такие, что

$$\|F_{A,B}x(\cdot) - y\|_{l_\infty^N} \leqslant \delta.$$

Как и выше, для каждого метода $\varphi\colon l_\infty^N \to \mathbb{R}$ его погрешность определяется так

$$e(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^1(\mathbb{T}),\ y\in l_\infty^N \\ \|F_{A,B}x(\cdot)-y\|_{l_\infty^N}\leqslant\delta}} |x(\tau) - \varphi(y)|.$$

Погрешность оптимального восстановления определяется формулой

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \inf_{\varphi\colon l_\infty^N\to\mathbb{R}} e(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi).$$

Метод $\widehat{\varphi}$ называется оптимальным, если выполняется соотношение

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = e(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \widehat{\varphi}).$$

Нетрудно убедиться, что если $0 \notin A$, то погрешность оптимального восстановления равна бесконечности (достаточно рассмотреть лишь константы из класса $W_2^1(\mathbb{T})$). Поэтому в дальнейшем будем считать, что $0 \in A$.

Положим $\widetilde{A} = A \setminus \{0\}$ и рассмотрим вектор

$$\left(\left\{\frac{\cos k\tau}{k^2}\right\}_{k\in\widetilde{A}},\ \left\{\frac{\sin k\tau}{k^2}\right\}_{k\in B}\right).$$

Пусть

$$|\gamma_2| \geqslant \ldots \geqslant |\gamma_N| \tag{2}$$

— модули компонентов этого вектора, упорядоченные по убыванию. Если $\gamma_s = k_s^{-2}\cos k_s\tau$, то соответствующий индекс будем обозначать через $k_s(A)$, а если $\gamma_s = k_s^{-2}\sin k_s\tau$, то — через $k_s(B)$. Для каждого $2 \leqslant s \leqslant N$ обозначим через A_s и B_s подмножества индексов $k_2(C), \ldots, k_s(C)$ при $C = A$ и $C = B$, соответственно. Для удобства обозначений будем считать, что $A_1 = B_1 = \varnothing$ (сумма по пустому множеству индексов будет считаться равной нулю).

Положим

$$p = p(\delta) = \max\Bigg\{ s : \gamma_{k_s}^2\Bigg(1 - \delta^2\sum_{k\in A_s\cup B_s} k^2\Bigg) > \delta^2\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus A_s}\frac{\cos^2 k\tau}{k^2} + \delta^2\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus B_s}\frac{\sin^2 k\tau}{k^2},\ 2 \leqslant s \leqslant N\Bigg\}$$

(считая $p = 1$, если множество в скобках пусто),

$$\lambda = \left(\frac{\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus A_p}\frac{\cos^2 k\tau}{k^2} + \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus B_p}\frac{\sin^2 k\tau}{k^2}}{\displaystyle 1 - \delta^2\sum_{k\in A_p\cup B_p} k^2}\right)^{1/2}$$

и

$$\lambda_s = k_s^2(C)(|\gamma_s| - \lambda\delta), \quad \widetilde{c}_s = \begin{cases} \mathrm{sign}\gamma_s\,\widetilde{a}_{k_s(C)}, & C = A,\\ \mathrm{sign}\gamma_s\,\widetilde{b}_{k_s(C)}, & C = B.\end{cases}$$

Теорема 2. *Для любого* $\delta > 0$

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \frac{\delta}{2} + \delta\sum_{s=2}^{p}\lambda_s + \lambda$$

и оптимальный метод имеет вид

$$\widehat{\varphi}(y) = \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{s=2}^{p}\lambda_s\widetilde{c}_s. \tag{3}$$

Отметим, что, во-первых, оптимальный метод использует, вообще говоря, не всю имеющуюся информацию (суммирование идет до p, которое может быть достаточно малым, если δ достаточно большое), во-вторых, используемая информация “сглаживается” коэффициентами λ_s и наконец, коэффициенты Фурье, которые выбирает оптимальный метод, идут, вообще говоря, не подряд. Это свойство характерно для так называемых “жадных” алгоритмов.

Доказательство. Определим последовательности $\widehat{a}_k$ и $\widehat{b}_k$ по правилу

$$\widehat{a}_k = \begin{cases}\delta\mathrm{sign}\cos k\tau, & k \in A_p\cup 0\,;\\ \frac{\cos k\tau}{\lambda k^2}, & k\notin A_p\cup 0\,.\end{cases}\qquad \widehat{b}_k = \begin{cases}\delta\mathrm{sign}\sin k\tau, & k \in B_p\,;\\ \frac{\sin k\tau}{\lambda k^2}, & k\notin B_p\,.\end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2(\widehat{a}_k^2+\widehat{b}_k^2)=1. \tag{4}$$

Покажем, что $|\widehat{a}_k|\leqslant\delta$ для всех $k\in A$ и $|\widehat{b}_k|\leqslant\delta$ для всех $k\in B$. При $p=N$ это очевидно. Пусть $p<N$. Если при некотором $k>0$ и $k\in A\setminus A_p$ выполнялось бы неравенство $|\widehat{a}_k|>\delta$ или при некотором $k\in B\setminus B_p$ выполнялось бы неравенство $|\widehat{b}_k|>\delta$, то нашелся бы элемент γ_s, $2\leqslant s\leqslant N$, для которого имело бы место неравенство

$$\gamma_s^2>\delta^2\lambda^2.$$

В силу (2) отсюда вытекало бы неравенство

$$\gamma_{p+1}^2>\delta^2\lambda^2. \tag{5}$$

Предположим, что

$$\gamma_{p+1}^2=\frac{\cos^2 k_{p+1}(A)\tau}{k_{p+1}^4(A)}\,.$$

Тогда неравенство (5) можно записать так

$$\frac{\cos^2 k_{p+1}(A)\tau}{k_{p+1}^4(A)}\biggl(1-\delta^2\sum_{k\in A_p\cup B_p}k^2\biggr)>\delta^2\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus A_p}\frac{\cos^2 k\tau}{k^2}+\delta^2\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus B_p}\frac{\sin^2 k\tau}{k^2}.$$

Поскольку $A_{p+1}=A_p\cup\{k_{p+1}\}$, а $B_{p+1}=B_p$, то последнее неравенство записывается в виде

$$\frac{\cos^2 k_{p+1}(A)\tau}{k_{p+1}^4(A)}\biggl(1-\delta^2\sum_{k\in A_{p+1}\cup B_{p+1}}k^2\biggr)>\delta^2\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus A_{p+1}}\frac{\cos^2 k\tau}{k^2}+\delta^2\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus B_{p+1}}\frac{\sin^2 k\tau}{k^2}.$$

Но такое неравенство противоречит определению p. Случай, когда

$$\gamma_{p+1}^2=\frac{\sin^2 k_{p+1}(B)\tau}{k_{p+1}^4(B)}\,,$$

рассматривается аналогично.

Докажем, что для любых последовательностей $\{a_k\}$, $k=0,1,\ldots$, и $\{b_k\}$, $k=1,2,\ldots$, таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2(a_k^2+b_k^2)<\infty,$$

имеет место тождество

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\tau+b_k\sin k\tau)=\sum_{s=2}^{p}\lambda_s c_s+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}k^2(\widehat{a}_k a_k+\widehat{b}_k b_k), \tag{6}$$

где

$$c_s=\begin{cases}\operatorname{sign}\gamma_s\, a_{k_s(C)}, & C=A,\\ \operatorname{sign}\gamma_s\, b_{k_s(C)}, & C=B.\end{cases}$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned}\sum_{s=2}^{p}\lambda_s c_s+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}k^2(\widehat{a}_k a_k+\widehat{b}_k b_k)&=\sum_{s=2}^{p}k_s^2|\gamma_{k_s}|c_s-\lambda\delta\sum_{s=2}^{p}k_s^2c_s\\&+\lambda\delta\sum_{s=2}^{p}k_s^2c_s+\lambda\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus A_p}k^2\frac{\cos k\tau}{\lambda k^2}a_k+\lambda\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus B_p}k^2\frac{\sin k\tau}{\lambda k^2}b_k\\&=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\tau+b_k\sin k\tau).\end{aligned}$$

Заметим, что $\lambda_p > 0$ в силу определения p, а $\lambda_s > 0$ в силу (2) для всех $s = 2, \dots, p-1$.

Найдем теперь величину погрешности оптимального восстановления и покажем, что метод (3) является оптимальным. Оценим его погрешность. Пусть функция $x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T})$. Используя (6) и неравенство Коши–Буняковского, получим

$$|x(\tau) - \widehat{\varphi}(y)| = \left|\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau) - \frac{\widetilde{a}_0}{2} - \sum_{s=2}^{p} \lambda_s \widetilde{c}_s\right|$$
$$= \left|\frac{a_0 - \widetilde{a}_0}{2} + \sum_{s=2}^{p} \lambda_s (c_s - \widetilde{c}_s) + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau) - \sum_{s=2}^{p} \lambda_s c_s\right|$$
$$\leqslant \frac{\delta}{2} + \delta \sum_{s=2}^{p} \lambda_s + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k^2(\widehat{a}_k^2 + \widehat{b}_k^2) \sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{\delta}{2} + \delta \sum_{s=2}^{p} \lambda_s + \lambda.$$

Тем самым

$$e(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \widehat{\varphi}) \leqslant \frac{\delta}{2} + \delta \sum_{s=2}^{p} \lambda_s + \lambda.$$

Отсюда вытекает оценка сверху для оптимальной погрешности восстановления

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \leqslant \frac{\delta}{2} + \delta \sum_{s=2}^{p} \lambda_s + \lambda. \tag{7}$$

Получим теперь оценку снизу. Рассмотрим функцию

$$\widehat{x}(t) = \frac{\widehat{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\widehat{a}_k \cos kt + \widehat{b}_k \sin kt).$$

Из (4) вытекает, что $\widehat{x}(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$. Кроме того, было показано, что $\|F_{A,B}\widehat{x}(\cdot)\|_{l_\infty^N} \leqslant \delta$.

Для произвольного метода восстановления φ имеем

$$2|\widehat{x}(\tau)| = |\widehat{x}(\tau) - \varphi(0) - (-\widehat{x}(\tau) - \varphi(0))| \leqslant |\widehat{x}(\tau) - \varphi(0)| + |-\widehat{x}(\tau) - \varphi(0)|$$
$$\leqslant 2e(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi).$$

Вследствие произвольности φ получаем

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \geqslant |\widehat{x}(\tau)| = \left|\frac{\widehat{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\widehat{a}_k \cos k\tau + \widehat{b}_k \sin k\tau)\right|.$$

Учитывая тождество (6), имеем

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \geqslant \frac{\delta}{2} + \delta \sum_{s=2}^{p} \lambda_s + \lambda.$$

Отсюда и (7) следует, что

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \frac{\delta}{2} + \delta \sum_{s=2}^{p} \lambda_s + \lambda,$$

а метод $\widehat{\varphi}$ является оптимальным. □

3. Восстановление по точным значениям коэффициентов Фурье в метрике L_2. Рассмотрим ситуацию, аналогичную предыдущему случаю, но восстанавливать функцию будем не в точке, а в метрике L_2. Причем сначала будем предполагать, что коэффициенты Фурье функции вообще известны точно.

Итак, пусть $A \subset \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ и $B \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ — конечные множества (одно из них может быть пустым) и о каждой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$ нам известны ее коэффициенты Фурье $\{a_k\}_{k\in A}$ и $\{b_k\}_{k\in B}$, т. е. $x(\cdot)$ соответствует набор $F_{A,B}x(\cdot)=(\{a_k\}_{k\in A},\{b_k\}_{b\in B})$ из N чисел, где $N=\mathrm{card}A+\mathrm{card}B$. Будем считать, для определенности, что $F_{A,B}x(\times\times)=(a_{k_1},\dots,a_{k_{N_1}},b_{l_1},\dots,b_{l_{N_2}})$, где $k_1<\dots<k_{N_1}$ и $l_1<\dots<l_{N_2}$.

Любой метод φ, призванный восстановить $x(\cdot)$ по набору $F_{A,B}x(\cdot)$, сопоставляет этому набору функцию $\varphi(F_{A,B}x(\cdot))(\cdot)\in L_2(\mathbb{T})$, т. е. φ есть отображение из $\mathbb{R}^N$ в $L_2(\mathbb{T})$. Погрешностью этого метода назовем величину

$$e(W_2^1(\mathbb{T}),F_{A,B},\varphi)=\sup_{x(\cdot)\in W_2^1(\mathbb{T})}\|x(\cdot)-\varphi(F_{A,B}x(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}.$$

Как и раньше, нас интересует тот метод, погрешность которого минимальна. Точнее говоря, нас интересует величина погрешности оптимального восстановления:

$$E(W_2^1(\mathbb{T}),F_{A,B})=\inf_{\varphi\colon\,\mathbb{R}^N\to L_2(\mathbb{T})}e(W_2^1(\mathbb{T}),F_{A,B},\varphi)$$

и оптимальные методы, т. е. такие методы $\widehat{\varphi}$, что

$$E(W_2^1(\mathbb{T}),F_{A,B})=e(W_2^1(\mathbb{T}),F_{A,B},\widehat{\varphi}).$$

Свяжем со множествами A и B число

$$k_0=k_0(A,B)=\min\{\min_{k\in\mathbb{N}\setminus A}k,\ \min_{k\in\mathbb{N}\setminus B}k\}. \tag{8}$$

Теорема 3.

$$E(W_2^1(\mathbb{T}),F_{A,B})=\begin{cases}+\infty, & 0\notin A,\\ \frac{1}{k_0}, & 0\in A.\end{cases}$$

Для любых наборов чисел $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{k_0-1})$ *и* $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_{k_0-1})$ *таких, что*

$$|\alpha_k-1|\leqslant\frac{k}{k_0},\qquad|\beta_k-1|\leqslant\frac{k}{k_0},\quad k=1,\dots,k_0-1,$$

метод

$$\widehat{\varphi}_{\alpha,\beta}(F_{A,B}x(\cdot))(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{k_0-1}(\alpha_ka_k\cos kt+\beta_kb_k\sin kt)$$

является оптимальным.

Отметим, что оптимальных методов "много". В частности, подходят числа $\alpha_k=\beta_k=1$, $k=1,\dots,k_0-1$, и тогда мы получаем так называемый естественный метод: подставляем то, что наблюдаем. Если добавить сюда все остальные наблюдения, то легко показать, что метод останется оптимальным. Но принципиально важно то, что даже тогда, когда коэффициенты Фурье известны точно, для построения оптимального метода достаточно лишь $2k_0-1$ коэффициентов.

Поставим теперь такой вопрос. Пусть имеется возможность измерить N коэффициентов Фурье. Какие коэффициенты лучше всего взять, чтобы погрешность оптимального восстановления была минимальной. Из теоремы 3 вытекает следующий результат.

Теорема 4. *Пусть* $N\in\mathbb{N}$. *Тогда*

$$\inf_{cardA+cardB\leqslant N}E(W_2^1(\mathbb{T}),F_{A,B})=\begin{cases}\frac{2}{N}, & N\ \textit{четное},\\ \frac{2}{N+1}, & N\ \textit{нечетное}.\end{cases}$$

Если N четно, то множества A_1 и B_1, на которых нижняя грань достигается и для которых величина $cardA+cardB$ минимальна, таковы

$$A_1=\{0,1,\dots,N/2-1\},\quad B_1=\{1,\dots,N/2-1\},$$

причем $B_1=\varnothing$, если $N=2$.

Если N нечетно, то множества A_2 и B_2, на которых достигается нижняя грань имеют вид

$$A_2 = \{0, 1, \dots, [N/2]\}, \quad B_2 = \{1, \dots, [N/2]\},$$

причем $B_2 = \varnothing$, если $N = 1$.

Заметим, что $\mathrm{card} A_1 + \mathrm{card} B_1 = N - 1$.

4. Восстановление по неточным значениям коэффициентов Фурье в метрике L_2. Здесь мы имеем точно ту же ситуацию, что и в пункте 2, но восстанавливаем функцию в метрике L_2.

В данном случае погрешность метода $\varphi\colon l_\infty^N \to L_2(\mathbb{T})$ и погрешность оптимального восстановления определяются, естественно, формулами

$$e(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^1(\mathbb{T}),\ y\in l_\infty^N \\ \|F_{A,B}x(\cdot)-y\|_{l_\infty^N}\leqslant\delta}} \|x(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}$$

и

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \inf_{\varphi\colon l_\infty^N\to L_2(\mathbb{T})} e(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi).$$

Оптимальные методы $\widehat{\varphi}$ — это те методы, для которых

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = e(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \widehat{\varphi}).$$

Положим

$$\widehat{p} = \widehat{p}(\delta) = \max\{\, p \in \mathbb{Z}_+ : \delta^2 p(p+1)(2p+1) < 3 \,\}$$

и $p_0 = p_0(A, B, \delta) = \min\{\, \widehat{p}, k_0 - 1 \,\}$, где k_0 определено в предыдущем пункте.

Теорема 5.

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \begin{cases} +\infty, & 0 \notin A, \\ \frac{1}{p_0+1}\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{6}(p_0+1)(8p_0^2 + 13p_0 + 3)}\,, & 0 \in A. \end{cases}$$

Метод

$$\widehat{\varphi}((\{\widetilde{a}_k\}_{k\in A}, \{\widetilde{b}_k\}_{k\in B}))(t) = \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{p_0} \left(1 - \left(\frac{k}{p_0+1}\right)^2\right)(\widetilde{a}_k \cos kt + \widetilde{b}_k \sin kt)$$

является оптимальным.

Отметим, что оптимальный метод, как и в предыдущем примере, использует не все доступные для измерения коэффициенты Фурье, а те, которые использует, “сглаживает”. При этом, чем хуже измерения (δ большое), тем меньше p_0.

Отметим еще, что если в этой теореме формально положить $\delta = 0$ (т. е. коэффициенты Фурье известны точно), то $p_0 = k_0 - 1$, и мы получаем утверждение теоремы 3, но с оптимальным методом, когда $\alpha_k = \beta_k = 1 - (k/k_0)$, $k = 1, \dots, k_0 - 1$,

Комментарий. Теорема 2 является, фактически, расшифровкой более общего результата из работы [3]. Теоремы 3 и 5 доказаны в [2], но в более общей ситуации. Ряд результатов о восстановлении функции и ее производных по преобразованию Фурье можно найти в работах [4]–[8].

Список литературы

1. *В. А. Ильин*, *Э. Г. Позняк* Основы математического анализа. Часть II. – М.: Наука, 1973.
2. *Магарил-Ильяев Г. Г.*, *Осипенко К. Ю.* О наилучшем гармоническом синтезе периодических функций // Фундамент. и прикл. матем. 2013. Т. 18, № 5. С. 155–174.
3. *Osipenko K. Yu.* Optimal recovery of periodic functions from Fourier coefficients given with an error // J. Complexity. 1996. Vol. 12. P. 35–46.

4. *Магарил-Ильяев Г. Г.*, *Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сборник. 2002. Т. 193, № 3. С. 79–100.
5. *Магарил-Ильяев Г. Г.*, *Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51–64.
6. *Магарил-Ильяев Г. Г.*, *Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление значений функций и их производных по неточно заданному преобразованию Фурье // Матем. сборник. 2004. Т. 195, № 10. С. 67–82.
7. *Магарил-Ильяев Г. Г.*, *Осипенко К. Ю.* Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44. С. 76—79.
8. *Магарил-Ильяев Г. Г.*, *Осипенко К. Ю.* Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру? // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 1. С. 59—67.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 161–165

Приближение функций в среднем на всей оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева – Эрмита

А. М. Маликов

Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова, Худжанд, Таджикистан

Аннотация. В работе рассматривается экстремальная задача о наилучшем приближении функций, суммируемых с квадратом на всей оси с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$ Чебышева – Эрмита, алгебраическими полиномами, степени не выше заданной. Получены точные неравенства типа Джексона – Стечкина на множествах функций $L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$, связывающих величины наилучших приближений сверху через усреднённые значения обобщенных модулей непрерывности m-го порядка, определяемых дифференциальными операторами второго порядка. Для некоторых классов функций, определённых указанными характеристиками гладкости, вычислены точные значения различных n-поперечников.

1. Пусть $L_{2,\rho}$ – гильбертово пространство вещественных функций f, квадрат которых суммируем с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$ на $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, со скалярным произведением

$$(f, g) := \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} f(x) g(x) dx$$

и нормой

$$\|f\|_{2,\rho} := (f, f)^{1/2} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Введем следующие обозначения: $\mathcal{P}_n$ – подпространство алгебраических полиномов степени не более n,

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho} := \inf \{ \|f - p_{n-1}\|_{2,\rho} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \}$$

– величина наилучшего приближения функции $f \in L_{2,\rho}$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$.

Хорошо известно [1], что любая функция $f \in L_{2,\rho}$ разлагается в ряд Фурье по полиномам Эрмита

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) H_k(x), \tag{1}$$

где

$$c_k(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} f(x) H_k(x) dx$$

– коэффициенты Фурье – Эрмита функции $f \in L_{2,\rho}$, а равенство (1) понимается в смысле сходимости в $L_{2,\rho}$.

© А. М. Маликов, 2016

Если через $S_{n-1}(f,x)=\sum_{k=0}^{n-1}c_k(f)H_k(x)$ обозначить частичную сумму $(n-1)$-го порядка ряда Фурье – Эрмита (1) функции $f\in L_{2,\rho}$, то

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho}=\|f-S_{n-1}(f)\|_{2,\rho}=\left\{\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)\right\}^{1/2}.$$

Для $t\in\mathbb{R}$, $|t|\leqslant 1$, рассмотрим оператор обобщенного сдвига с шагом t, действующий на функции $f\in L_{2,\rho}$ по правилу

$$T_t(f;x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}f(x\sqrt{1-t^2}+ty)e^{-y^2}dy;$$

при этом справедливо равенство [1] (в смысле сходимости в $L_{2,\rho}$)

$$T_t(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)(1-t^2)^{k/2}H_k(x). \tag{2}$$

Следуя [2], образуем аналоги конечных разностей

$$\Delta_t^1(f,x):=T_t(f,x)-f(x)=(T_t-E)f(x),$$

$$\Delta_t^m(f,x):=\Delta_t^1(\Delta_t^{m-1}(f,\cdot),x)=(T_t-E)^m f(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}T_t^k(f,x), \tag{3}$$

где $m=2,3,\ldots$, $T_t^k:=T_t^1(T_t^{k-1})$, $T_t^1:=T_t$, $T_t^0=E$ – единичный оператор в пространстве $L_{2,\rho}$. С помощью равенств (1), (2), (3) получаем

$$\Delta_t^m(f,x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(f)\left((1-t^2)^{k/2}-1\right)^m H_k(x).$$

Откуда, воспользовавшись равенством Парсеваля, приходим к соотношению

$$\|\Delta_t^m(f,x)\|_{2,\rho}^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-(1-t^2)^{k/2}\right)^{2m}c_k^2(f).$$

Для $f\in L_{2,\rho}$ следующую функцию переменного $\delta\geqslant 0$:

$$\widetilde{\omega}_m(f,\delta)_{2,\rho}:=\sup\left\{\|\Delta_t^m(f,\cdot)\|_{2,\rho}^2:|t|\leqslant\delta\right\}=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2(f)\left(1-(1-\delta^2)^{k/2}\right)^{2m}\right\}$$

назовем обобщенным модулем непрерывности порядка m функции f.

Пусть $L_{2,\rho}^{(0)}\equiv L_{2,\rho}$. При $r\in\mathbb{N}$ обозначим через $L_{2,\rho}^{(r)}$ множество функций $f\in L_{2,\rho}$, у которых производные $f^{(r-1)}$ порядка $r-1$ абсолютно непрерывны на любом конечном интервале, а производные $f^{(r)}$ порядка r принадлежат пространству $L_{2,\rho}$. Всюду далее, ради краткости, полагаем

$$\alpha_{n,0}=1,\quad \alpha_{n,r}=n(n-1)\ldots(n-r+1)\quad \text{при}\quad n\geqslant r,\quad n,r\in\mathbb{N}.$$

С. Б. Вакарчук [2, теорема 2, следствие 2] установил следующий результат.

Теорема A. *Пусть $r\in\mathbb{Z}_+$, $m,n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant r$, $0<p\leqslant 2$, $0<h\leqslant 1$, φ – неотрицательная суммируемая на $[0,h]$ функция, не эквивалентную нулевой функции. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\rho}^{(r)}\\ f\notin\mathcal{P}_r}}\frac{\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h\widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)},t)_{2,\rho}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=\left(\int\limits_0^h\left[1-(1-t^2)^{\frac{n-r}{2}}\right]^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{4}$$

В частности, в (4) при $\varphi = t$, $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, $r = 0$, $h = \sqrt{2/(n+2)}$ и $n \to \infty$ имеет место предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{f\in L_{2,\rho}^{(r)}\\ f\notin \mathcal{P}_r}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left((n+2)\int\limits_0^{\sqrt{2/(n+2)}} t\widetilde{\omega}_m^{1/m}(f,t)_{2,\rho}dt\right)^m} = e^m.$$

Нами доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены все условия теоремы A. Тогда при любом $h \in (0,1]$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left((n-r)\int\limits_0^h \widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)},t)_{2,\rho}t(1-t^2)^{\dfrac{n-r}{2}-1}dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left\{\frac{mp+1}{[1-(1-h^2)^{(n-r)/2}]^{mp+1}}\right\}^{1/p}, \quad 0 < p \leqslant 2, \quad n > r. \tag{5}$$

В частности, из (5) при $h = \sqrt{2/(n-r)}$, $n > r$, $n, r \in \mathbb{N}$ получаем

$$\sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n>r}} \sup_{\substack{f\in L_{2,\rho}^{(r)}\\ f\notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left((n-r)\int\limits_0^{\sqrt{2/(n-r)}} \widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)},t)_{2,\rho}t(1-t^2)^{\dfrac{n-r}{2}-1}dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n>r}} \left\{\frac{mp+1}{\left[1-\left(1-\dfrac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right]^{mp+1}}\right\}^{1/p} = \frac{(mp+1)^{1/p}}{(1-e^{-1})^{m+1/p}}. \tag{6}$$

В свою очередь из (6), при $r = 0$, $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$ следует равенство

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{f\in L_{2,\rho}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left(n\int\limits_0^{\sqrt{2/n}} \widetilde{\omega}_m^{1/m}(f,t)_{2,\rho}\, t(1-t^2)^{\frac{n}{2}-1}dt\right)^m} = \frac{2^m}{(1-e^{-1})^{2m}}. \tag{7}$$

Доказательство. В самом деле, положив $\varphi(t) = (n-r)t(1-t^2)^{\frac{n-r}{2}-1}$ и заметив, что

$$\varphi(t)dt = (n-r)t(1-t^2)^{\frac{n-r}{2}-1}dt = d\left[1-(1-t^2)^{\frac{n-r}{2}}\right],$$

для интеграла в правой части равенства (4) получаем

$$\left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\right]^{mp} d\left[1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\right]\right)^{-1/p} =$$

$$= \left\{\frac{mp+1}{[1-(1-h^2)^{(n-r)/2}]^{mp+1}}\right\}^{1/p}, \quad 0 < p \leqslant 2, \quad n > r;$$

откуда и следует равенство (5). Равенства (6) и (7) получаются непосредственными вычислениями.

Теорема 2. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, n \geqslant r, 0 < h \leqslant 1$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left(\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h \widetilde{\omega}_m^{1/m}(f^{(r)}, t)_{2,\rho} dt\right)^m} = \frac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h (1-t^2)^{(n-r)/2} dt\right)^m}.$$

В частности, при $h = 1$ *имеем*

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left(\displaystyle\int_0^1 \widetilde{\omega}_m^{1/m}(f^{(r)}, t)_{2,\rho} dt\right)^m dt} = \left(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{n-r}{n-r+1} \cdot \frac{\Gamma((n-r)/2)}{\Gamma((n-r+1)/2)}\right)^{-m},$$

где $\Gamma(a)$ – *гамма-функция Эйлера.*

2. Пусть S – единичный шар в пространстве $L_{2,\rho}$; $\Lambda_n \subset L_{2,\rho}$ – n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_{2,\rho}$ – подпространство коразмерности n; $\mathscr{L} : L_{2,\rho} \to \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор; $\mathscr{L}^\perp : L_{2,\rho} \to \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования; $\mathfrak{N}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество из $L_{2,\rho}$. Величины

$$b_n(\mathfrak{N}, L_{2,\rho}) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset m\} : \Lambda_{n+1} \subset L_{2,\rho}\},$$
$$d^n(\mathfrak{N}, L_{2,\rho}) = \inf\{\inf\{\|f\|_{2,\rho} : f \in \mathfrak{N} \cap \Lambda^n\} : \Lambda_n \subset L_{2,\rho}\},$$
$$d_n(\mathfrak{N}, L_{2,\rho}) = \inf\{\sup\{\inf\{\|f - \varphi\|_{2,\rho} : \varphi \in \Lambda_n\} : f \in \mathfrak{N}\} : \Lambda_n \subset L_{2,\rho}\},$$
$$\delta_n(\mathfrak{N}, L_{2,\rho}) = \inf\{\inf\{\sup\{\|f - \mathscr{L}f\|_{2,\rho} : f \in \mathfrak{N}\} : \mathscr{L}L_{2,\rho} \subset \Lambda_n\} : \Lambda_n \subset L_{2,\rho}\},$$
$$\Pi_n(\mathfrak{N}, L_{2,\rho}) = \inf\{\inf\{\sup\{\|f - \mathscr{L}^\perp f\|_{2,\rho} : f \in \mathfrak{N}\} : \mathscr{L}^\perp L_{2,\rho} \subset \Lambda_n\} : \Lambda_n \subset L_{2,\rho}\}$$

называют соответственно бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным, проекционным n-поперечниками подмножества $\mathfrak{N}$ в пространстве $L_{2,\rho}$. Известно [3, 4], что в гильбертовом пространстве между n-поперечниками имеют место соотношения

$$b_n(\mathfrak{N}, L_{2,\rho}) \leqslant d^n(\mathfrak{N}, L_{2,\rho}) \leqslant d_n(\mathfrak{N}, L_{2,\rho}) = \delta_n(\mathfrak{N}, L_{2,\rho}) = \Pi(\mathfrak{N}, L_{2,\rho}).$$

Пусть $h \in (0, 1)$, $0 < p \leqslant 2$, $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим через $W_{2,\rho}^{r,p}(\widetilde{\omega}_m, h)$ класс функций $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}$ при $n > r$, удовлетворяют условию

$$\left((n-r)\int_0^h \widetilde{\omega}_m^p(f^r, t)_{2,\rho} t(1-t^2)^{\frac{n-r}{2}-1} dt\right)^{1/p} \leqslant 1.$$

Теорема 3. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leqslant 2$, $0 < h \leqslant 1$. *Тогда*

$$\lambda_n\left(W_{2,\rho}^{r,p}(\widetilde{\omega}_m, h); L_{2,\rho}\right) = E_{n-1}\left(W_{2,\rho}^{r,p}(\widetilde{\omega}_m, h); L_{2,\rho}\right)_{2,\rho} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}}} \left\{\frac{mp+1}{[1-(1-h^2)^{(n-r)/2}]^{mp+1}}\right\}^{1/p}, \tag{8}$$

где

$$E_{n-1}(\mathfrak{N})_{2,\rho} := \sup\{E_{n-1}(f)_{2,\rho} : f \in \mathfrak{N}\},$$

а $\lambda_n(\cdot)$ – *любой их вышеперечисленных* n*-поперечников. В частности, из* (8) *при* $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, $h = \sqrt{2/(n-r)}$, $n > r$, $r \in \mathbb{Z}_+$, *получаем*

$$\lambda_n\left(W_{2,\rho}^{r,1/m}\left(\widetilde{\omega}_m, \sqrt{\frac{2}{n-r}}\right); L_{2,\rho}\right) = E_{n-1}\left(W_{2,\rho}^{r,1/m}\left(\widetilde{\omega}_m, \sqrt{\frac{2}{n-r}}\right)\right)_{2,\rho} =$$
$$= \frac{2^{m-r/2}}{\sqrt{\alpha_{n,r}}}\left[1 - \left(1 - \frac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right]^{-2m} \sim \frac{2^{m-r/2}}{\sqrt{\alpha_{n,r}}}\left(1 - e^{-1}\right)^{-2m}.$$

В задачах теории приближений часто возникает сопутствующая экстремальная задача вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье соответствующих различным разложениям функций для изучения скорости сходимости или структурных свойств классов функций. В [5, 6] этот вопрос изучается для заданных дифференцируемых периодических функций, а в [2] — для некоторых классов функций из $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. В работе В. А. Абилова [7] рассматривается поведение коэффициентов ряда Фурье – Эрмита непрерывных функций. Для введённых в этой статье классов функций данный вопрос также представляет определенный интерес, а именно имеет место следующая

Теорема 4. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leqslant 2$, $0 < h < 1$ *и* $n \geqslant r$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup\left\{|c_n(f)| : f \in W_{2,\rho}^{r,p}(\widetilde{\omega}_m, h)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}}} \left\{ \frac{mp+1}{\left[1-(1-h^2)^{(n-r)/2}\right]^{mp+1}} \right\}^{1/p}.$$

Из теоремы 4 вытекает

Следствие. *Пусть выполнены все условия теоремы* 4. *Тогда при* $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, $h = \sqrt{2/(n-r)}$, $n > r$ *выполняется равенство*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup \left\{ \sqrt{\alpha_{n,r}}\, |c_n(f)| : f \in W_{2,\rho}^{r,1/m}(\widetilde{\omega}_m, \sqrt{2/(n-r)}\,) \right\} = 2^{m-r/2} \cdot (1-e^{-1})^{-2m}.$$

Список литературы

1. *Рафальсон С.З.* О приближении функций в среднем суммами Фурье-Эрмита // Изв.ВУЗов. Математика. 1968, № 7. С. 78-84.
2. *Вакарчук С.Б.* Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева – Эрмита и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. 2014. Т. 95, № 5. С. 666-684.
3. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. — М.: МГУ. 1976. 304 с.
4. *Pinkus A.* n-Widths in Approximation Theory. — Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. 1985. 252 p.
5. *Шабозов М.Ш.*, *Вакарчук С.Б.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematica. 2012. V. 38, № 2. P. 154-165.
6. *Вакарчук С.Б.*, *Шабозов М.Ш.*, *Забутная В.И.* Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых функциональных классов // Укр. матем. вiсник. 2014. Т. 11, № 3, С. 417-441.
7. *Абилов В.А.* О коэффициентах ряда Фурье – Эрмита непрерывных функций // Изв. ВУЗов. Математика. 1969, № 12. С. 3-8.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 166–170

Неравенства Джексона – Стечкина и значения поперечников функциональных классов в L_2

Н. М. Мамадаёзов, Ш. Абдулофизов

Хорогский государственный университет им. М.Назаршоева, Хорог, Таджикистан

Аннотация. Получены точные неравенства Джексона – Стечкина для осреднённых модулей непрерывности m-го порядка. Для рассматриваемых классов функций вычислены точные значения различных n-поперечников.

1. Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ — множество неотрицательных чисел действительной оси; L_2 — пространство интегрируемых с квадратом по Лебегу 2π-периодических вещественных функций f с конечной нормой

$$\|f\| := \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Совокупность всевозможных тригонометрических полиномов вида

$$T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

обозначим через $\mathcal{T}_{2n-1}$. Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей формальное разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\Big),$$

величина её наилучшего приближения элементами $T_{n-1} \in \mathbb{T}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) = \inf\left\{\|f - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}\right\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2\right\}^{1/2}, \ \rho_k^2 = a_k^2 + b_k^2, \ k \geqslant n,$$

где

$$S_{n-1}(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\Big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\Big)$$

— частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f, $a_k(f)$ и $b_k(f)$ соответственно косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции f.

Равенством

$$\omega_m(f, t) = \sup\Big\{\Big\|\Delta_h^m f(\cdot)\Big\| : \ |h| \leqslant t\Big\}$$

определим модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$, где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{m}{k} f\Big(x + (m-k)h\Big)$$

© Н. М. Мамадаёзов, Ш. Абдулофизов, 2016

— разность m-го порядка функции f с шагом h.

Через $L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ L_2^{(0)} = L_2)$ понимаем множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат L_2.

Неравенствами типа Джексона — Стечкина в широком смысле называют соотношения, в которых погрешность приближения индивидуальной функции в рассматриваемом банаховом пространстве оценивается через модуль непрерывности заданного порядка самой приближаемой функции или некоторой её производной. При этом естественным образом возникает экстремальная задача получения точных неравенств, неулучшаемых на рассматриваемых классах функций. При решении экстремальных задач теории аппроксимации в пространстве L_2, связанных с нахождением точных констант в неравенствах типа Джексона — Стечкина

$$E_{n-1}(f) \leqslant \chi\, n^{-r}\omega_m\left(f^{(r)}, \frac{t}{n}\right),$$

где

$$t > 0,\ f \in L_2^{(r)},\ m \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ f^{(0)} \equiv f,$$

многими математиками в разное время рассматривались различные экстремальные характеристики, способствующие уточнению оценок сверху констант χ.

Л. В. Тайков [1], в частности, доказал, что для любого $h \in [0,\ \pi/n]$ справедливо соотношение

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} n^r E_{n-1}(f)\left\{\int\limits_0^h \omega^2(f^{(r)};t)dt\right\}^{-1/2} = \left\{\frac{n}{2(nh-\sin nh)}\right\}^{1/2}.$$

Обобщая этот результат для модулей непрерывности m-го порядка, С. Б. Вакарчук [2] показал, что

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} n^r E_{n-1}(f)\left\{\int\limits_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)};t)dt\right\}^{-m/2} = \left\{\frac{n}{2(nh-\sin nh)}\right\}^{m/2}. \tag{1}$$

Более общий результат получен в работе [3], в которой доказано, что для произвольных $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \leqslant 2$, $0 < h \leqslant \pi/2$ справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} n^r E_{n-1}(f)\left\{\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)};t)dt\right\}^{-1/p} = \left\{\int\limits_0^h \left(2\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} dt\right\}^{-1/p}.$$

Из последнего равенства, в частности, при $p = 2/m$, $m \in \mathbb{N}$ следует (1).

В этой статье мы продолжим исследование в указанном направлении и докажем аналог результата С. Б. Вакарчука [2] для усреднённых модулей непрерывности m-го порядка, а также вычислим значения различных n-поперечников для классов дифференцируемых функций из L_2.

Теорема 1. *Для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и любого $h \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющего неравенствам $0 < nh \leqslant \pi$, справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega_m^{2/m}(f^{(r)},u)du\right) dt\right)^{m/2}} = \left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\}^{m/2}, \tag{2}$$

где $Si(h)=\int\limits_0^h t^{-1}\sin t dt$ *— интегральный синус.*

Доказательство. В работе [4] доказано, что для любого $f\in L_2^{(r)}$ и любого $u>0$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}^2(f)\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\cos ku+E_{n-1}^{2-2/m}(f)\frac{\omega_m^{2/m}(f^{(r)},u)}{2n^{2r/m}}.$$

Проинтегрировав это неравенство по переменной u в пределах от 0 до t и поделив обе части полученного неравенства на t, запишем

$$E_{n-1}^2(f)\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\,\frac{\sin kt}{kt}+E_{n-1}^{2-2/m}(f)\frac{1}{2n^{2r/m}}\cdot\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_m^{2/m}(f^{(r)},u)du. \tag{3}$$

Снова, интегрируя неравенство (3) по t в пределах от 0 до h $(0<h\leqslant\pi/n)$ и учитывая определение интегрального синуса, получаем

$$hE_{n-1}^2(f)\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\,\frac{Si(kh)}{k}+E_{n-1}^{2-2/m}(f)\frac{1}{2n^{2r/m}}\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_m^{2/m}(f^{(r)},u)du\right)dt.$$

Из последнего неравенства выводим

$$E_{n-1}^2(f)\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\,\frac{Si(kh)}{kh}+E_{n-1}^{2-2/m}(f)\frac{1}{2h\,n^{2r/m}}\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_m^{2/m}(f^{(r)},u)du\right)dt. \tag{4}$$

Поскольку при $0<nh\leqslant\pi$ справедливо равенство (см., например [6])

$$\sup\left\{\frac{Si(kh)}{kh}:\ k\geqslant n\right\}=\frac{Si(nh)}{nh}, \tag{5}$$

то из неравенства (4) и равенства (5) имеем

$$E_{n-1}^2(f)\left(1-\frac{Si(nh)}{nh}\right)\leqslant E_{n-1}^{2-2/m}(f)\frac{1}{2h\,n^{2r/m}}\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_m^{2/m}(f,u)du\right)dt. \tag{6}$$

Из неравенства (6) находим

$$E_{n-1}(f)\leqslant\left(1-\frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m/2}\frac{1}{(2h)^{m/2}n^r}\left(\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_m^{2/m}(f,u)du\right)dt\right)^{m/2}. \tag{7}$$

Так как неравенство (7) справедливо для любой функции $f\in L_2^{(r)}$, то мы сразу получаем оценку сверху для величины, стоящей в левой части равенства (2):

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}}\frac{n^rE_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega^{2/m}(f^{(r)},u)du\right)dt\right)^{m/2}}\leqslant\left\{\frac{n}{2(nh-Si(nh))}\right\}^{m/2}. \tag{8}$$

Для получения оценки снизу указанной величины рассмотрим функцию $f_0(x):=$ $=\cos nx\in L_2^{(r)}$. Поскольку

$$E_{n-1}(f_0)=1, \tag{9}$$

$$\omega_m(f_0^{(r)},u)=2^{m/2}n^r(1-\cos nu)^{m/2},\quad 0<nu\leqslant\pi,$$

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)},u)du = 2n^{2r/m}\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right),$$

$$\left(\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)},u)du\right)dt\right)^{m/2} =$$

$$= n^r(2h)^{m/2}\left(1-\frac{Si(nh)}{nh}\right)^{m/2} = n^r\left\{\frac{2(nh-Si(nh))}{n}\right\}^{m/2}, \tag{10}$$

то, учитывая равенства (9) и (10), имеем оценку снизу

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega_m^{2/m}(f^{(r)},u)du\right)dt\right)^{m/2}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{n^r E_{n-1}(f_0)}{\left(\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)},u)du\right)dt\right)^{m/2}} = \left\{\frac{n}{2(nh-Si(nh))}\right\}^{m/2}. \tag{11}$$

Сопоставив оценки сверху (8) и снизу (11), получим требуемое равенство (2).

2. Для формулировки последующих результатов нам понадобятся следующие определения и понятия. Пусть $S=\{g:\|g\|\leqslant 1\}$ — единичный шар в пространстве L_2; $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2; $\Lambda_n\subset L_2$ – n-мерное подпространство; $\Lambda^n\subset L_2$ — подпространство коразмерности n; $\mathcal{L}:L_2\to\Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства L_2 в Λ_n; $\mathcal{L}^{\perp}:L_2\to\Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования L_2 на подпространство Λ_n. Величины

$$b_n(\mathfrak{M},L_2)=\sup\left\{\sup\left\{\varepsilon>0;\ \varepsilon S\cap\Lambda_{n+1}\subset\mathfrak{M}\right\}:\Lambda_{n+1}\subset L_2\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M},L_2)=\inf\left\{\sup\left\{\|f\|:\ f\in\mathfrak{M}\cap\Lambda^n\right\}:\Lambda^n\subset L_2\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M},L_2)=\inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-\varphi\|:\ \varphi\in\Lambda_n\right\}:f\in\mathfrak{M}\right\}:\Lambda_n\subset L_2\right\},$$

$$\lambda_n(\mathfrak{M},L_2)=\inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-lf\|:\ f\in\mathfrak{M}\right\}:lL_2\subset\Lambda_n\right\}:\Lambda_n\subset L_2\right\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M},L_2)=\inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-l^{\perp}f\|:\ f\in\mathfrak{M}\right\}:l^{\perp}L_2\subset\Lambda_n\right\}:\Lambda_n\subset L_2\right\}$$

называют соответственно бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным, проекционным n-поперечниками.

Весьма важным является нахождение соответствующих подпространств, реализующих внешнюю верхнюю грань в поперечнике Бернштейна $b_n(\cdot)$ и внешние нижние грани во всех остальных n-поперечниках. Такие подпространства называются оптимальными.

Известно, что в гильбертовом пространстве L_2 между перечисленными n-поперечниками выполняются следующие соотношения:

$$b_n(\mathfrak{M},L_2)\leqslant d^n(\mathfrak{M},L_2)\leqslant d_n(\mathfrak{M},L_2)=\lambda_n(\mathfrak{M},L_2)=\Pi_n(\mathfrak{M},L_2).$$

Для $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ и $0<h\leqslant 2\pi$ введём в рассмотрение класс функций:

$$\mathcal{F}_m^{(r)}(h):=\left\{f\in L_2^{(r)}:\ \int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega_m^{2/m}(f^{(r)},u)du\right)dt\leqslant 1\right\}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ *и выполнено условие* $0 < nh \leqslant \pi$. *Тогда справедливы равенства*

$$\delta_{2n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h), L_2\right) = \delta_{2n}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h), L_2\right) =$$
$$= E_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h)\right)_{L_2} = \left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\}^{m/2}\frac{1}{n^r},$$

где $\delta_k(\cdot)$ — *любой из вышеперечисленных* k*-поперечников* $b_k(\cdot), d^k(\cdot), d_k(\cdot),\ \lambda_k(\cdot),\ \Pi_k(\cdot)$, *а* $E_{n-1}(\mathfrak{N})_{L_2} := E(\mathfrak{N},\, \mathbb{T}_{2n-1})_{L_2}$ — *наилучшее полиномиальное приближение класса функций* $\mathfrak{N}$ *в пространстве* L_2.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 2 *при* $r \geqslant m/2$ $(r, m \in \mathbb{N})$ *справедливо равенство*

$$\delta_{2n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}\left(\frac{\pi}{n}\right), L_2\right) = \delta_{2n}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}\left(\frac{\pi}{n}\right), L_2\right) =$$
$$= E_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)_{L_2} = n^{-+m/2}\Big\{2(\pi - Si(\pi))\Big\}^{-m/2}.$$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда имеют место следующие равенства*:

$$\sup\Big\{|a_n(f)|:\ f(x) \in \mathcal{F}_m^{(r)}(h)\Big\} =$$
$$= \sup\Big\{|b_n(f)|:\ f(x) \in \mathcal{F}_m^{(r)}(h)\Big\} = n^{-r}\left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\}^{m/2}.$$

Список литературы

1. *Тайков Л.В.* Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. 1976. Т. 20, № 3. С. 433-438.
2. *Вакарчук С.Б.* Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. 2005. Т. 78, № 5. С. 792-796.
3. *Шабозов М.Ш.* Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 616-623.
4. *Шабозов М.Ш.*, *Юсупов Г.А.* Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. 2011. Т. 90, № 5. С. 764-775.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 171–172

О характеристических свойствах целых функций

Р. Мамадов

Канибадамский технологический колледж им. А.Каххарова, Канибадам, Таджикистан

Аннотация. В статье получены предельные равенства, связывающие характеристики роста целых трансцендентных функций с последовательностями их наилучших полиномиальных приближений в весовом пространстве Бергмана $B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q < \infty$.

В данной работе установлены связи между наилучшими полиномиальными приближениями

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} = \inf\left\{\|f - p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma}} :\ p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\right\}$$

целой трансцендентной функции f в весовом пространстве Бергмана $B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q < \infty$, и такими ее характеристиками, как порядок роста и тип. Указанное банахово пространство состоит из аналитических в круге $|z| < 1$ функций f, для которых

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|z|<1} \gamma(|z|)|f(z)|^q dxdy\right)^{1/q} = \left(\int\limits_0^1 r\gamma(r)M_q^q(r;f)dr\right)^{1/q} < \infty,$$

где

$$M_q(r;f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{it})|^q dt\right)^{1/q},$$

$\gamma(|z|)$ – положительная измеримая весовая функция, а интегралы понимаются в смысле Лебега. Определим порядок ρ и тип σ целой функции

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

через величину $M(r) = \max\left\{|f(z)| :\ |z| = r\right\}$, а именно:

$$\rho = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}, \quad \sigma = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{r^\rho}, \quad 0 < \rho < \infty.$$

Приведём основные соотношения между ними, а также некоторые формулы, устанавливающие связь между ростом целых функций и скоростью убывания коэффициентов их степенных разложений в ряд Тейлора:

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{\ln \dfrac{1}{|c_n|}}, \quad (\sigma e\rho)^{1/\rho} = \varlimsup_{n\to\infty} n^{1/\rho}|c_n|^{1/n}.$$

Сформулируем основные результаты данной работы, которые получены с помощью применения неравенства типа С. М. Никольского в комплексной плоскости и некоторых элементов конструктивной теории функций комплексного переменного для функций, принадлежащих банахову пространству $B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q < \infty$.

© Р. Мамадов, 2016

Теорема 1. *Для того, чтобы функция $f \in B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q < \infty$, была целой необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предельное равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\left\{E_n(f)_{B_{q,\gamma}}\left(\int\limits_0^1 r^{nq+1}\gamma(r)dr\right)^{-1/q}\right\}^{1/n}=0.$$

Теорема 2. *Пусть $f \in B_{q,\gamma}, 1 \leqslant q < \infty$. Для того, чтобы f была целой трансцендентной функцией конечного порядка $\rho \in (0,\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\ln\left[\left(\int\limits_0^1 r^{nq+1}\gamma(r)dr\right)^{1/q}E_n^{-1}(f)_{B_{q,\gamma}}\right]\right\}^{-1}n\ln n=\rho.$$

Теорема 3. *Пусть $f(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q < \infty$. Для того, чтобы f была целой трансцендентной функцией конечного порядка $\rho \in (0,\infty)$ и нормального типа $\sigma \in (0,\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(\rho e)^{-1}n\left\{E_n(f)_{B_{q,\gamma}}\left(\int\limits_0^1 r^{nq+1}\gamma(r)dr\right)^{-1/q}\right\}^{\rho/n}=\sigma.$$

Отметим, что из приведенных теорем 1–3 вытекают некоторые результаты, ранее полученные С. Б. Вакарчуком и С. И. Жиром [1–2].

Список литературы

1. *Вакарчук С.Б., Жир С.И.* Некоторые вопросы полиномиальной аппроксимации целых трансцендентных функций // Укр. матем. журнал. 2002. Т. 54, № 9. С. 1155-1162.

2. *Вакарчук С.Б., Жир С.И.* О полиномиальной аппроксимации целых трансцендентных функций в комплексной плоскости // Збірник праць Інститута математики НАН Україні. – Київ: Ін-т математики НАН Україні. 2005, 336 с.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 173–175

Верхние грани одновременного приближения функций двух переменных и их производных многогранными функциями

С. М. Мехмонзода

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан

Аннотация. В работе найдены точные оценки погрешности приближения непрерывных функций двух переменных и их частных производных многогранными функциями и их соответствующими частными производными в равномерной метрике.

1. Пусть $C(Q)$ – множество функций двух переменных $f(x,y)$ заданных и непрерывных в квадрате $Q := \{(x,y) : 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$ с обычной нормой

$$\|f\|_C := \|f\|_{C(Q)} = \max\{|f(x,y)| : (x,y) \in Q\}.$$

Через $C^{(r,s)}(Q)$ $(r, s \in \mathbb{Z}_+, C^{(0,0)}(Q) = C(Q))$ – обозначим класс функций $f(x,y)$ обладающих непрерывными частными производными

$$f^{(i,0)}(x,y) := \partial^i f/\partial x^i (i \leqslant r) \text{ и } f^{(0,j)}(x,y) := \partial^j f/\partial y^j \ \ (j \leqslant s).$$

Произвольной функции $f(x,y) \in C(Q)$ можно сопоставить как полный модуль непрерывности [1, с. 335]

$$\omega(f;t,\tau) = \sup\left\{|f(x^{'},y^{'}) - f(x^{''},y^{''})| : |x^{'} - x^{''}| \leqslant t, |y^{'} - y^{''}| \leqslant \tau\right\}, \quad \text{где } (x^{'},y^{'}),(x^{''},y^{''}) \in Q,$$

так и частные модули непрерывности:

$$\omega(f;t,0) = \sup\left\{|f(x^{'},y) - f(x^{''},y)| : \ |x^{'} - x^{''}| \leqslant t, \ 0 \leqslant y \leqslant 1\right\},$$
$$\omega(f;0,\tau) = \sup\left\{|f(x,y^{'}) - f(x,y^{''})| : \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \ |y^{'} - y^{''}| \leqslant \tau\right\},$$

характеризующие изменение функции $f(x,y)$ вдоль каждой переменной.

Пусть $\omega(t,\tau)$ – заданный полный модуль непрерывности. Обозначим через $W^{(r,s)}H^{\omega} := W^{(r,s)}H^{\omega}(Q)$ $(r, s \in \mathbb{Z}_+, W^{(0,0)}H^{\omega} = H^{\omega})$ класс функций $f(x,y) \in C^{(r,s)}(Q)$, удовлетворяющих условию

$$\left|f^{(r,s)}(x^{'},y^{'}) - f^{(r,s)}(x^{''},y^{''})\right| \leqslant \omega(|x^{'} - x^{''}|, |y^{'} - y^{''}|),$$

для любых двух точек $(x^{'},y^{'})$, $(x^{''},y^{''}) \in Q$.

Через $W^{(r,s)}H^{\omega_1,\omega_2} := W^{(r,s)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ $(r, s \in \mathbb{Z}_+, W^{(0,0)}H^{\omega_1,\omega_2} = H^{\omega_1,\omega_2})$ обозначим класс функций $f(x,y) \in C^{(r,s)}(Q)$, которые для любых двух точек $(x^{'},y^{'}),(x^{''},y^{''}) \in Q$ удовлетворяют условию

$$\left|f^{(r,s)}(x^{'},y^{'}) - f^{(r,s)}(x^{''},y^{''})\right| \leqslant \omega_1(|x^{'} - x^{''}|) + \omega_2(|y^{'} - y^{''}|),$$

где $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$ — заданные модули непрерывности.

Пусть $f \in C(Q)$ и задана решётка равноотстоящих узлов $M_{ki} := M(x_k, y_i)$, где $x_k = k/m$ $(k = \overline{0,m})$, $y_i = i/n$ $(i = \overline{0,n})$, $m, n \in \mathbb{N}$ фиксированные числа. Прямоугольники с вершинами в точках $M_{k-1,i-1}$, $M_{k-1,i}$, $M_{k,i-1}$, $M_{k,i}$ $(k = \overline{0,m}, i = \overline{0,n})$ обозначим через $Q_{k,i}$.

© С. М. Мехмонзода, 2016

Определение. *Многогранной функцией, вписанной в $f(x,y)$ в узлах $M_{k,i}$ называется такая функция $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)$, для которой выполнены следующие условия*:

1)$\mathscr{L}_{m,n}(f;x_k,y_i) = f(x_k,y_i),\ k=\overline{0,m},\ i=\overline{0,n}$;

2) *каждый прямоугольник $Q_{k,i}$ можно разбить на два треугольника с вершинами в узлах, на которых $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)$ линейна по каждому переменному x и y.*

Ясно, что для любой функции $f(x,y)\in C(Q)$ многогранная функция $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)\in$ $\in C(Q)$ определяется при фиксированных узлах, вообще говоря, неоднозначно. Для $(x,y)\in Q_{k,i}(k=\overline{0,m}; i=\overline{0,n})$ полагаем:

$$\begin{aligned} &H_{0,k}(x)=m(x_k-x), \quad \sum_{p=0}^{1}H_{p,k}(x)=1;\\ &H_{0,i}(y)=n(y_i-y), \quad \sum_{p=0}^{1}H_{q,i}(y)=1, \end{aligned} \tag{1}$$

а также определим подобласти из $Q_{k,i}$, зависящие от параметра $\tau\in[0,1]$:

$$Q_{k,i}^{(1)} := \{(x,y): x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k,\ y_{i-1}+\tau/n\leqslant y\leqslant y_i\};$$

$$Q_{k,i}^{(2)} := \{(x,y): x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k,\ y_{i-1}\leqslant y\leqslant y_{i-1}+\tau/n\};$$

$$Q_{k,i}^{(3)} := \{(x,y): x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k,\ y_{i-1}\leqslant y\leqslant y_i-\tau/n\};$$

$$Q_{k,i}^{(4)} := \{(x,y): x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k,\ y_i-\tau/n\leqslant y\leqslant y_i\}.$$

Тогда многогранная функция $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)$ есть непрерывная функция, которая может быть задана одним из двух следующих выражений:

$$\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y) :=$$
$$= \begin{cases} H_{0,i}(y)f(x_{k-1},y_{i-1}) + (H_{1,i}(y)-H_{1,k}(x))f(x_{k-1},y_i)+\\ +H_{1,k}(x)f(x_k,y_i),\ (x,y)\in Q_{k,i}^{(1)};\\ H_{0,k}(x)f(x_{k-1},y_{i-1}) + (H_{1,k}(x)-H_{1,i}(y))f(x_k,y_{i-1})+\\ +H_{1,i}(y)f(x_k,y_i),\ (x,y)\in Q_{k,i}^{(2)}. \end{cases} \tag{2}$$

$$\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y) :=$$
$$= \begin{cases} (H_{0,k}(x)-H_{1,i}(y))f(x_{k-1},y_{i-1}) + H_{1,i}(y)f(x_{k-1},y_i)+\\ +H_{1,k}(x)f(x_k,y_i),\ (x,y)\in Q_{k,i}^{(3)};\\ H_{0,k}(x)f(x_{k-1},y_i) + (H_{1,k}(x)+H_{1,i}(y))f(x_k,y_i)-\\ -H_{1,i}(y)f(x_k,y_{i-1}),\ (x,y)\in Q_{k,i}^{(4)}. \end{cases} \tag{3}$$

Из представлений (2) и (3) видно, что в частичных прямоугольниках $Q_{k,i}^{(\nu)}$ $(\nu=\overline{1,4})$ многогранная функция имеет вид:

$$\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y) := a_{k,i}^{(\nu)} + b_{k,i}^{(\nu)}x + c_{k,i}^{(\nu)}y\ (\nu=\overline{1,4}),$$

где $a_{k,i}^{(\nu)}$, $b_{k,i}^{(\nu)}$, $c_{k,i}^{(\nu)}$ – некоторые действительные числа.

Требуется оценить погрешность одновременного приближения функции и её частных производных многогранной функцией и её соответствующими частными производными:

$$|e_{m,n}^{(l,j)}(f;x,y)| \overset{def}{=} \left|f^{(l,j)}(x,y) - \mathscr{L}_{m,n}^{(l,j)}(f;x,y)\right| \quad (l,j=0,1)$$

в каждой точке $(x,y)\in Q_{k,i}$ $(k=\overline{1,m},\ i=\overline{1,n})$, и для значений $l\leqslant r$, $j\leqslant s$, $0\leqslant r+s\leqslant 1$ найти величину

$$\mathcal{E}_{m,n}^{(l,j)}(\mathfrak{M}) = \sup\left\{\|e_{m,n}^{(l,j)}(f;\cdot,\cdot)\|_{C(Q)}:\ f\in\mathfrak{M}\right\}, \tag{4}$$

где $\mathfrak{M}$ – один из перечисленных выше классов функций $W^{(r,s)}H^{\omega}$, $W^{(r,s)}H^{\omega_1,\omega_2}$. Отметим, что в случае $r = s = 0$ задача (4) для классов функций H^{ω} и H^{ω_1,ω_2} в предположении выпуклости вверх $\omega(t,\tau)$ по обеим переменным t и τ и выпуклости вверх модулей непрерывности $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$ решена В. Ф. Сторчаем в работах [2–4], где доказаны следующие равенства:

$$\mathscr{E}_{m,n}(H^{\omega}) = \omega\left(\frac{1}{2m}, \frac{1}{2n}\right), \qquad \mathscr{E}_{m,n}(H^{\omega_1,\omega_2}) = \omega_1\left(\frac{1}{2m}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{2n}\right).$$

Таким образом, задача (4) не была решена для случаев $r = 1$, $s = 0$ и $r = 0$, $s = 1$, то есть для случаев приближения частных производных $f^{(1,0)}(x,y)$ и $f^{(0,1)}(x,y)$ соответствующими производными $\mathscr{L}^{(1,0)}_{m,n}(f;x,y)$ и $\mathscr{L}^{(0,1)}_{m,n}(f;x,y)$ многогранной функции $\mathscr{L}_{m,n}(f;x,y)$ для классов $W^{(r,s)}H^{\omega}$, $W^{(r,s)}H^{\omega_1,\omega_2}$ в метрике пространство $C(Q)$. Нам удалось устранить этот пробел, доказав следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$ – произвольные модули непрерывности. Тогда для любых $m,n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\mathscr{E}^{(1,0)}_{m,n}\left(W^{(1,0)}H^{\omega_1,\omega_2}\right) = m\int\limits_0^{1/m}\omega_1(t)dt + \omega_2\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\mathscr{E}^{(0,1)}_{m,n}\left(W^{(0,1)}H^{\omega_1,\omega_2}\right) = \omega_1\left(\frac{1}{m}\right) + n\int\limits_0^{1/n}\omega_1(\tau)d\tau.$$

Теорема 2. *Пусть $\omega(t,\tau)$ – произвольный полный модуль непрерывности. Тогда для произвольных $m,n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства*

$$\mathscr{E}^{(1,0)}_{m,n}\left(W^{(1,0)}H^{\omega}\right) = m\int\limits_0^{1/m}\omega\left(t,\frac{1}{n}\right)dt,$$

$$\mathscr{E}^{(0,1)}_{m,n}\left(W^{(0,1)}H^{\omega}\right) = n\int\limits_0^{1/n}\omega\left(\frac{1}{m},\tau\right)d\tau.$$

Отметим, что приведенные выше теоремы 1 и 2 доказываются по схеме рассуждений, изложенные в работах [5, 6].

Список литературы

1. *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближений. – М.: Наука, 1984. 352 с.
2. *Сторчай В.Ф.* Приближение непрерывных функций двух переменных сплайн-функциями в метрике $\mathbb{C}$ // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям – Днепропетровск: Днепропетровск. ун-т. 1975. С. 66-68.
3. *Сторчай В.Ф.* Приближение непрерывных функций двух переменных многогранными функциями в равномерной метрике // Изв. ВУЗов. Математика. 1973, № 8(135). С. 84-88.
4. *Сторчай В.Ф.* Приближение непрерывных функций двух переменных многогранными функциями и сплайн-функциями в равномерной метрике // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Днепропетровск: Днепропетровск. ун-т, 1975. С. 82-89.
5. *Шабозов М.Ш.* О погрешности интерполяции билинейными сплайнами // Укр. мат. журнал. 1994. Т. 46, № 1. С. 1554-1560.
6. *Шабозов М.Ш.* Точные оценки одновременного приближения фукнций двух переменных и их производных билинейными сплайнами // Матем. заметки. 1996. Т. 59. Вып. 1. С. 142-159.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 176–181

Верхние грани среднеквадратических приближений некоторых классов функций частичными суммами Фурье – Бесселя заданного порядка

К. Н. Муродов

Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова, Худжанд, Таджикистан

Аннотация. Найдены точные оценки скорости сходимости рядов Фурье – Бесселя по функциям Бесселя первого рода для некоторых классов функций, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности.

1. Пусть $J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода индекса ν, а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...$ — занумерованные в порядке возрастания положительные корни уравнения $J_\nu(x) = 0$ и $\{J_\nu(\lambda_n x)\}_{n=1}^\infty$ является системой собственных функций задачи

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) + \frac{p^2}{x}u = \lambda xu, \quad 0 < x < 1, \quad |u(0)| < +\infty, \quad u(1) = 0,$$

отвечающих собственным значениям $\{\lambda_n^2\}_{n=1}^\infty$. При этом система функций $\{J_\nu(\lambda_n x)\}_{n=1}^\infty$ является полной и ортогональной в пространстве суммируемых с квадратом функций f на отрезке $[0, 1]$ с весом x.

В этой работе мы продолжим исследования проведенные в работах [1–3], и докажем ряд точных неравенств типа Джексона – Стечкина, используя которые вычислим точные значения различных n-поперечников некоторых классов функций. Пусть $L_2 := L_2([0, 1]; x)$ – пространство суммируемых с квадратом функций f с весом x и конечной нормой

$$\|f\| = \left(\int_0^1 xf^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

В монографии [4, с. 358] доказана справедливость соотношений

$$\int_0^1 xJ_\nu(\lambda_n x)J_\nu(\lambda_m x)dx = 0, \ n \neq m; \qquad \int_0^1 xJ_\nu^2(\lambda_n x)dx = \frac{1}{2}J_\nu'^2(\lambda_n);$$

откуда вытекает, что система функций $\left\{\sqrt{2}\,J_\nu(\lambda_n x) \cdot |J_\nu'(\lambda_n)|^{-1}\right\}$ образует полную ортонормированную систему в пространстве L_2. Ради сокращения записи, через $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^\infty$ обозначим полную ортонормированную систему функций в пространстве L_2, для которой имеет место соотношение

$$\int_0^1 xJ_\nu(\lambda_n x)J_\nu(\lambda_m x)dx = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad n \neq m, \\ 1, & \text{если} \quad n = m. \end{cases}$$

© К. Н. Муродов, 2016

Для произвольной функции $f \in L_2$ рассмотрим её разложение в ряд Фурье – Бесселя следующего вида:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) J_\nu(\lambda_k x), \tag{1}$$

где

$$c_k(f) = \int\limits_0^1 x f(x) J_\nu(\lambda_k x)\, dx$$

— коэффициенты Фурье – Бесселя функции f. Пусть

$$S_{n-1}(f,x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) J_\nu(\lambda_k x)$$

— частичная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье – Бесселя (1) функции $f \in L_2$. Пусть $\mathcal{P}_n$ – подпространство обобщенных полиномов вида

$$p_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k J_\nu(\lambda_k x)$$

с вещественными коэффициентами a_k. Тогда для величины наилучшего приближения функции $f \in L_2$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$ выполняются равенства

$$E_{n-1}(f) = \inf\{\|f - P_{n-1}\| : P_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\} = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{2}$$

Рассмотрим дифференциальный оператор Бесселя второго порядка

$$\mathcal{D} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} - \frac{p^2}{x^2} \tag{3}$$

и введём функцию $T(x,y;t)$ как сумму ряда

$$T(x,y;t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_\nu(\lambda_k x) J_\nu(\lambda_n y) t^k, \quad 0 < t < 1,$$

где равенство понимается в смысле сходимости в пространстве $L_2([0,1] \times [0,1]; xy)$. В L_2 рассмотрим оператор

$$F_h f(x) = \int\limits_0^1 t f(t) T(x,t;1-h) dt, \tag{4}$$

который называют оператором обобщенного сдвига. В работе [2] отмечено несколько свойств оператора (4) и для произвольной $f \in L_2$ рассматриваются конечные разности первого и высших порядков:

$$\Delta_h f(x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - E) f(x),$$

$$\Delta_h^m f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f(x)) = (F_h - E)^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f(x),$$

где

$$F_h^0 f(x) = f(x), \quad F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1} f(x)), \quad k = 1, 2, ..., m,$$

E – единичный оператор в пространстве L_2. Величину

$$\Omega_m(f;t) = \sup\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\| : 0 < h \leqslant t\} \tag{5}$$

назовём обобщённым модулем непрерывности порядка k функции $f \in L_2$.

2. Всюду далее обозначим через $L_2(\mathcal{D})$, где оператор $\mathcal{D}$ определяется равенством (3), множество функций $f \in L_2$, имеющих абсолютно непрерывные производные первого порядка f' и таких, что $\mathcal{D}f \in L_2$.

Полагаем, $\mathcal{D}^0 f \equiv f,\ \mathcal{D}^1 f := \mathcal{D}f,\ \mathcal{D}^r f := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1} f),\ r \in \mathbb{N}$. Символом $L_2^{(r)}(\mathcal{D}),\ r = 2, 3, ...$, обозначим множество функций $f \in L_2$, имеющих абсолютно непрерывные производные $(2r-1)$-го порядка и для которых $\mathcal{D}^r f \in L_2$.

Нам понадобятся некоторые результаты из работы [2], используемые в дальнейшем. Если $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, $r \in \mathbb{N}$, то для её коэффициентов Фурье – Бесселя $c_k(f)$ справедлива формула

$$c_k(f) = (-1)^r \lambda_k^{-2r} c_k(\mathcal{D}^r f), \quad k, r \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Там же доказано, что для произвольной функции $f \in L_2(\mathcal{D})$, имеющей на $(0,1)$ разложение в ряд Фурье – Бесселя (1) по системе ортонормированных функций $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$ с весом x, оператор (4) обобщенного сдвига представляется в виде

$$F_h f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-h)^k c_k(f) J_\nu(\lambda_k x), \tag{7}$$

где равенство (7) понимается в смысле сходимости в норме пространства L_2. Используя равенства (1) и (7), на основании метода математической индукции получаем

$$\Delta_h^m(f, x) = \sum_{k=1}^{\infty} ((1-h)^k - 1)^m c_k(f) J_\nu(\lambda_k x),$$

откуда следует равенство

$$\|\Delta_h^m(f, \cdot)\|_{L_2} = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - (1-h)^k)^{2m} c_k^2(f), \quad \text{где} \quad h \in (0,1). \tag{8}$$

Поэтому в силу (5) и (8) имеем

$$\Omega_m(f, t) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (1 - (1-t)^k)^{2m} c_k^2(f) \right\}^{1/2}, \quad 0 < t < 1. \tag{9}$$

Для модуля непрерывности (9) в работе [2] доказано неравенство типа Джексона – Стечкина

$$E_{n-1}(f) \leqslant (1 - (1-t)^n)^{-m} \lambda_n^{-2r} \Omega_m(\mathcal{D}^r f, t), \quad 0 < t < 1. \tag{10}$$

Легко заметить, что из (10) вытекает экстремальное равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f, t)} = \frac{1}{(1 - (1-t)^n)^m}, \quad \text{где} \quad t \in (0,1). \tag{11}$$

В свою очередь, из (11) при $t = 1/n$ получаем

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D}) \\ f \neq const}} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f, 1/n)} = \frac{1}{(1 - e^{-1})^m}.$$

Имеет место следующее общее утверждение, в котором и далее используется понятие весовой функцией на интервале $(0, h)$, т. е. неотрицательной измеримой суммируемой на $(0, h)$ функции, неэквивалентной нулевой функции.

Теорема 1. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\leqslant 2$, $0<h<1$, φ — *весовая функция на интервале* $(0,h)$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(\mathcal{D}^r,t)\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=\frac{1}{\left(\int\limits_0^h(1-(1-t)^n)^{mp}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}.\tag{12}$$

Доказательство. Воспользуемся одним вариантом неравенства Минковского из монографии [5, с. 104]

$$\left(\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}|\widetilde{f}_k(t)|^2\right)^{p/2}dt\right)^{1/p}\geqslant\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int\limits_0^h|\widetilde{f}_k(t)|^pdt\right)^{2/p}\right)^{1/2},\tag{13}$$

верного при всех $0<p\leqslant 2$ и $h\in\mathbb{R}_+$.

Полагая $\widetilde{f}_k:=f_k\varphi^{1/p}$, из формулы (13) получаем

$$\left(\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}|f_k(t)|^2\right)^{p/2}\varphi(t)\,dt\right)^{1/p}\geqslant\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int\limits_0^h|f_k(t)|^p\,\varphi(t)\,dt\right)^{2/p}\right)^{1/2}.\tag{14}$$

Для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ в силу формулы (6) запишем разложение функции $\mathcal{D}^rf$ в ряд Фурье – Бесселя по системе $\{J_\nu(\lambda_kx)\}_{k=1}^{\infty}$, ортонормированной на (0,1) с весом x,

$$\mathcal{D}^rf(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(\mathcal{D}^rf)J_\nu(\lambda_kx)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^r\lambda_k^{2r}c_k(f)J_\nu(\lambda_kx),\tag{15}$$

где равенство понимается в смысле сходимости в метрике пространства L_2. Из равенств (9) и(15) имеем

$$\Omega_m^2(\mathcal{D}^rf,t)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-(1-t)^k)^{2m}\lambda_k^{4r}c_k^2(f),\quad 0<t<1.\tag{16}$$

Используя неравенства (14), равенства (16), (2), и имея в виду, что последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ положительных чисел является монотонно возрастающей, с учётом соотношения

$$\inf_{k\geqslant n}\int\limits_0^h(1-(1-t)^k)^{mp}\varphi(t)dt=\int\limits_0^h(1-(1-t)^n)\varphi(t)dt,$$

заключаем, что

$$\left\{\int\limits_0^h\Omega_m^p(\mathcal{D}^rf,t)\varphi(t)dt\right\}^{1/p}=\left\{\int\limits_0^h(\Omega_m^2(\mathcal{D}^rf,t))^{p/2}\varphi(t)dt\right\}^{1/p}\geqslant$$

$$\geqslant\left\{\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}(1-(1-t)^k)^{2m}\lambda_k^{4r}c_k^2(f)\right)^{p/2}\varphi(t)dt\right\}^{1/p}\geqslant$$

$$\geqslant\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k^{4r}c_k^2(f)\left(\int\limits_0^h(1-(1-t)^k)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2}\geqslant$$

$$\geqslant \lambda_n^{2r}\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)\right\}^{1/2}=$$

$$=\lambda_n^{2r}\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}E_{n-1}(f). \tag{17}$$

Из (17) получаем следующую оценку сверху величины, стоящей в левой части (12):

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f,t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}}\leqslant\frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{18}$$

Для оценки снизу той же величины, полагаем $f_0(x):=J_\nu(\lambda_n x)\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$. В силу равенства (2) имеем $E_{n-1}(f_0)=1$, а из равенства (16) следует, что

$$\Omega_m(\mathcal{D}^r f_0,t)=(1-(1-t)^n\lambda_n^{2r}),\quad 0<t<1,$$

а потому

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f_0,t)\varphi(t)dt=\lambda_n^{2rp}\int\limits_0^h(1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt.$$

Следовательно,

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f,t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}}\geqslant\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f_0)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m(\mathcal{D}^r f_0,t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{19}$$

Требуемое равенство (12) получаем из сопоставления оценки сверху (18) и оценки снизу (19), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Из теоремы 1 вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $h\in(0,1)$, φ *— весовая функция на интервале* $(0,h)$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)\varphi(t)dt\right)^{m}}=\frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)\varphi(t)dt\right)^{m}}. \tag{20}$$

Заметим, что из (20), в частности при $\varphi\equiv 1$, следует равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left((n+1)\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)dt\right)^{m}}=\frac{1}{\{(n+1)h-1+(1-h)^{n+1}\}^m}. \tag{21}$$

Полагая в (21), например, $h=1/(n+1)$, получаем

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left((n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)dt\right)^{m}}=\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{-m}, \tag{22}$$

отсюда следует экстремальное равенство

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}}\frac{E_{n-1}(f)}{\left((n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)dt\right)^m}=e^m. \tag{23}$$

Отметим, что соотношения вида (20)–(23) для наилучшей аппроксимации в среднем произвольными алгебраическими полиномами с соответствующим весом были получены в работе [6].

Следствие 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1. *Тогда при любом* $h\in(0,1]$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(n\int\limits_0^h\Omega_m^p(\mathcal{D}^r f,t)(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}}=\left\{\frac{mp+1}{[1-(1-h)^n]^{mp+1}}\right\}^{1/p}. \tag{24}$$

В частности, из (*24*) *при* $h=1/n,\ n\in\mathbb{N}$, *получаем*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(n\int\limits_0^{1/n}\Omega_m^p(\mathcal{D}^r f,t)(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}}=\frac{(mp+1)^{1/p}}{(1-e^{-1})^{m+1/p}}. \tag{25}$$

В свою очередь, из (*25*) *при* $p=1/m$, $m\in\mathbb{N}$, *следует равенство*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(n\int\limits_0^{1/n}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}}=\frac{2^m}{(1-e^{-1})^{2m}}.$$

Список литературы

1. *Абилов В.А.*, *Абилова Ф.В.* Приближение функций суммами Фурье – Бесселя // Изв. вузов. Матем. 2001. № 8. С. 1-7.
2. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье – Бесселя // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 6. С. 917-927.
3. *Иванов В.И.*, *Чертова Д.В.*, *Лю Юнпин.* Точное неравенство Джексона в пространстве L_2 на отрезке $[-1,1]$ со степенным весом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 112-126.
4. *Владимров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976. 512 с.
5. *Pinkus A.* n-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer–Verlag. 1985. 292 p.
6. *Вакарчук С.Б*, *Швачко А.Ю.* О наилучшей аппроксимации в среднем алгебраическими полиномами с весом и точных значениях поперечников классов функций // Укр. матем. журн. 2013. Т. 65, № 12. С. 1604-1621.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 182–185

Задачи интерполяции с минимальным значением нормы оператора Лапласа на классах интерполируемых данных

С. И. Новиков

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук Уральского федерального университета им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

Аннотация. Работа посвящена исследованию задач интерполирования класса ограниченных в l_p-норме ($1 \leqslant p \leqslant \infty$) последовательностей функциями с минимальным значением L_p-нормы оператора Лапласа.

Прежде всего введем нужные обозначения и сформулируем постановку задачи.

Пусть $n \geqslant 2,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$. Для произвольной последовательности вещественных чисел $z = \{z_j\}_{j\in\mathbb{Z}^n}$ полагаем

$$\|z\|_{l_p(\mathbb{Z}^n)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}^n} |z_j|^p\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \sup\limits_{j\in\mathbb{Z}^n} |z_j|, & p = \infty \end{cases}$$

и определяем класс интерполируемых последовательностей следующим образом:

$$\mathfrak{M}_p \ = \ \{z :\ z = \{z_j\}_{j\in\mathbb{Z}^n},\ \|z\|_{l_p(\mathbb{Z}^n)} \leqslant 1\}\,.$$

Пусть $C^m(\mathbb{R}^n)$ — множество функций, определенных на $\mathbb{R}^n$, у которых существуют и непрерывны на $\mathbb{R}^n$ все производные до порядка m включительно, $C^0(\mathbb{R}^n) = C(\mathbb{R}^n)$ — множество непрерывных на $\mathbb{R}^n$ функций. Через $L_p(\mathbb{R}^n)$ обозначаем стандартное пространство Лебега функций, интегрируемых на $\mathbb{R}^n$ с p-й степенью при $1 \leqslant p < \infty$ и существенно ограниченных при $p = \infty$, снабженное нормой

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Далее через $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ обозначаем пространство бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^n$ функций, а через $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha u = \partial^{|\alpha|} u / \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}$ — производная порядка α, понимаемая в обобщенном смысле

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 14-01-00496а) и комплексной программы УрО РАН "Современные проблемы теории функций и приложения,

© С. И. Новиков, 2016

Соболева (слабая производная), т. е. $v = D^\alpha u$, если $\forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)D^\alpha\varphi(x)\,dx.$$

Как известно (см., например, [1]), функция f принадлежит пространству Соболева $W_p^l(\mathbb{R}^n)$, если $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = l$ существует производная $D^\alpha f$ в обобщенном смысле Соболева и норма

$$\|f\|_{p,l} = \|f\|_p + \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f\|_p$$

конечна. Всюду далее

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

— оператор Лапласа.

Класс функций, интерполирующих фиксированную последовательность $z \in \mathfrak{M}_p$ в точках с целочисленными координатами, определяем следующим образом:

$$Y_p(z) \;=\; \left\{u \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap W_p^2(\mathbb{R}^n) :\; u(j) = z_j \;\; \forall j \in \mathbb{Z}^n\right\}.$$

Целью настоящей работы является изучение величины

$$A_p(\mathbb{R}^n) \;=\; \sup_{z\in\mathfrak{M}_p}\; \inf_{u\in Y_p(z)}\; \|\Delta u\|_p, \tag{1}$$

которую можно интерпретировать как L_p-норму оператора Лапласа, примененного к "наилучшей" функции из класса $Y_p(z)$ при интерполировании "наихудшей" последовательности $z \in \mathfrak{M}_p$.

Для фиксированной последовательности $z \in \mathfrak{M}_p$ задача $\|\Delta u\|_p \longrightarrow \inf\limits_{u\in Y_p(z)}$ представляет собой вариант интерполяционной проблемы типа Фавара (см., например, [2], [3], [4]). Поэтому задачу нахождения величины (1) можно рассматривать как интерполяционную проблему типа Фавара для всего класса $\mathfrak{M}_p$ интерполируемых последовательностей.

Также заметим, что величина (1) близка постановкам задач экстремальной функциональной интерполяции [5], [6], однако в настоящей работе класс интерполируемых последовательностей определен несколько иначе, чем в этих и других работах, посвящённых задачам экстремальной функциональной интерполяции.

Для $p = \infty$ величина (1) ранее изучалась в работах автора [7], [8]. В частности, в [8] было доказано, что $2/9 \leqslant A_\infty(\mathbb{R}^2) \leqslant 36$.

В работе автора [9] установлено, что если $1 \leqslant p < n/2$, то $A_p(\mathbb{R}^n) = 0$. Сопоставление этого факта с теоремой вложения классов Соболева $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ в пространство $C(\mathbb{R}^n)$ показывает, что исследуемая величина равна нулю в тех случаях, когда пространство Соболева $W_p^2(\mathbb{R}^n)$ не вкладывается в пространство непрерывных функций. Поэтому при $p = 2$ нетривиальными с точки зрения величины $A_p(\mathbb{R}^n)$ являются только три размерности: $n = 2, 3, 4$.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. *Справедливы следующие неравенства:*

$$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{2}-1}}{\sqrt[4]{2}} \leqslant A_2(\mathbb{R}^2) \leqslant 12\sqrt{2}\,. \tag{2}$$

Доказательство. Оценка снизу была получена автором [9]. Для того, чтобы доказать оценку сверху, используем интерполяционный процесс, построенный на основе ZP-элемента. С помощью такого интерполяционного процесса в [8] была получена оценка сверху величины (2) при $p = \infty$, $n = 2$. ZP-элемент является представителем обширного семейства функций, называемых box-сплайнами [10]. Перечислим нужные нам свойства ZP-элемента (их доказательства можно найти, например, в [10], [11]):

1) $M_{ZP} \in C^1(\mathbb{R}^2)$;

2) носитель $M_{ZP}(x,y)$ представляет собой восьмиугольник, получающийся отрезанием углов квадрата $[-1,2]\times[0,3]$;

3) $M_{ZP}(x,y) > 0$ во всех внутренних точках её носителя;

4) $M_{ZP}(x,y)$ достигает максимума в единственной точке $(1/2; 3/2)$;

5) $M_{ZP}(x,y)$ является кусочно-квадратичной функцией по каждой из переменных.

Явный вид функции $M_{ZP}(x,y)$ представлен на рисунке её носителя в [11, p. 149], [8], где внутри каждого элемента разбиения носителя написано соответствующее выражение. Из явного вида ZP-элемента непосредственными вычислениями получаем

$$\|\Delta M_{ZP}\|_2 = 2\sqrt{2}\,. \tag{3}$$

Разбиваем $\mathbb{R}^2$ на квадраты V_j с центрами в точках $j=(j_1,j_2)\in\mathbb{Z}^2$ и сторонами, параллельными осям координат и равными единице. Для каждого $j\in\mathbb{Z}^2$ определяем функцию F_j, полагая $F_j(x,y) = c_j M_{ZP}(3x-3j_1+1/2, 3y-3j_2+3/2)$ на V_j и равной нулю вне V_j. Найдя константы c_j из интерполяционных условий $F_j(j_1,j_2)=z_j$, получаем $c_j = 2z_j$. Пусть

$$F(x,y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^2} F_j(x,y).$$

Заметим, что в каждой точке $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ сумма в правой части содержит не более одного отличного от нуля слагаемого. Нетрудно видеть, что $F\in Y_2(z)$ для любой последовательности $z\in\mathfrak{M}_2$. Теперь вычисляем L_2-норму функции ΔF.

$$\|\Delta F\|_2 = 2\left(\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\left|\sum_{j\in\mathbb{Z}^2} z_j\ \Delta M_{ZP}\left(3x-3j_1+\frac{1}{2}, 3y-3j_2+\frac{3}{2}\right)\right|^2 dx\ dy\right)^{1/2} =$$

$$= 2\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^2}|z_j|^2\ \iint\limits_{V_j}\left|\Delta M_{ZP}\left(3x-3j_1+\frac{1}{2}, 3y-3j_2+\frac{3}{2}\right)\right|^2 dx\ dy\right)^{1/2} =$$

$$= 6\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^2}|z_j|^2\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{-1}^{2}\int_{0}^{3}|\Delta M_{ZP}(u,v)|^2 du\ dv\right)^{1/2} = 6\ \|z\|_{l_\infty(\mathbb{Z}^2)}\ \|\Delta M_{ZP}\|_2 \leqslant 12\sqrt{2}\,.$$

Мы воспользовались тем, что внутренности носителей "соседних" функций F_j не пересекаются, в интеграле выполнили замену переменных $u = 3x-3j_1+1/2,\ v = 3y-3j_2+3/2$ и применили (3). Теорема доказана.

Приближённо оценка (2) записывается в виде $0.36576... \leqslant A_2(\mathbb{R}^2) \leqslant 16.97056...$, что в части оценки сверху несколько точнее соответствующего результата работы [9]. К сожалению, полученные в теореме оценки сверху и снизу оказываются достаточно далекими друг от друга и тем самым от точного значения величины $A_2(\mathbb{R}^2)$.

Список литературы

1. *Burenkov V.I.* Sobolev spaces on domains. Stuttgart: B. G. Teubner Verlag GmbH, 1998. 312 p. (Teubner Texts in Math. Vol. 137.)
2. *Favard J.* Sur l'interpolation // J. Math. Pures Appl. 1940. Vol. 19, № 9. P. 281–306.
3. *Fisher S., Jerome J.* Minimum norm extremals in function spaces // Lecture Notes in Math. 1975. Vol. 479. P. 1–209.
4. *Тихомиров В.М., Боянов Б.Д.* О некоторых выпуклых задачах теории приближений // Serdica. 1979. Vol. 5, № 1. P. 83–96.

5. *Субботин Ю.Н.* Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n-й производной // Труды МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 30–60.
6. *Новиков С.И.*, *Шевалдин В.Т.* Об одной задаче экстремальной интерполяции для функций многих переменных // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 144–159.
7. *Novikov S.I.* Interpolation in $\mathbb{R}^2$ with minimum value of the uniform norm of the Laplace operator // J. Math. and System Science. 2013. Vol. 3, № 2. P. 55–61.
8. *Новиков С.И.* Об оценках равномерной нормы оператора Лапласа наилучших интерполянтов на классе ограниченных интерполируемых данных // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 191–196.
9. *Новиков С.И.* Интерполяция функциями пространства Соболева с минимальной L_p-нормой оператора Лапласа // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 212–222.
10. *de Boor C.*, *Höllig K.*, *Riemenschneider S.* Box splines. New York etc.: Springer, 1993. 200 p.
11. *de Concini C.*, *Procesi C.* Topics in hyperplane arrangements, polytopes and box-splines. New York etc.: Springer, 2010. 384 p.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 186–190

Математическая модель защиты растений от вредителей в биосистеме трех трофических уровней с учетом возрастной структуры

Р. Н. Одинаев, М. К. Юнуси

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан

Аннотация. В настоящей работе исследуется нелинейная задача защиты растений с учётом возрастной структуры в биосистемы трех трофических уровней «растение» – «вредные насекомые» – «полезные насекомые». Для рассматриваемой здесь модели биосистемы сформулированы и обоснованы необходимые и достаточные условия существования решения задачи защиты растений от вредителей.

Рассмотрим некоторую модельную биосистему с учетом возрастного состава имеющую три трофического уровня типа «растение» – «вредные насекомые» – «полезные насекомые», в которой поступает внешний ресурс N_0 (удобрение или вода, используемая для полива, или солнечная энергия) со скоростью Q. Биомассы (или численности) соответствующих уровней в момент времени t обозначим через

$N_0 = N_0(t)$ – массу внешнего ресурса,

$N_1 = N_1(t)$ – биомассу растений сельхоз культуры,

$N_i = N_i(a,t)$ – численность вредных $(i = 2)$ и полезных $(i = 3)$ насекомых возраста a.

Предположим, что состояние модели биосистемы описывается при помощи следующей системы уравнений [1–5]:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_0}{dt} = Q + F_0(N_0, N_1), \\ \dfrac{dN_1}{dt} = N_1 F_1(N_0, N_1, \widetilde{N}_2), \\ \dfrac{\partial N_2}{\partial t} + \dfrac{\partial N_2}{\partial a} = N_2 F_2(N_1, N_2, \widetilde{N}_3), \quad N_2|_{t=0} = N_2^0(a), \\ \dfrac{\partial N_3}{\partial t} + \dfrac{\partial N_3}{\partial a} = N_3 F_3(N_2, N_3), \quad N_3|_{t=0} = N_3^0(a), \\ N_2(0,t) = \int\limits_0^\infty B_2(\xi, t, N_1) N_2(\xi, t) d\xi, \quad 0 < t < t_k, \quad 0 < a < \infty, \\ N_3(0,t) = \int\limits_0^\infty B_3(\xi, t, \widetilde{N}_2) N_3(\xi, t) d\xi, \end{cases} \tag{1}$$

где $F_i = F_i(\cdot)$ $(i = 0, 1, 2)$ — соответствующие удельные скорости роста биологических видов биосистем, причем

© Р. Н. Одинаев, М. К. Юнуси, 2016

$$\frac{\partial F_i}{\partial N_i} \leqslant 0, \quad \frac{\partial F_i}{\partial N_j} = \begin{cases} \leqslant 0, & i < j, \ i = \overline{0,3}, \\ \geqslant 0, & i > j, \ i = \overline{0,3}, \end{cases} \tag{2}$$

$B_2(\cdot)$, $B_3(\cdot)$ — коэффициенты рождаемости вредных и полезных насекомых; $\widetilde{N}_i = \widetilde{N}_i(t)$ $(i = 2,3)$ – суммарные численности соответственного вредных и полезных насекомых, причем сумма берется по тем возрастам, которые вредят сельхоз-культуре и уничтожают вредителей, t – время, $t \in [0, t_k]$, $t_k = \mathrm{const} < \infty$, a – возраст, $a \in [0, \infty)$. Предположим, что $F_i(\cdot)$ удовлетворяют условию (2) и $B_i(\cdot) \geqslant 0$, $i = 2,3$;

$$\widetilde{N}_i = \widetilde{N}_i(t) = \int\limits_{\alpha_i}^{\beta_i} N_i(a,t)da, \quad 0 < \alpha_i < \beta_i < \infty, \ i = 2,3.$$

Определение 1. *Средней биомассой растения (или средним урожаем) в момент времени t_k назовем величину*

$$\widetilde{N}_1(t_k) = \frac{1}{t_k}\int\limits_0^{t_k} N_1(t)dt. \tag{3}$$

Следуя работе [1], введем ряд определений и сформулируем подготовительную задачу защиты растений в терминах точечного моделирования биосистемы (1).

Пусть $N_1^p \in [N_1^{\min}, N_1^{\max}]$, заданный уровень биомассы сельхоз культуры, не менее которого должна стать ее средняя биомасса, т. е.

$$\lim_{t_k \to \infty} \widetilde{N}_1(t_k) \geqslant N_1^p, \quad N_1^p \in [N_1^{\min}, N_1^{\max}], \tag{4}$$

где

$$N_1^{\min} = \frac{m_2}{k_1\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_1 t_k}\max_a \frac{\ln N_2(a,t_k)}{N_2(a,0)},$$

$$N_1^{\max} = \frac{k_0 Q}{m_1 + \dfrac{\alpha_1}{t_k}\cdot\dfrac{\ln N_1(t_k)}{N_1(0)}}.$$

Рассмотрим неравенства

$$\lim_{t_k \to \infty} \widetilde{N}_2(t_k) \leqslant N_2^p, \quad \lim_{t_k \to \infty} \widetilde{N}_3(t_k) \geqslant N_3^p, \tag{5}$$

где $N_2^p \geqslant 0$, $N_3^p \geqslant 0$ — неизвестные параметры, которые подлежат определению.

Определение 2. *Величину N_2^p назовем порогом вредоносности вредных насекомых, а N_3^p – уровнем эффективности полезных насекомых (энтомофаги).*

Определение 3. *Задачу нахождения параметров N_2^p, N_3^p из соотношений (4) и (5), при заданном планируемом уровне $N_1^p \in [N_1^{\min}, N_1^{\max}]$, назовем подготовительной задачей защиты растений модельных биосистем (1).*

Определение 4. *Скажем, что подготовительная задача защиты растений имеет решение, если при некотором заданном $N_1^p \in [N_1^{\min}, N_1^{\max}]$ имеют место условия (4) и (5).*

Для предложенной методики рассмотрим случай когда функции $F_i(\cdot)$ – определяются по следующим формулам:

$$\begin{cases} F_0(\cdot) = -\alpha_0 N_0 N_1, \\ F_1(\cdot) = k_0\alpha_0 N_0 - \alpha_1 N_2 - m_1, \\ F_2(\cdot) = k_1\alpha_1 N_1 - \alpha_2 N_3 - m_2, \\ F_3(\cdot) = k_2\alpha_2 N_2 - \varepsilon N_3 - m_3, \end{cases} \tag{6}$$

т. е. взаимодействия между видами биосистемы происходят по закону Вольтерра [6], что можно считать справедливым в случае «напряженности» трофических связей. Это означает, что пища для вредителей имеется в изобилии, полезные насекомые питаются только вредителями. Прирост численности вредителей за малый промежуток времени пропорционален произведению биомассы сельхоз-культуры на количество вредителей, прирост полезных насекомых также пропорционален произведению количества полезных насекомых на количество вредителей, а естественные смертности насекомых пропорциональны их численности. В удельной скорости роста обозначены: m_i – усредненные коэффициенты естественной смертности, k_i $(i = 1, 2, 3)$ – доли потребленных биомасс, идущие на репродуктивный обмен и рост; α_i $(i = 0, 1, 2)$ – коэффициенты трофических функций, ε – коэффициент самолимитирования популяции полезных насекомых.

Сформулируем необходимые и достаточные условия существования решения задачи защиты растений.

Теорема 1. *Для того, чтобы имело место соотношение*

$$\lim_{t_k\to\infty} \widetilde{N}_1(t_k) = \frac{1}{t_k}\int\limits_0^{t_k} N_1(t)dt \geqslant N_1^p, \quad N_1^p \in [N_1^{\min}, N_1^{\max}],$$

необходимо и достаточно, чтобы при $t_k \to \infty$ выполнялись неравенства

$$\begin{cases} N_0(t) \leqslant \dfrac{Q}{\alpha_0 N_1^p}, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_k, \\ \lim\limits_{t_k\to\infty} \widetilde{N}_2(t_k) = \dfrac{1}{t_k}\displaystyle\int\limits_0^{t_k} \widetilde{N}_2(t)dt \leqslant N_2^p, \\ \lim\limits_{t_k\to\infty} \widetilde{N}_3(t_k) = \dfrac{1}{t_k}\displaystyle\int\limits_0^{t_k} \widetilde{N}_3(t)dt \geqslant N_3^p, \end{cases} \tag{7}$$

где величины N_2^p, N_3^p – определяются по формулам:

$$N_2^p = \frac{k_0 Q}{\alpha_1 N_1^p} - \frac{m_1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_1 t_k}\cdot\frac{\ln N_1(t_k)}{N_1(0)},$$

$$N_3^p = \frac{k_2\alpha_1}{\alpha_2} N_1^p - \frac{m_2}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_2 t_k}\cdot\max_a \frac{\ln N_2(a, t_k)}{N_2(a, 0)}.$$

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть выполняется условие

$$\lim_{t_k\to\infty} \widetilde{N}_1(t_k) \geqslant N_1^p.$$

Покажем справедливость (7). В силу первого уравнения системы (1) имеем

$$\frac{dN_0}{dt} = Q + F_0(N_0, N_1),$$

$$N_0(t) \leqslant N_0\, exp\left\{ -\alpha_0 \int\limits_0^t N_1(\tau)d\tau \right\} + Q \int\limits_0^t exp\left\{ -\alpha_0 \int\limits_\tau^t N_1(\xi)d\xi \right\} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \left[N_0(0) - \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p} \right] \exp\Big\{ -\alpha_0 N_1^p t \Big\} + \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}.$$

Следовательно, $N_0(t) \leqslant \dfrac{Q}{\alpha_0 N_1^p}$, $0 \leqslant t \leqslant t_k$ $\left(N_0(0) = \dfrac{Q}{\alpha_0 N_1^p} \right)$.

Из второго уравнения системы (1) находим:

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1(-m_1 + k_0\alpha_0 N_0 - \alpha_1 \widetilde{N}_2),$$

$$\frac{d}{dt} \ln N_1 = -m_1 + k_0\alpha_0 N_0 - \alpha_1 \widetilde{N}_2,$$

$$\alpha_1 \widetilde{N}_2 = -m_1 + k_0\alpha_0 N_0 - \frac{d}{dt} \ln N_1, \quad \left(N_0(0) = \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p} \right),$$

$$\widetilde{N}_2 \leqslant \frac{k_0 Q}{\alpha_1 N_1^p} - \frac{m_1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{d}{dt} \ln N_1.$$

Интегрируя последнее неравенство по t от 0 до t_k, получим

$$\frac{1}{t_k} \int\limits_0^{t_k} \widetilde{N}_2(t)dt \leqslant \frac{k_0 Q}{\alpha_1 N_1^p} - \frac{m_1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_1 t_k} \ln \frac{N_1(t_k)}{N_1(0)}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $t_k \to \infty$, получим

$$\lim_{t_k \to \infty} \widetilde{N}_2(t_k) \leqslant N_2^p.$$

Теперь воспользуемся третьим уравнением системы (1):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} \right) N_2 = N_1\big(-m_2 + k_1\alpha_1 N_1 - \alpha_2 \widetilde{N}_3 \big).$$

Введем замену переменных

$$a = t + \tau, \quad \varphi(t, \tau) = N_2(t + \tau, t)$$

и, учитывая условие $\dfrac{da}{dt} = 1$, заключаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial N_2}{\partial t} + \frac{\partial N_2}{\partial a}.$$

Откуда

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \varphi = -m_2 + k_1\alpha_1 N_1 - \alpha_2 \widetilde{N}_3,$$

или

$$\widetilde{N}_3 = \frac{k_1\alpha_1}{\alpha_2} N_1 - \frac{m_2}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial t} \ln \varphi.$$

Интегрируя последнее уравнение по t от 0 до t_k, находим

$$\frac{1}{t_k} \int\limits_0^{t_k} \widetilde{N}_3(t)dt = \frac{k_1\alpha_1}{\alpha_2} \widetilde{N}_1(t_k) - \frac{m_2}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_2 t_k} \ln \frac{N_2(a - t_k, t_k)}{N_2(a - t_k)}.$$

Здесь, переходя к пределу при $t_k \to \infty$, получим

$$\lim_{t_k\to\infty} \widetilde{N}_3(t_k) \geqslant N_3^p.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть имеет место условие (7), покажем, что

$$\lim_{t_k\to\infty} \widetilde{N}_1(t_k) \geqslant N_1^p, \quad N_1^p \in [N_1^{\min}, N_1^{\max}].$$

Из первого уравнения системы (1) имеем

$$N_0(t) \leqslant N_0(0) + Qt - \alpha_0 \int\limits_0^t N_0(t)N_1(t)dt.$$

Отсюда

$$\frac{1}{t_k}\int\limits_0^{t_k} \widetilde{N}_1(t)dt - N_1^p \geqslant \frac{\left[N_0(0) - \dfrac{Q}{\alpha_0 N_1^p}\right] N_1^p}{Qt_k}, \quad \left(N_0(0) - \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}\right)$$

и следовательно

$$\lim_{t_k\to\infty} \widetilde{N}_1(t_k) \geqslant N_1^p.$$

Замечание. Пусть $t_k \to \infty$, тогда

$$\lim_{t_k\to\infty} \widetilde{N}_1(t_k) = \frac{1}{t_k}\int\limits_0^{t_k} N_1(t)dt \geqslant N_1^p, \quad N_1^p \in [N_1^{\min}, N_1^{\max}],$$

$$N_2^p \leqslant \frac{k_0\alpha_1}{\alpha_2 N_1^p} - \frac{m_1}{\alpha_1}, \quad N_3^p \geqslant \frac{k_1\alpha_1}{\alpha_2} N_1^p - \frac{m_2}{\alpha_2},$$

т. е. решение подготовительной задачи защиты стремится к решению стационарной задачи защиты растений.

Список литературы

1. *Юнусов М.К.* Математические модели борьбы с вредителями агроценозов. — Душанбе: Дониш. 1991. 146 с.
2. *Одинаев Р.Н.* Исследование точечной математической модели защиты растений с произвольными трофическими функциями // ДАН Республики Таджикистан. 1996. Т. 39, № 9-10. С. 113-119.
3. *Юнусов М.К.*, *Одинаев Р.Н.* Математические модели защиты сельскохозяйственного урожая // Вестник Таджикского государственного университета. 1996. № 1. С. 33-38.
4. *Юнусов М.К.*, *Одинаев Р.Н.* Исследование системы типа «Полезные насекомые вредные насекомые» с учетом возрастного состава и пространственного распределения // Вестник Таджикского технического университета. 2012. Сер. 1, № 7. С. 26-32.
5. *Одинаев Р.Н.* Исследование математической модели задачи защиты растений в стационарном случае // Вестник Таджикского национального университета. 2013. Сер. 1. № 3. С. 7-11.
6. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука. 1976. 286 с.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 191–194

Точные неравенства Джексона – Стечкина в терминах обобщённых модулей непрерывности

Н. Ф. Олифтаев

Таджикский государственный университет коммерции, Душанбе, Таджикистан

Аннотация. Установлены точные неравенства типа Джексона – Стечкина в терминах τ-модулей гладкости, введённых К. Г. Ивановым.

1. Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ — множество положительных чисел вещественной оси; $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ — пространство 2π-периодических измеримых функций, суммируемых с квадратом на $[0, 2\pi]$ с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Хорошо известно, что если $f \in L_2$ и

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

— формальное разложение f в ряд Фурье, то величина

$$E_{n-1}(f)_2 = \inf\Big\{\|f - T_{n-1}\| : \ T_{n-1} \in \mathbb{T}_{2n-1}\Big\}$$

её наилучшего приближения подпространством $\mathbb{T}_{2n-1}$ тригонометрических полиномов порядка не более $n-1$ в метрике пространства L_2 удовлетворяет равенствам

$$E_{n-1}(f)_2 = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\right)^{1/2},$$

в которых

$$S_{n-1}(f; x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

— частная сумма порядка $\leqslant n-1$ ряда Фурье функции f, а

$$\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f), \quad k \geqslant n, \ k, n \in \mathbb{N}.$$

Положим $L_2^{(0)} = L_2$, а при $r \in \mathbb{N}$ обозначим через $L_2^{(r)}$ множество функций $f \in L_2$, у которых $(r-1)$-я производная $f^{(r-1)}$ $(f^{(0)} = f)$ абсолютно непрерывна, а r-я производная $f^{(r)} \in L_2$. Модулем непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$ называют следующую функцию переменного $t \geqslant 0$:

$$\omega_m(f; t)_2 = \sup\Big\{\, \|\triangle_h^m f\| : \ |h| \leqslant t \,\Big\},$$

© Н. Ф. Олифтаев, 2016

где

$$\triangle_h^m f(x) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} f(x+ih)$$

— конечная разность m-го порядка функции f с шагом h.

Под неравенствами типа Джексона – Стечкина в рассматриваемом нормированном функциональном пространстве X понимают соотношения, в которых величина наилучшего приближения функции $f \in X$

$$E_N(f)_X := E(f, \mathfrak{N}_N)_X = \inf\Big\{ \|f-g\|_X : \ g \in \mathfrak{N}_N \Big\}$$

заданным N-мерным подпространством $\mathfrak{N}_N \subset X$, оценивается через модуль непрерывности самой функции или некоторой её производной. При решении экстремальных задач теории аппроксимации периодических функций тригонометрическими полиномами в пространстве L_2 одним из наиболее важных является отыскание точных констант

$$\chi_{m,n,r}(t) := \sup \left\{ \frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\omega_m(f^{(r)}; t/n)_2} : \ f \in L_2^{(r)}; \ f^{(r)} \neq const \right\},$$

в неравенствах типа Джексона – Стечкина

$$E_{n-1}(f)_2 \leqslant \chi\, n^{-r} \omega_m(f^{(r)}; t/n)_2, \quad f \in L_2^{(r)}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad t > 0.$$

В работах [1, 2] Камен Г. Иванов ввёл в рассмотрение τ-модули гладкости и изучил их свойства, а С.Б.Вакарчук [3] решил ряд экстремальных задач, а также нашёл точные значения различных n-поперечников для некоторых классов дифференцируемых функций в L_2. Пользуясь схемой рассуждения, изложенной в [4, 5], здесь получены более полные результаты в этом направлении.

Пусть $\lambda(x)$ — произвольная положительная 2π-периодическая функция, а $w(x)$ — непрерывная неотрицательная функция периода 2π. Для функции $f \in L_{\max(p,p')}[0, 2\pi]$ $(p, p' \geqslant 1)$ её τ-модулем гладкости m-го порядка называют величину

$$\tau_m(f, w; \lambda)_{p,p'} = \left\| w(\cdot)\omega_m(f, \cdot; \lambda(\cdot))_{p'} \right\|_p,$$

где

$$\omega_m(f, x; \lambda(x))_{p'} = \left\{ \frac{1}{2\lambda(x)} \int\limits_{-\lambda(x)}^{\lambda(x)} |\Delta_h^m f(x)|^{p'}\, dh \right\}^{1/p'}.$$

Условимся, что если $w(x) \equiv 1$, то вместо $\tau_m(f, 1; \lambda)_{p,p'}$ будем писать просто $\tau_m(f; \lambda)_{p,p'}$. В [2] доказано, что если, например, $\lambda(x) \equiv u = const > 0$, $f \in L_p[0, 2\pi]$, $w(x) \equiv 1$ и $p' \in [0, p]$, $1 \leqslant p < \infty$, то

$$\tau_m(f; u)_{p,p'} \asymp \omega_m(f; u)_p,$$

где символ „$\asymp$“ означает соотношение слабой эквивалентности.

Всюду в дальнейшем функцию φ будем называть весовой функцией на отрезке $[0, h]$, если φ является неотрицательной измеримой суммируемой на $[0, h]$ не эквивалентной нулю функцией. Определённый интерес представляет отыскание точного значения величины

$$\widetilde{\mathscr{X}}_{n,m,r,q}(\varphi; h)_{p'} = \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq const}} \frac{2^{m/2} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_m^q(f^{(r)}; t)_{p',2}\, \varphi(t) dt \right)^{1/q}}, \tag{1}$$

где $1 \leqslant p' \leqslant 2$, $0 < q \leqslant 2$, $h > 0$ и φ – весовая функция.

Следуя работе [3], введём обозначение

$$\mathcal{J}_m(v) = \int\limits_0^v (1-\cos\tau)^m d\tau.$$

Теорема 1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < q \leqslant 2$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < h \leqslant \pi/n$, φ *– весовая функция на* $[0, h]$. *Тогда имеют место неравенства*

$$\frac{1}{\beta_{n,m,r,q}(\varphi; h)} \leqslant \widetilde{\mathcal{X}}_{n,m,r,q}(\varphi; h)_2 \leqslant \frac{1}{\inf\limits_{n\leqslant k<\infty} \beta_{k,m,r,q}(\varphi; h)},$$

$$\beta_{k,m,r,q}(\varphi; h) := \left(k^{rq} \int\limits_0^h \Big((kt)^{-1}\mathcal{J}_m(kt)\Big)^{q/2} \varphi(t)dt\right)^{1/q}.$$

Следствие 1. *Пусть* $k, n, m \in \mathbb{N}$, $k \geqslant n$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < q \leqslant 2$, $0 < h \leqslant \pi/n$, φ *– весовая функция на* $[0, h]$. *Тогда, если*

$$\inf \Big\{\beta_{k,m,r,q}(\varphi; h): \ k \geqslant n\Big\} = \beta_{n,m,r,q}(\varphi; h),$$

то имеет место соотношение

$$\widetilde{\mathcal{X}}_{n,m,r,q}(\varphi; h)_2 = \Big\{\beta_{n,m,r,q}(\varphi; h)\Big\}^{-1}. \tag{2}$$

В частности, (2) *выполняется для весовой функции*

$$\varphi(t) = (kt)^{q/2}, \ n \leqslant k < \infty, \ k, n \in \mathbb{N} \ \ \textit{при} \ \ 1/r < q \leqslant 2, \ r \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2. *Пусть* $m = 1$, $n, r \in \mathbb{N}$, $1/r < q \leqslant 2$, $0 < h \leqslant 3\pi/(4n)$, φ *– весовая функция на отрезке* $[0, h]$. *Тогда имеет место равенство*

$$\widetilde{\mathcal{X}}_{n,1,r,q}(\varphi; h)_2 = \left(n^{rq} \int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2} \varphi(t)dt\right)^{-1/q}. \tag{3}$$

Согласно определению (1), равенство (3) перепишем в эквивалентном виде

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{\sqrt{2}\; n^r E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_1^q(f^{(r)}; t)_{2,2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/q}} = \left(\int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2} \varphi(t)dt\right)^{-1/q}.$$

Хорошо известно, что для функции $f \in L_2^{(r)}$ её промежуточные производные $f^{(r-s)}$ $(s = 1, 2, \ldots, r-1)$ принадлежат пространству L_2. Представляет интерес отыскание точных верхних граней величины $E_{n-1}(f^{(r-s)})_2$ на классе $L_2^{(r)}$. Подобная задача решалась в работе [6], когда гладкостная характеристика функций $f \in L_2^{(r)}$ задавалась специальным модулем непрерывности m-го порядка.

Теорема 3. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$; $s = \overline{0, r-1}$; $1/r < q \leqslant 2$; $0 < h \leqslant 3\pi/(4n)$; φ *– весовая функция на отрезке* $[0, h]$. *Тогда*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{\sqrt{2}\; n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_1^q(f^{(r)}; t)_{2,2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/q}} = \left(\int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2} \varphi(t)dt\right)^{-1/q};$$

в частности, если $q = 2$ *и* $\varphi(t) \equiv 1$, *или* $\varphi(t) \equiv t$, *то соответственно*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq const}} \frac{n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_1^2(f^{(r)}; t)_{2,2} dt\right)^{1/2}} = \left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\}^{1/2},$$

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq const}} \frac{n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h t\tau_1^2(f^{(r)}; t)_{2,2} dt\right)^{1/2}} = \frac{1}{h\sqrt{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2}},$$

где $Si(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ *– интегральный синус.*

Список литературы

1. *Ivanov Kamen G.* On a new characteristic of functions. **I** // Сердика Бълг. Мат. Списание. 1982. Т. 8, № 3. С. 262–279.
2. *Ivanov Kamen G.* On a new characteristic of functions. **II** // Direct and converse theorems for the best algebraic approximation in $C[-1;1]$ and $L_p[-1;1]$. Сердика Бълг. Мат. Студ. 1983. Т. 5. С. 151-163.
3. *Вакарчук С.Б.* О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точных значениях их n-поперечников // Мат. заметки. 2001. Т. 70, № 3. С. 334-345.
4. *Шабозов М.Ш.*, *Юсупов Г.А.* Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. 2011. Т. 90, № 5. С. 764-775.
5. *Шабозов М.Ш.* Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. 2010. Т.87, № 4. С. 616-623.
6. *Вакарчук С.Б.*, *Забутная В.И.* Неравенства типа Джексона – Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 4. С. 497-514.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 195–198

Значение поперечников некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве L_2

К. К. Палавонов

Таджикский государственный университет коммерции, Душанбе, Таджикистан

Аннотация. В работе найдены точные значения различных n-поперечников для классов дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0,2\pi]$, удовлетворяющих ограничению

$$\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\,\omega_m^p(f^{(r)};t)dt\right)^{2/p} \leqslant \Phi(h),$$

где $0<h<\infty$, $2/r<p\leqslant 2$, $r-1\in\mathbb{N}$, $\omega_m(f^{(r)};t)$ – модуль непрерывности порядка m производной $f^{(r)}\in L_2[0,2\pi]$, $\Phi(u)$ – произвольная непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0)=0$.

1. Обозначим через L_2 пространство 2π-периодических суммируемых по Лебегу действительных функций f с конечной нормой

$$\|f\| \overset{def}{=} \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}<\infty.$$

Пусть

$$\mathscr{T}_{2n-1}=\left\{T:\,T(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx\right),\ \alpha_k,\beta_k\in\mathbb{R}\right\}$$

— подпространство тригонометрических полиномов порядка $\leqslant n-1$. Хорошо известно, что для произвольной функции $f\in L_2$, имеющей формальное разложение в ряд Фурье

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right),$$

величина

$$E_{n-1}(f)\overset{def}{=}\inf\left\{\|f-T\|:\,T\in\mathscr{T}_{2n-1}\right\}$$

её наилучшего приближения в метрике L_2 подпространством $\mathscr{T}_{2n-1}$, удовлетворяет равенствам

$$E_{n-1}(f)=\|f-S_{n-1}(f)\|=\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\right\}^{1/2}, \tag{1}$$

где

$$S_{n-1}(f;x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$$

© К. К. Палавонов, 2016

– частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f, а $\rho_k^2 \stackrel{def}{=} a_k^2 + b_k^2$. Через $L_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$ обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а $f^{(r)} \in L_2$. Как обычно,

$$\omega_m(f;t) \stackrel{def}{=} \sup\{\|\Delta_h^m(f)\| : \ |h| \leqslant t\}$$

означает модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$, где

$$\|\Delta_h^m(f)\| = \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f(x+(m-k)h) \right|^2 dx \right\}^{1/2}$$

— норма конечной разности m-го порядка функции $f \in L_2$ с шагом h.

Всюду далее, структурные свойства функции $f \in L_2$ характеризуем скоростью стремления к нулю модуля непрерывности m-го порядка r-ой производной $f^{(r)}$, задавая эту скорость посредством мажоранты некоторой усреднённой величины $\omega_m(f^{(r)};t)$.

Среди экстремальных задач теории приближений одной из наиболее важных является задача вычисления точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина

$$E_{n-1}(f) \leqslant \chi\, n^{-r} \omega_m(f^{(r)};t), \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad t > 0,$$

где χ – некоторая константа, не зависящая ни от f, ни от n, но зависящая от m и r. Эту задачу в разное время исследовали многие математики (см., например, [1–12] и приведенную там литературу).

Н.И.Черных [2] отметил, что для оценки величины $E_{n-1}(f)$ более естественно использовать не джексоновский функционал $\omega_m(f^{(r)};h)$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < h \leqslant \pi/n$, а его средневзвешанное значение на отрезке $[0,h]$ с неотрицательным ненулевым весом $\varphi(t)$, т. е. функционал

$$\Phi_m(f^{(r)};h) = \left\{ \int\limits_0^h \omega_m^2(f^{(r)};t)\varphi(t)dt \Big/ \int\limits_0^h \varphi(t)dt \right\}^{1/2}.$$

Очевидно, что при любом $h \in (0,\pi/n]$, $\Phi_m(f^{(r)};h) \leqslant \omega_m(f^{(r)};h)$. Учитывая эти соображения, введём в рассмотрение экстремальную аппроксимационную характеристику следующего вида:

$$\chi_{m,n,r,p}(h) = \sup \left\{ \frac{2^m n^r E_{n-1}(f)}{\left(\dfrac{2}{h^2} \displaystyle\int\limits_0^h t\, \omega_m^p(f^{(r)};t)dt \right)^{1/p}} : \ f \in L_2^{(r)};\ f \neq const \right\}, \tag{2}$$

где $m,n,r \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}_+$, $0 < h \leqslant \pi/n$.

Величина вида (2) в частном случае при $p = 2/m, m \in \mathbb{N}$ и весовой функции $\varphi_*(t) = (t - h)$, $0 \leqslant t \leqslant h$ подробно изучена в работе [12], где доказано, что в этом случае для любых $m,n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и любых чисел h, удовлетворяющих условию $0 < h \leqslant \pi/n$, справедливы равенства

$$\chi_{m,n,r,2/m}(h) = h^{-m} \left\{ 1 - \left(\frac{2\sin(nh/2)}{nh} \right)^2 \right\}^{-m/2}.$$

Целью данной статьи является отыскание точного значения экстремальной величины (2) и использование полученного результата для вычисления точных значений различных n-поперечников. Имеет место следующая

Теорема 1. *Для произвольных* $m,n,r\in\mathbb{N}$ $(r\geqslant 2)$, $2/r<p\leqslant 2$, $0<h\leqslant \pi/n$ *справедливо равенство*

$$\chi_{m,n,r,p}(h)=\left\{\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}dt\right\}^{-1/p}. \tag{3}$$

2. Через $b_n(\mathfrak{M},H_2)$, $d^n(\mathfrak{M},H_2)$, $d_n(\mathfrak{M},H_2)$, $\delta_n(\mathfrak{M},H_2)$, $\Pi_n(\mathfrak{M},H_2)$ обозначим соответственно бернштейновский, гельфандовский, колмогоровский, линейный и проекционный n-поперечники выпуклого центрально-симметричного подмножество $\mathfrak{M}$ из пространство L_2. Положим

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})=\sup\Big\{E_{n-1}(f):\ f\in\mathfrak{M}\Big\}.$$

Всюду далее через $W^{(r)}_{m,p,h}$ обозначим класс функций $f\in L_2^{(r)}$, которые для любых $m,r\in\mathbb{N}$ $(r\geqslant 2)$, $2/r<p\leqslant 2$, и заданного $h\in(0,\pi/n]$ удовлетворяют ограничению

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\,\omega_m^p(f^{(r)},t)dt\leqslant 1,$$

а через $W^{(r)}_{m,p}(\Phi)$ обозначим аналогичный класс функций $f\in L_2^{(r)}$, которые для тех же значений указанных параметров удовлетворяют условию

$$\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\,\omega_m^p(f^{(r)},t)dt\right)^{1/p}\leqslant\Phi(h),\quad h\in(0,\pi/n],$$

здесь $\Phi(u)$, $u\geqslant 0$ – произвольная непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0)=0$. Положим также

$$(\sin t)_*=\{\sin t,\ \text{если}\ \ 0\leqslant t\leqslant\pi/2;\ 1,\ \text{если}\ \ t>\pi/2\}.$$

Поставим целью вычислить точные значения вышеуказанных n-поперечников для сформулированных классов функций в пространстве L_2.

Теорема 2. *Пусть* $m,n,r\in\mathbb{N}$ $(r\geqslant 2)$, $2/r<p\leqslant 2$ *и число* $h>0$ *удовлетворяет условию* $0<nh\leqslant\pi$. *Тогда справедливы равенства*

$$\gamma_{2n-1}\left(W^{(r)}_{m,p,h};L_2\right)=\gamma_{2n}\left(W^{(r)}_{m,p,h};L_2\right)=E_{n-1}\left(W^{(r)}_{m,p,h}\right)=2^{-m}n^{-r}\left\{\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}dt\right\}^{-1/p},$$

где $\gamma_n(\cdot)$ *– любой из вышеперечисленных* n*-поперечников.*

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда при всех* $r\geqslant m$, $r,m\in\mathbb{N}$ *имеют место равенства*

$$\begin{gathered}\gamma_{2n-1}\left(W^{(r)}_{m,2/m,h};L_2\right)=\gamma_{2n}\left(W^{(r)}_{m,2/m,h};L_2\right)=E_{n-1}\left(W^{(r)}_{m,2/m,h};L_2\right)=\\ =2^{-m}n^{-r}\left\{1-\frac{\sin nh}{nh}-\frac12\left[1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right]\right\}^{-m/2},\end{gathered} \tag{14}$$

где $\gamma_n(\cdot)$ *– любой из перечисленных выше* n*-поперечников.*

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы* 2 *для любого* $n\in\mathbb{N}$ *выполняется равенство*

$$\sup\Big\{|a_n(f)|,\,|b_n(f)|:\ f\in W^{(r)}_{m,p,h}\Big\}=2^{-m}n^{-r}\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}, \tag{15}$$

где $a_n(f)$ *и* $b_n(f)$ *соответственно косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции* $f\in L_2$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 3. *Если для всех* $\mu > 0$, $m, r \in \mathbb{N}$ $(r \geqslant 2)$, $2/r < p \leqslant 2$, *мажоранта* Φ *для любого* $u \in \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(\mu u)}{\Phi^p(u)} \geqslant \frac{1}{\mu^2} \int\limits_0^{\mu\pi/2} t\,(\sin t)_*^{mp}\,dt \left(\int\limits_0^{\pi/2} t\,(\sin t)^{mp}\,dt\right)^{-1}, \tag{18}$$

то для любого $n \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\gamma_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi); L_2\right) = \gamma_{2n}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi); L_2\right) = E_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-(m+3/p)} n^{-r} \left(\frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^{\pi/2} t(\sin t)^{mp} dt\right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{19}$$

Множество мажорант $\{\Phi\}$, *удовлетворяющих условию* (18), *не пусто*; *в частности, оно содержит функцию* $\Phi_*(h) = h^{\alpha/p}$, *где*

$$\alpha = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\int\limits_0^{\pi/2} t\ (\sin t)^{mp}\,dt\right)^{-1} - 2, \quad (0 < \alpha < mp).$$

Следствие 3. *При любых* $m, n, r \in \mathbb{N}$ $(r \geqslant 2)$, $2/r < p \leqslant 2$ *справедливы равенства*

$$\gamma_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi_*); L_2\right) = \gamma_{2n}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi_*); L_2\right) = E_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi_*)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-(m+3/p)} \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^{1/p} \pi^{\alpha/p}\, n^{-r-\alpha/p},$$

где $\gamma_n(\cdot)$ – *любой из вышеперечисленных* n*-поперечников.*

Список литературы

1. *Черных Н.И.* О неравенстве Джексона в L_2 // Приближение функций в среднем. Сборник работ. Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 71-74.
2. *Черных Н.И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1967. Т. 2, № 5. С. 513-522.
3. *Бердышев В.И.* О теореме Джексона в L_p // Труды МИАН СССР. Т. 88. С. 3-16.
4. *Тайков Л.В.* Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. 1976. Т. 20, № 3. С. 433-438.
5. *Тайков Л.В.* Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Матем. заметки. 1979. Т. 25, № 2. С. 217-223.
6. *Бабенко А.Г.* О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки. 1986. Т. 39. № 5. С. 651-664.
7. *Иванов В.И.*, *Смирнов О.И.* Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. ТулГУ. Тула. 1995. 192 с.
8. *Вакарчук С.Б.*, *Щитов А.Н.* Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций // Укр. матем. журнал. 2004. Т. 56, № 11. С. 1458-1466.
9. *Вакарчук С.Б.* Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. 2006. Т. 80, № 1. С. 11-19.
10. *Шабозов М.Ш.* Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 616-623.
11. *Шабозов М.Ш.*, *Юсупов Г.А.* Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. 2011. Т. 90, № 5. С. 764-775.
12. *Шабозов М.Ш.*, *Вакарчук С.Б.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematica. 2012. Т. 38, № 2. С. 154-165.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 199–202

Наилучшее приближение классов аналитических функций в пространстве Харди $\boldsymbol{H_p}$

Х. Х. Пиров[1], М. М. Миркалонова[2]

[1] *Дангаринский государственный университет, Дангара, Таджикистан*
[2] *Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан*

Аннотация. В работе доказаны точные неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями аналитических в круге функций и модулями непрерывности граничных значений производных функций в пространстве Харди H_p.

В настоящее время вопросам наилучшего полиномиального приближения аналитических в круге функций и вычисления точных значений различных поперечников классов аналитических функций посвящено достаточно много работ, где уже получен целый ряд окончательных результатов. Первые точные результаты по наилучшим полиномиальным приближениям аналитических в круге функций принадлежат К.И.Бабенко [1] и Л.В.Тайкову [2–4]. Именно работа К.И.Бабенко [1] явилась отправным пунктом для получения точных значений колмогоровских поперечников в работах В.М.Тихомирова [5] и Л.В.Тайкова [2]. В последующих работах Л.В.Тайкова [3, 4] и в совместной статье Н.Айнуллоева и Л.В.Тайкова [6] в норме пространства Харди были получены точные значения поперечников в смысле Колмогорова некоторых классов аналитических в единичном круге функций, граничные значения которых допускают представление в виде свертки, либо усреднённый модуль гладкости их граничных значений мажорируется заданной функцией. В дальнейшем эта тематика нашла своё отражение в работах М.З.Двейрина и И.В.Чебаненко [7], А.Пинкуса [8], С.Б.Вакарчука [9], М.Ш.Шабозова и О.Ш.Шабозова [10], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [11] и других математиков.

Целью данной работы является дальнейшее развитие этой тематики, связанной с минимизацией точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина между наилучшими полиномиальными приближениями аналитических в круге функций и модулями непрерывности высших порядков граничных значений производных этих функций. Напомним, что аналитическая в единичном круге $|z|<1$ функция

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k,\quad z=\rho e^{it},\quad 0\leqslant\rho<1,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$$

принадлежит банахову пространству Харди $H_p,\ 1\leqslant p\leqslant\infty$, если

$$\|f\|_p:=\|f\|_{H_p}=\lim_{\rho\to1-0}M_p(f,\,\rho)<\infty,$$

$$M_p(f,\,\rho)=\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(\rho e^{it})|^p\,dt\right)^{1/p},\ 1\leqslant p<\infty,$$

$$\|f\|_\infty:=\|f\|_{H_\infty}=\max\Big\{\,|f(z)|:\ |z|\leqslant 1\Big\},\ \ p=\infty$$

© Х. Х. Пиров, М. М. Миркалонова, 2016

(в случае $p = \infty$ дополнительно предполагаем, что функция f является непрерывной в замкнутом единичном круге). При этом норма функции $f \in H_p$ реализуется на её угловых граничных значениях которые в дальнейшем обозначим

$$F(t) := f(e^{it}).$$

В дальнейшем будут использоваться следующие обозначения:
$H_{p,R}$, $0 < R \leqslant 1$, — пространство Харди аналитических в круге $|z| < R$ функций f, для которых $\Big\|f(z)\Big\|_{H_{p,R}} := \Big\|f(Rz)\Big\|_{H_p} < \infty$;
$\mathcal{P}_{n-1}$ — подпространство алгебраических полиномов (с комплексными коэффициентами) степени не выше $n-1$;

$$E_{n-1}(f)_p := \inf\Big\{\|f - p_{n-1}\|_p : \ p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\Big\},$$

$$E_{n-1}(f)_{H_{p,R}} := \inf\Big\{\|f - p_{n-1}\|_{H_{p,R}} : \ p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\Big\}$$

— величины наилучшего приближения функции f, принадлежащей соответственно H_p, $H_{p,R}$ при $p \geqslant 1$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$;
$f_a^{(r)}$ — производная r-го порядка функции f по аргументу t комплексного переменного $z = \rho e^{it}$;
$f^{(r)}$ — обычная производную r-го порядка, при этом очевидно, что

$$f_a^{(1)}(z) = f'(z) \cdot zi, \quad f_a^{(r)}(z) = \big\{f_a^{(r-1)}(z)\big\}_a^{(1)}, \ r = 2, 3, \dots;$$

$F_a^{(r)}$ и $F^{(r)}$ — соответствующие граничные значения производных; $H_p^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $H_p^{(0)} \equiv H_p$) — множество аналитических в единичном круге функций $f \in H_p$, у которых $f^{(r)} \in H_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$;

$$H_{p,a}^{(r)} = \big\{f \in H_p, \ \|f_a^{(r)}\|_p < \infty\big\}, \ 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Если функция $f \in H_p$ имеет непрерывные граничные значения $F \in L_p[0, 2\pi]$, то её гладкость охарактеризуем скоростью стремления к нулю модуля непрерывности m-го порядка её граничных значений

$$\omega_m(F;t)_p = \sup\left\{\left\|\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{m}{k} F\left(\cdot + (m-k)\tau\right)\right\|_p : \ |\tau| \leqslant t\right\} \tag{1}$$

при $t \to 0$, либо — скоростью стремления к нулю мажоранты некоторой усреднённой величины, содержащей $\omega_m(F;t)_p$. В частности, из (1) для произвольной $f \in H_2^{(r)} \cap H_{2,a}^{(r)}$ имеем

$$\omega_m^2(F_a^{(r)};t)_2 = 2^m \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} k^{2r}\,|c_k|^2\,(1 - \cos k\tau)^m : \ |\tau| \leqslant t\right\},$$

$$\omega_m^2(F^{(r)};t)_2 = 2^m \sup\left\{\sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2\,|c_k|^2\,(1 - \cos(k-r)\tau)^m : \ |\tau| \leqslant t\right\},$$

где $\alpha_{k,r} = k(k-1)\dots(k-r+1)$, $k \geqslant r$.

При решении экстремальных задач во всех основных результатах в качестве экстремальной функции выступает функция

$$f_0(z) = z^n \in H_p^{(r)} \cap H_{p,a}^{(r)}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

модуль непрерывности m-го порядка которой в H_p-норме, при всех $p \in [1, \infty)$, имеет вид

$$\omega_m^2\left(F_{0,a}^{(r)},\, t\right)_p = \begin{cases} 2^m n^{2r}(1-\cos nt)^m, & 0 \leqslant t \leqslant \pi/n, \\ 2^{2m} n^{2r}, & t > \pi/n; \end{cases}$$

$$\omega_m^2\left(F_0^{(r)},\, t\right)_p = \begin{cases} 2^m \alpha_{n,r}^2(1-\cos(n-r)t)^m, & 0 \leqslant t \leqslant \pi/(n-r), \\ 2^m \alpha_{n,r}^2, & t > \pi/(n-r). \end{cases}$$

Далее рассматривается задача нахождения точных значений наилучших полиномиальных приближений функций $f \in H_p^{(r)} \cap H_{p,a}^{(r)}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, структурные свойства которых характеризуются модулями непрерывности и гладкости. Здесь анонсируются следующие утверждения.

Теорема 1. *Для произвольной функции* $f \in H_{p,a}^{(r)}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *при любых* $u \in (0, \pi/(2n)]$, $R \in (0,1]$ *справедливо точное неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{H_{p,R}} \leqslant \frac{R^n}{2n^{r-1}}\left(\int_0^u \omega\left(F_a^{(r)}; 2x\right)_p\left(1-\sin\frac{\pi x}{2u}\right)dx + \left(\frac{\pi}{2u}\right)^2\int_0^u \omega\left(F_a^{(r-2)}; 2x\right)_p \sin\frac{\pi x}{2u}dx\right); \quad (2)$$

в частности, при $u = \pi/(2n)$ *имеем*

$$E_{n-1}(f)_{H_{p,R}} \leqslant \frac{R^n}{2n^{r-1}}\left(\int_0^{\pi/(2n)} \omega\left(F_a^{(r)}; 2x\right)_p\left(1-\sin nx\right)dx + n^2\int_0^{\pi/(2n)} \omega\left(F_a^{(r-2)}; 2x\right)_p \sin nx\, dx\right). \quad (3)$$

Неравенства (2) *и* (3) *обращаются в равенство для функции* $f_0(z) = z^n$, *принадлежащей* $H_{p,a}^{(r)}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Теорема 2. *Для любой функции* $f \in H_{p,a}^{(r)}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *и произвольных* $u \in (0, \pi/(2n)]$, $R \in (0,1]$ *справедливо неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{H_{p,R}} \leqslant \frac{\pi R^n}{2un^r}\cdot\frac{1}{\pi-2}\left\{\int_0^u \omega_2\left(F_a^{(r)}; 2x\right)_p\left(1-\sin\frac{\pi}{2u}x\right)dx + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\pi}{2u}\right)^2\int_0^u \omega_2\left(F^{(r-2)}; 2x\right)_p \sin\frac{\pi}{2u}x dx\right\}, \quad (4)$$

в частности,

$$E_{n-1}(f)_{H_{p,R}} \leqslant \frac{R^n}{(\pi-2)n^{r-1}}\cdot\left\{\int_0^{\pi/(2n)} \omega_2\left(F_a^{(r)}; 2x\right)_p(1-\sin nx)\,dx + \right.$$
$$\left. + n^2\int_0^{\pi/(2n)} \omega_2\left(F^{(r-2)}; 2x\right)_p \sin nx dx\right\}. \quad (5)$$

Оба неравенства (4) *и* (5) *обращаются в равенство для функции* $f_0(z) = z^n \in H_{p,a}^{(r)}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

В заключении приведем обобщение результатов Н.Айнуллоева и Л.В.Тайкова [6] о полиномиальном приближении аналитических функций, принадлежащих классу $H_{p,a}^{(r)} \cap H_p^{(r)}$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, причём структурные свойства функции $f \in H_{p,a}^{(r)}$ $\left(f \in H_p^{(r)}\right)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$ полностью характеризуются стремлением к нулю модуля непрерывности m-го порядка $\omega_m(F_a^{(r)}; t)_p$ $\left(\omega_m\left(F^{(r)}; t\right)_p\right)$ производной $f_a^{(r)}$ $\left(f^{(r)}\right)$, задавая эту скорость посредством мажоранты некоторой усреднённой величины $\omega_m(F_a^{(r)};t)_p$ $\left(\omega_m\left(F^{(r)};t\right)_p\right)$ в предположении, что $f_a^{(r)} \neq const$ $\left(f^{(r)} \neq \mathrm{const}\right)$.

Теорема 3. *Для любых функций $f \in H_{p,a}^{(r)} \cap H_p^{(r)}$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, при всех $m,n,r \in \mathbb{N}$ и произвольного $\mu \geqslant 1$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in H_{p,a}^{(r)}} \frac{2^m n^{r-1} E_{n-1}(f)_p}{\int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} \omega_m\left(F_a^{(r)};2t\right)_2 \left[1+(\mu^2-1)\sin\mu n t\right] dt} = \left\{\int\limits_0^{\pi/(2\mu)} \sin^m t\left[1+(\mu^2-1)\sin\mu t\right] dt\right\}^{-1}; \quad (6)$$

если же $n > r$, то

$$\sup_{f\in H_{p}^{(r)}} \frac{2^m \alpha_{n,r}(n-r)^{-1} E_{n-1}(f)_p}{\int\limits_0^{\pi/(2\mu(n-r))} \omega_m\left(F^{(r)};2t\right)_2 \left[1+(\mu^2-1)\sin\mu(n-r)t\right] dt} =$$

$$= \left\{\int\limits_0^{\pi/(2\mu)} \sin^m t\left[1+(\mu^2-1)\sin\mu t\right] dt\right\}^{-1}. \quad (7)$$

Верхнюю грань в соотношениях (6) и (7) реализует функция $f_0(z) = z^n \in H_{2,a}^{(r)} \cap H_2^{(r)}$.

Следствие 1. *В условиях теоремы 3 при $\mu = 1$ справедливы равенства*

$$\sup_{f\in H_{p,a}^{(r)}} \frac{2^m n^{r-1} E_{n-1}(f)_p}{\int\limits_0^{\pi/n} \omega_m\left(F_a^{(r)};2t\right)_2 dt} = \sup_{f\in H_{p}^{(r)}} \frac{2^m \alpha_{n,r}(n-r)^{-1} E_{n-1}(f)_p}{\int\limits_0^{\pi/(n-r)} \omega_m\left(f^{(r)};2t\right)_2 dt} = \frac{(2m-1)!!}{2^m\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)},$$

где Γ — гамма-функция Эйлера.

Список литературы

1. *Бабенко К.И.* О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958. Т. 22, № 5. С. 631-640.
2. *Тайков Л.В.* О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 155-162.
3. *Тайков Л.В.* Некоторые точные неравенства в теории приближения функций // Analysis Mathematica. 1976. Т. 2, С. 77-85.
4. *Тайков Л.В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки, 1977. Т. 22, № 2. С. 285-295.
5. *Тихомиров В.М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи матем. наук. 1960. Т. 1, № 3. С. 81-120.
6. *Айнуллоев Н.*, *Тайков Л.В.* Наилучшие приближения в смысле А.Н.Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Матем. заметки. 1986. Т. 40, № 3. С. 341-351.
7. *Двейрин М.З.*, *Чебаненко И.В.* О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций // Теория отображений и приближение функций. – Киев: Наукова думка. 1983. С. 62-73.
8. *Pinkus A.* n-Width in Approximation Theory. — Berlin: Springer - Verlag. 1985. 292 p.
9. *Вакарчук С.Б.* Наилучшие линейные методы приближения и попе- речники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки. 1995. Т. 57, № 1. С. 30-39.
10. *Шабозов М.Ш.*, *Шабозов О.Ш.* Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // Матем. заметки. 2000. Т. 68, № 5. С. 796-800.
11. *Шабозов М.Ш.*, *Юсупов Г.А.* Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций // ДАН России. 2002. Т. 382, № 6. С. 747-749.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 203–205

О точном восстановлении решения одной краевой задачи сплайнами первого порядка

М. П. Пулатов, М. Азизов

Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни, Душанбе, Таджикистан

Аннотация. Работа посвящена вопросу восстановления решения одной краевой задачи для бигармонического уравнения обобщёнными интерполяционными сплайнами первого порядка.

В данной заметке рассмотрим конкретное применение сплайнов первого порядка дефекта 1 к следующей краевой задаче математической физики: требуется найти бигармоническую в области $D = \{(x, y): \ x^2 + y^2 = \rho^2 < 1\}$ функцию $u(\rho, t)$, $0 \leqslant \rho < 1$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, удовлетворяющую уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)^2 u(\rho, t) = 0, \tag{1}$$

для которой

$$u(\rho, t)\Big|_{\rho=1} = g(t), \quad \frac{\partial u(\rho, t)}{\partial \rho}\Big|_{\rho=1} = 0. \tag{2}$$

Известно [1, приложение VII к гл. IV, с. 398–402], что решение задачи (1) – (2) существует и задаётся формулой

$$u(\rho, t) := u(g; \rho, t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{K}_\rho(t - \tau) g(\tau) d\tau, \tag{3}$$

где ядро $\mathcal{K}_\rho$ имеет вид

$$\mathcal{K}_\rho(t) = \frac{(1 - \rho^2)(1 - \rho \cos t)}{2(1 - 2\rho \cos t + \rho^2)}, \quad 0 \leqslant \rho < 1.$$

Непосредственным вычислением коэффициентов Фурье для ядра $\mathcal{K}_\rho$ получаем следующее разложение в ряд Фурье [2]

$$\mathcal{K}_\rho(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2}(1 - \rho^2)k\right) \rho^k \cos kt = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt + \frac{1}{2}(1 - \rho^2) \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k \cos kt.$$

Рассмотрим следующий метод восстановления решения $u(g; \rho, t)$ краевой задачи (1) – (2). Через H^1 обозначим класс функций $f(t)$, удовлетворяющих условию Липшица

$$|f(t') - f(t'')| \leqslant |t' - t''|.$$

Пусть $t_i = i\pi/n$, $\tau_i = t_i - \pi/(2n)$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ и $S(t) = S(f, t)$ – периодический сплайн порядка 1 дефекта 1 по разбиению $\{t_i\}$, однозначно определяемый по функции

© М. П. Пулатов, М. Азизов, 2016

$f \in C[0, 2\pi]$ условием

$$S(f, \tau_i) = \frac{n}{\pi} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{4}$$

Свёртке $u(g; \rho, t)$ (см. (3)), являющейся решением краевой задачи (1) – (2) с учётом (4), поставим в соответствие функцию

$$S_1(u(g; \rho, \cdot); t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{K}_\rho(t - \tau) S(g, \tau) d\tau. \tag{5}$$

Рассмотрим задачу вычисления точной верхней грани величины

$$\sup\Big\{\Big|u(g; \rho, t) - S_1(u(g; \rho, \cdot); t)\Big| : \ g \in H^1\Big\}. \tag{6}$$

Нам понадобится следующая

Лемма [3]. *Пусть* $f \in H^1$, $\delta(t) = f(t) - S(f, t)$,

$$\delta_1(u) = \int\limits_0^t \delta(u) du = \int\limits_0^t [f(u) - S(f, u)] du.$$

Тогда для любых $t, \tau \in [0, \pi]$ *выполняется неравенство*

$$\Big|\delta_1(t + \tau) - \delta_1(t)\Big| \leqslant \mu(\tau) := \begin{cases} \dfrac{\tau}{4}\left(\dfrac{2\pi}{n} - \tau\right), & 0 < \tau \leqslant \dfrac{\pi}{n}, \\[2mm] \dfrac{\pi^2}{4n^2}, & \dfrac{\pi}{n} \leqslant \tau \leqslant \pi. \end{cases} \tag{7}$$

Существует функция $f_0 \in H^1$ *для которой при некотором* t *в* (7) *имеет место знак равенства при всех* τ *из* $[0, \pi]$.

Заметим, что величина (6) не зависит от t, так, что не нарушая общности, можно считать $t = 0$. Поэтому имеем

$$u(g; \rho, 0) - S_1(u(g; \rho, \cdot); 0) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{K}_\rho(\tau)[g(\tau) - S(g, \tau)] d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathcal{K}'_\rho(t) \delta_1(t) dt + \frac{1}{\pi} \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} \mathcal{K}'_\rho(t) \delta_1(t) dt.$$

В силу леммы, для $g \in H^1$ имеем:

$$\left| \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathcal{K}'_\rho(t) \delta_1(t) dt \right| \leqslant \left| \int\limits_0^{\pi/2} \mathcal{K}'_\rho(t) \mu(2t) dt \right|,$$

$$\left| \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} \mathcal{K}'_\rho(t) \delta_1(t) dt \right| \leqslant \left| \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \mathcal{K}'_\rho(t) \mu(2\pi - 2t) dt \right|.$$

Введя обозначения

$$\lambda(t) = \{\mu(2t), \ 0 < t \leqslant \pi/2; \ \ \mu(2\pi - 2t), \ \pi/2 \leqslant \tau \leqslant \pi\},$$

будем иметь

$$\Big|u(g; \rho, 0) - S_1(u(g; \rho, \cdot); 0)\Big| \leqslant \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \mathcal{K}'_\rho(t) \lambda(t) dt \right| = \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \Big[\mathcal{K}'_\rho(t) - C_0\Big] \lambda'(t) dt \right|. \tag{8}$$

Вычислив интеграл в правой части (8), получим

$$\Big|u(g;\rho,0)-S_1(u(g;\rho,\cdot);0)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\rho^{2\nu+1}}{(2\nu+1)^2}\sin^2\left(\frac{2\nu+1}{4n}\pi\right)+\frac{4}{\pi}(1-\rho^2)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\rho^{2\nu+1}}{2\nu+1}\sin^2\left(\frac{2\nu+1}{4n}\pi\right). \tag{9}$$

Легко подсчитать, что знак равенство в (9) имеет место, если $g(t)$ является интегралом от $\operatorname{sgn}\sin t$. Таким образом справедлива следующая

Теорема. *Для восстановления решения краевой задачи* (1) – (2) *методом* (5) *при всех значениях* t *имеем*

$$\sup\Big\{\Big|u(g;\rho,t)-S_1(u(g;\rho,\cdot);t)\Big|:\ g\in H^1\Big\}=$$

$$=\frac{8}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\rho^{2\nu+1}}{(2\nu+1)^2}\sin^2\left(\frac{2\nu+1}{4n}\pi\right)+\frac{4}{\pi}(1-\rho^2)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\rho^{2\nu+1}}{2\nu+1}\sin^2\left(\frac{2\nu+1}{4n}\pi\right). \tag{10}$$

Отметим, что если сплайн $S(f,t)$ определить не условием (4), а условием

$$S(f;\tau)=g(\tau_i),\quad i=1,2,\ldots,2n,$$

то точная оценка погрешности величины (6) на классе H^1 равно

$$\sup\Big\{\Big|u(g;\rho,t)-S_1(u(g;\rho,\cdot);t)\Big|:\ g\in H^1\Big\}=$$

$$=\frac{\pi}{4n}+\frac{2}{\pi n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\rho^{2n(2\nu+1)}}{(2\nu+1)^2}+\frac{1}{\pi}(1-\rho^2)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\rho^{2n(2\nu+1)}}{2\nu+1}. \tag{11}$$

Используя очевидные равенства

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\rho^{2n(2\nu+1)}}{2\nu+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho^{2n}}{1-\rho^{2n}}-\rho^{2n},\quad \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\rho^{2n(2\nu+1)}}{(2\nu+1)^2}=\frac{n}{\rho^{2n}}\int_0^{\rho}\ln\frac{1+r^{2n}}{1-r^{2n}}dr$$

запишем соотношение (11) в виде

$$\sup\Big\{\Big|u(g;\rho,t)-S_1(u(g;\rho,\cdot);t)\Big|:\ g\in H^1\Big\}=$$

$$=\frac{\pi}{4n}+\frac{2}{\pi\rho^{2n}}\int_0^{\rho}\ln\frac{1+r^{2n}}{1-r^{2n}}dr+\frac{1}{\pi}(1-\rho^2)\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho^{2n}}{1-\rho^{2n}}-\rho^{2n}\right).$$

Правые части равенств (10) и (11) в пределе при $\rho\to 1$ стремятся к $\pi/(2n)$, но при $\rho\to 0$ имеют разные предельные значения, а именно, соотношение (10) стремится к нулю, а (11) стремится к значению $\pi/(4n)$.

Список литературы

1. *Тихонов А.Н.*, *Самарский А.А.* Уравнения математической физики: Учеб. пособие для вузов.- 5-е изд. – М.: Наука, 1977. 736 с.
2. *Шабозов М.Ш.* Наилучшее и наилучшее одностороннее приближения ядро бигармонического уравнения и оптимальное восстановление значений операторов // Укр. матем. журнал. 1995. Т. 47, № 11. С. 1549-1557.
3. *Корнейчук Н.П.* О приближении свёрток периодических функций // Вопросы анализа и приближения. – Киев: Ин-т матем. АН УССР. 1989. С. 76-80.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 206–211

Короткие тригонометрические суммы

З. Х. Рахмонов

Институт математики им. А. Джураева АН РТ, Душанбе, Таджикистан

Аннотация. Даётся обзор результатов о поведении коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида

$$T(\alpha,x,y)=\sum_{x-y<m\leqslant x}e(\alpha m^n),$$

в большие дуги и их приложения к классическим аддитивным задачам (проблема Варинга и задача Эстермана) с более жесткими условиями, а именно, когда слагаемые почти равны, также о новой нетривиальной оценке коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами вида

$$S_3(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)e(\alpha n^3),$$

в малые дуги при $y\geqslant x^{\frac45}(\ln x)^{8B+151}$, B — абсолютная постоянная.

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-æ,1-æ]$, $æ\tau=1$ представимо в виде

$$\alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\quad (a,q)=1,\qquad 1\leqslant q\leqslant\tau,\qquad |\lambda|\leqslant\frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q\leqslant P$, через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

1. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля и их приложения к аддитивным задачам с почти равными слагаемыми

Р. Вон [1], изучая суммы Г.Вейля вида

$$T(\alpha,x)=\sum_{m\leqslant x}e\left(\alpha m^n\right)$$

в больших дугах и воспользовавшись оценкой

$$S_b(a,q)=\sum_{k=1}^{q}e\left(\frac{ak^n+bk}{q}\right)\lesssim q^{\frac12+\varepsilon}(b,q),\tag{1}$$

принадлежащей Хуа Ло-кену [2], методом Ван дер Корпута доказал, что

$$T(\alpha,x)=\frac{S(a,q)}{q}\int_0^x e\left(\lambda t^n\right)dt+O\left(q^{\frac12+\varepsilon}\left(1+x^n|\lambda|\right)^{\frac12}\right),\quad S(a,q)=S_0(a,q),$$

а при выполнении условия

$$|\lambda|\leqslant\frac{1}{2nqx^{n-1}},$$

© З. Х. Рахмонов, 2016

справедливо следующее соотношение:

$$T(\alpha,x)=\frac{x\ S(a,q)}{q}\int_0^1 e\left(\lambda t^n\right)dt+O\left(q^{\frac12+\varepsilon}\right).$$

Воспользовавшись этими оценками, в [3] получено асимптотическая формула в проблеме Варинга для восьми кубов.

Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля вида

$$T(\alpha,x,y)=\sum_{x-y<m\leqslant x} e(\alpha m^n),\qquad \sqrt{x}\leqslant y<\frac{x}{\ln x},$$

следующие из $T(\alpha,x)$, заменой условия $m\leqslant x$ на условие $x-y<m\leqslant x$, при $n=2,3,4$ в длинных дугах, были исследованы в работах [4–8]. Эти результаты были приложены при выводе асимптотических формул в следующих аддитивных задачах с почти равными слагаемыми:

- в тернарной проблеме Эстермана [4] о представлении натурального числа $N>N_0$ в виде $p_1+p_2+m^2=N$, p_1 и p_2 – простые числа, $m>0$ – целое число, с условиями
$$\left|p_i-\frac{N}{3}\right|\leqslant H;\qquad i=1,2,\qquad \left|m^2-\frac{N}{3}\right|\leqslant H,\qquad H\geqslant N^{\frac34}\ln^2 N;$$
- в тернарной проблеме Эстермана для кубов [7] о представлении натурального числа $N>N_0$ в виде $p_1+p_2+m^3=N$, p_1 и p_2 – простые числа, $m>0$ – целое число, с условиями
$$\left|p_i-\frac{N}{3}\right|\leqslant H;\qquad i=1,2,\qquad \left|m^3-\frac{N}{3}\right|\leqslant H,\qquad H\geqslant N^{\frac56}\ln^3 N;$$
- в проблеме Варинга для кубов [9] о представлении натурального числа $N>N_0$ в виде девяти кубов натуральных чисел x_i, $i=\overline{1,9}$ с условиями
$$\left|x_i-\left(\frac{N}{9}\right)^{\frac13}\right|\leqslant H,\qquad H\geqslant N^{\frac{3}{10}+\varepsilon};$$
- в проблеме Варинга для четвёртых степеней [10] о представлении натурального числа $N>N_0$ в виде суммы семнадцати четвёртых степеней натуральных чисел x_i, $i=\overline{1,17}$ с условиями
$$\left|x_i-\left(\frac{N}{17}\right)^{\frac14}\right|\leqslant H,\qquad H\geqslant N^{\frac{13}{54}+\varepsilon}.$$

Сумма $T(\alpha,x,y)$ при произвольном фиксированном n была изучена в работе [11].

Теорема 1. *Пусть $\tau\geqslant 2n(n-1)x^{n-2}y$ и $\lambda\geqslant 0$, тогда при $\{n\lambda x^{n-1}\}\leqslant\frac{1}{2q}$, справедлива формула*

$$T(\alpha,x,y)=\frac{S(a,q)}{q}T(\lambda;x,y)+O(q^{\frac12+\varepsilon}),$$

а при $\{n\lambda x^{n-1}\}>\frac{1}{2q}$ имеет место оценка

$$|T(\alpha,x,y)|\lesssim q^{1-\frac1n}\ln q+\min_{2\leqslant k\leqslant n}(yq^{-\frac1n},\lambda^{-\frac1k}x^{1-\frac{n}{k}}q^{-\frac1n}).$$

Доказательство теоремы 1 проводится методом оценки специальных тригонометрических сумм Ван дер Корпута с применением формулы суммирования Пуассона, оценки тригонометрических интегралов по величине модуля производных и оценки полных рациональных сумм.

Следствие 1.1. *Пусть* $\tau \geqslant 2n(n-1)x^{n-2}y$, $|\lambda| \leqslant \frac{1}{2nqx^{n-1}}$,

$$\gamma(\lambda; x, y) = \int\limits_{-0{,}5}^{05} e(\lambda(x - y/2 + yu)^n)du,$$

тогда выполняется соотношение

$$T(\alpha, x, y) = \frac{y}{q} S(a, q)\gamma(\lambda; x, y) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Следствие 1.2. *Пусть* $\tau \geqslant 2n(n-1)x^{n-2}y$, $\frac{1}{2nqx^{n-1}} < |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}$, *тогда имеет место оценка*

$$T(\alpha, x, y) \lesssim q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min_{2 \leqslant k \leqslant n} \left(yq^{-\frac{1}{n}}, x^{1-\frac{1}{k}} q^{\frac{1}{k}-\frac{1}{n}} \right).$$

Следствия 1.1 и 1.2 являются обобщением вышеуказанных результатов Р. Вона для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля $T(\alpha, x, y)$. Эти следствия позволили доказать асимптотические формулы в проблеме Варинга для пятых степеней с почти равными слагаемыми (теорема 2) и в тернарной проблеме Эстермана для четвёртых степеней с почти равными слагаемыми (теорема 2).

Теорема 2. [11]. *Для числа* $J(N, H)$ *представлений* N *суммой* 33 *пятых степеней чисел* x_i, $i = 1, 2, \ldots, 33$ *с условиями* $\left| x_i - \left(\frac{N}{33}\right)^{\frac{1}{5}} \right| \leqslant H$, *при* $H \geqslant N^{\frac{1}{5}-\frac{1}{340}+\varepsilon}$ *справедлива асимптотическая формула*:

$$J(N, H) = \frac{B\mathfrak{S}(N)H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}} + O\left(\frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\,\mathscr{L}} \right),$$

где $\mathfrak{S}(N)$ *– особый ряд, сумма которого превосходит некоторое положительное постоянное число,* B *– абсолютная положительная постоянная, которая определяется соотношением*

$$B = \frac{\sqrt[5]{33^4}}{5 \cdot 32!} \sum_{k=0}^{16} (-1)^k C_{33}^k (33 - 2k)^{32}.$$

Следствие 2.1. *Существует такое* N_0, *что каждое натуральное число* $N > N_0$ *представимо в виде суммы* 33 *пятых степеней почти равных чисел* x_i:

$$\left| x_i - \left(\frac{N}{33}\right)^{\frac{1}{5}} \right| \leqslant N^{1-\frac{1}{340}+\varepsilon}, \qquad i = 1, 2, \ldots, 33.$$

Теорема 3. [12]. *Пусть* N *— достаточно большое натуральное число,* $I(N, H)$ *— число представлений* N *суммой двух простых чисел* p_1, p_2 *и четвёртой степени натурального* m *с условиями*

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leqslant H, \quad i = 1, 2, \qquad \left| m^4 - \frac{N}{3} \right| \leqslant H,$$

$\rho(N, p)$ *— число решений сравнения* $x^4 \equiv N (\mathrm{mod}\, p)$. *Тогда при* $H \geqslant N^{\frac{11}{12}} \mathscr{L}^{\frac{40}{3}}$ *справедлива асимптотическая формула*:

$$I(N, H) = \frac{\sqrt[4]{3}\,\mathfrak{S}(N)\,H}{4\sqrt[4]{N^3}\,\mathscr{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{\sqrt[4]{N^3}\,\mathscr{L}^3} \right), \quad \mathfrak{S} = \prod_p \left(1 + \frac{\rho(N, p)}{(p-1)^2} \right).$$

Следствие 3.1. *Существует такое N_0, что каждое натуральное число $N > N_0$ представимо в виде суммы двух простых чисел p_1, p_2 и четвёртой степени натурального m с условиями*

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leqslant N^{\frac{11}{12}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}}, \qquad \left|m - \sqrt[4]{\frac{N}{3}}\right| \leqslant \frac{3N^{\frac{1}{6}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}}}{4\sqrt[4]{3}}.$$

2. Короткие кубические тригонометрические суммы с простыми числами

Виноградов И.М. [13] первым начал изучать короткие тригонометрические суммы с простыми числами. Для сумм вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leqslant x} \Lambda(n)e(\alpha n^k),$$

при $k = 1$, используя свой метод оценок сумм с простыми числами, он доказал нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln\ln x)^2))$ при $\tau = x^{\frac{1}{3}}$ и $y > x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$, основу которой, наряду с «решетом Виноградова», при $k = 1$ составляют оценки коротких двойных тригонометрических сумм вида

$$J_k(\alpha; x, y, M, N) = \sum_{M<m\leqslant 2M} a(m) \sum_{\substack{U<n\leqslant 2N \\ x-y<mn\leqslant x}} b(n)e(\alpha(mn)^k),$$

где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, $|a(m)| \leqslant \tau^c(m)$, $|b(n)| \leqslant \tau^c(n)$, M, N, $U \geqslant N$ – натуральные, $x > x_0$, y – вещественные числа, c – абсолютная постоянная, не всё время одна и та же.

Затем Хейзелгроув С.Б. [14], Статулявычус В. [15], Пан Ч.Д и Пан Ч.Б. [16], Жан Т. [17] для суммы $S_1(\alpha; x, y)$, $y \geqslant x^\theta$, получив нетривиальную оценку в малых дугах и изучив ее поведение в больших дугах, доказали асимптотическую формулу в тернарной проблеме Гольдбаха с почти равными слагаемыми с условиями $|p_i - N/3| \leqslant H$, $H = N^\theta$, соответственно при

$$\theta = \frac{63}{64} + \varepsilon, \qquad \frac{279}{308} + \varepsilon, \qquad \frac{2}{3} + \varepsilon, \qquad \frac{5}{8} + \varepsilon.$$

Лю Дж. и Жан Т. [18], изучив сумму $J_2(\alpha; x, y, M, N)$, получили нетривиальную оценку суммы $S_2(\alpha; x, y)$ в малых дугах при $y \geqslant x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$ и доказали теорему, что достаточно большое натуральное число N можно представить в виде

$$N = p_1 + p_2 + p_3^2, \qquad \left|p_j - \frac{N}{3}\right| \leqslant H, \qquad \left|p_3^2 - \frac{N}{3}\right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{\frac{27}{32}+\varepsilon}.$$

Воспользовавшись, в частности, этой оценкой, авторы [19, 20] решили задачу Хуа о представимости достаточно большого натурального числа в виде суммы пяти квадратов почти равных простых чисел и показали, что достаточно большое натуральное число N, $N \equiv 5(mod 24)$ можно представить в виде

$$N = p_1^2 + \ldots + p_5^2, \quad \left|p_j - \sqrt{\frac{N}{5}}\right| \leqslant H, \quad H \geqslant N^{\frac{9}{20}+\varepsilon}.$$

В 1938 г. Хуа [21], рассматривая проблему Варинга – Гольдбаха для кубов, доказал, что все достаточно большие нечетные натуральные числа являются суммой девяти кубов простых чисел. Кумчев А.В. [22] получил нетривиальную оценку суммы $S_k(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{M}(P)$ при $y \geqslant x^{\theta+\varepsilon}$, $\theta = 1 - \frac{1}{2k+3}$ и $\tau = x^{1+2\theta}P^{-1}$. Яо Y. [23], воспользовавшись оценкой Кумчева, доказал, что всякое достаточно большое нечетное натуральное число N можно представить в виде

$$p_1^3+p_2^3+\ldots+p_9^3=N, \qquad \left|p_i-\sqrt[3]{\frac{N}{9}}\right|\leqslant N^{\frac13-\frac1{51}+\varepsilon}.$$

Автору удалось получить нетривиальную оценку коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами $S_3(\alpha;x,y)$ в малых дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^{32(B+20)})$, $\mathscr{L}=\ln xq$, B — абсолютная постоянная при

$$y\geqslant x^{\frac45}\mathscr{L}^{8B+151}, \qquad \tau=\frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}^{-32(B+20)}.$$

Теорема 4. *При* $\mathscr{L}^{32(B+20)}\leqslant q\leqslant y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-32(B+20)}$ *и* $y\geqslant x^{\frac45}\mathscr{L}^{8B+151}$, *справедлива оценка*

$$S_3(\alpha;x,y)\lesssim\frac{y}{\mathscr{L}^B}.$$

Доказательство теоремы 4 проводится методом оценок сумм с простыми числами Виноградова И.М. в сочетании с методами работ авторов [24–26]. Основными утверждениями, позволившими получить новую оценку $S_3(\alpha;x,y)$, являются нетривиальные оценки двойных сумм $J_3(\alpha;x,y,M,N)$ на малых дугах, соответственно имеющих “длинную” сплошную сумму (теорема 5) и имеющих близкие по порядку суммы, составляющие двойную сумму (теорема 6).

Теорема 5. *Пусть в сумме* $J_3(\alpha;x,y,M,N)$ *выполняются условия*: $|a(m)|\leqslant\tau_5(m)$, $b(n)=1$, $\sqrt{x}<y<x\mathscr{L}^{-1}$. *Тогда при*

$$\mathscr{L}^{8A+56}<q<y^3\mathscr{L}^{-8A-56}, \qquad xy^{-\frac14}\mathscr{L}^{2A+14}<N\leqslant x\mathscr{L}^{-2A-6},$$

справедлива оценка

$$|J_3(\alpha;x,y,M,N)|\lesssim\frac{y}{\mathscr{L}^A}.$$

Теорема 6. *Пусть* $xy^{-1}\leqslant N\leqslant y$, $M\leqslant N$, $y<x\mathscr{L}^{-1}$, $|a(m)|\leqslant\tau_{6-k}(m)$, $|b(n)|\leqslant\tau_k(n)$, $k=1,2,3$. *Тогда справедлива оценка*

$$|J_3(\alpha;x,y,M,N)|\lesssim\begin{cases} y\left(\frac{\mathscr{L}^{24}}{q}+\frac{x\mathscr{L}^{25}}{yN}+\frac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4}\right)^{\frac1{32}}\mathscr{L}^{k^2-6k+17}, & \text{если } 0,5q<\frac{y^4}{xN};\\[2ex] y\left(\frac{x^2q\mathscr{L}^{25}}{y^5}+\frac{x^2\mathscr{L}^2}{y^2N^2}+\frac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4}\right)^{\frac1{32}}\mathscr{L}^{k^2-6k+17}, & \text{если } 0,5q\geqslant\frac{y^4}{xN}.\end{cases}$$

Список литературы

1. *Vaughan R.C.* Some remarks in Weyl sums // Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 34. Topics in classical number theory, Budapest. 1981. North Holland. 1984. P. 1585 – 1602.
2. Хуа Ло-кен. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. — М.: Мир. 1964. 190 с.
3. *Vaughan R.C.* On Waring's problem for cubes // J. Reine Angew. Math. 1986. Vol. 365. P. 122 – 170.
4. *Рахмонов З.Х.* Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Матем. заметки. 2003. Т. 74. Вып. 4. С. 564 – 572.
5. *Рахмонов З. Х.*, *Шокамолова Дж. А.* Короткие квадратичные тригонометрические суммы Вейля // Известия АН Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2009. № 2(135). С. 7 – 18.
6. *Рахмонов З. Х.*, *Мирзоабдугафуров К. И.* Об оценках коротких кубических сумм Г. Вейля // ДАН Республики Таджикистан. 2008. Т. 51. № 1.

7. *Рахмонов З.Х.* Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Матем. заметки. 2014. Т. 95. Вып. 3. С. 445 – 456.
8. *Рахмонов З. Х.*, *Азамов А. З.*, *Мирзоабдугафуров К. И.* Оценка коротких тригонометрических сумм Г. Вейля четвертой степени // ДАН Республики Таджикистан. 2010. Т. 53. № 10. С. 737 – 744.
9. *Рахмонов З. Х.*, *Мирзоабдугафуров К. И.* Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми // ДАН Республики Таджикистан. 2008. Т. 51, № 2. С. 83 – 86.
10. *Рахмонов З. Х.*, *Азамов А. З.* Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми // ДАН Республики Таджикистан. 2011. Т. 54, № 3. С. 34 – 42.
11. *Рахмонов З.Х.*, *Назрублоев Н.Н.*, *Рахимов А.О.* Короткие суммы Г.Вейля и их приложения // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. В. 1(53). С. 232 – 247.
12. *Рахимов А.О.* Асимптотическая формула в проблеме Эстермана четвёртой степени с почти равными слагаемыми // ДАН Республики Таджикистан. 2015. Т. 58, № 9. С. 857 – 860.
13. *Виноградов И.М.*, *Карацуба А.А.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Труды МИАН СССР. 1984. Т. 77. С. 4 – 30.
14. *Haselgrove C.B.* Some theorems in the analitic theory of number // J. London Math.Soc. 1951. Vol. 26. P. 273 – 277.
15. *Статулявичус В.* О представлении нечетных чисел суммою трех почти равных простых чисел // Вильнюс. Ученые труды университета. Серия мат., физ. и хим. н. 1955. № 2. С. 5 – 23.
16. *Pan Cheng-dong*, *Pan Cheng-biao*. On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III) // Chinese Ann. of Math. 1990. Vol. 2. P. 138 – 147.
17. *Zhan T.* On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes // Acta Math Sinica. New ser. 1991. Vol. 7, No 3. P. 135 – 170.
18. *Liu J.*, *Zhan T.* Estimation of exponential sums over primes in short intervals I. Mh Math. 1999. 127: P. 27 – 41.
19. *Liu J*, *Zhan T.* Hua's Theorem on Prime Squares in Short Intervals // Acta Mathematica Sinica. English Series. Oct., 2000. Vol. 16, № 4. P. 669–690.
20. *Liu J.*, *Lu G.* & *Zhan T.* Exponential sums over primes in short intervals // Science in China: Series A Mathematics. 2006. Vol. 49, № 5. P. 611 – 619.
21. *Hua L. K.* Some results in the additive prime number theory // Quart. J. Math. 1938. Vol. 9, № 1. P. 68 — 80.
22. *Kumchev A V.* On Weyl sums over primes in short intervals // “Arithmetic in Shangrila”—Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications. 2012. Vol. 9. Singapore: World Scientific. P. 116–131.
23. *Yao Y.* Sums of nine almost equal prime cubes // Frontiers of Mathematics in China. October 2014. Vol. 9, Is. 5. P. 1131 – 1140.
24. *Рахмонов З.Х.* Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения // Известия РАН. Серия матем. 1993. Т. 57, № 4. С. 55 – 71.
25. *Рахмонов Ф. З.* Оценка квадратичных тригонометрических сумм с простыми числами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2011. № 3. С. 56 – 60.
26. *Рахмонов З.Х.*, *Рахмонов Ф.З.* Сумма коротких тригонометрических сумм с простыми числами // ДАН России. 2014. Т. 459, № 2. С. 156 – 157.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 212–216

Наилучшее квадратурные формулы с весом для классов функций малой гладкости

Р. С. Сабоиев[1], З. А. Парвонаева[2]

[1] *Университет центральной Азии, Душанбе, Таджикистан*
[2] *Хорогский государственный университет им. М. Назаршоева, Хорог, Таджикистан*

Аннотация. В докладе приводятся наилучшие весовые квадратурные формулы для различных классов функций малой гладкости.

Среди экстремальных задач теории приближения функций наиболее важными являются оптимизационные задачи теории квадратур. Здесь рассматривается такая задача, связанная с квадратурной формулой

$$\int_a^b f(t)q(t)dt = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f;q,P,T), \tag{1}$$

в которой q — вес на отрезке $[a,b]$, т. е. неотрицательная, интегрируемая (может быть, в несобственном смысле) по Риману функция на $[a,b]$, не эквивалентная нулевой функции; $P=\{p_k\}$ — вектор коэффициентов; $T=\{t_k : a\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_{n-1}<t_n\leqslant b\}$ — вектор узлов; $R_n(f;q,P,T)$ — погрешность квадратурной формулы (1) на функции f.

Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций, заданных на отрезке $[a,b]$, то через

$$R_n(\mathfrak{M};q,P,T)=\sup\left\{\left|\int_a^b f(t)q(t)dt-\sum_{k=1}^{n}p_kf(t_k)\right| :\ f\in\mathfrak{M}\right\}$$

обозначим погрешность квадратурной формулы (1) на указанном классе $\mathfrak{M}$.

Задача состоит в отыскании следующих величин [1]:

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M};q,T)=\inf_P R_n(\mathfrak{M};q,P,T),\qquad \mathcal{E}_n(\mathfrak{M};q)=\inf_{P,T} R_n(\mathfrak{M};q,P,T).$$

Квадратурная формула (1) называется оптимальной или наилучшей на классе $\mathfrak{M}$ по коэффициентам $P=\{p_k\}$ при фиксированных узлах, если существует вектор $P^0=\{p_k^0\}$, для которого

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M},q,T)=R_n(\mathfrak{M};q,P^0,T).$$

Точно также, формула (1) называется оптимальной или наилучшей на классе $\mathfrak{M}$, если существуют вектора коэффициентов $P^0=\{p_k^0\}$ и узлов $T^0=\{t_k^0\}$, для которых выполняется равенство

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M};q)=R_n(\mathfrak{M};q,P^0,T^0).$$

Постановка задач об оптимизации квадратур принадлежит А.Н.Колмогорову, а первые основополагающие результаты установлены С.М.Никольским. Задача построения наилучшей квадратурной формулы по коэффициентам с фиксированными узлами впервые рассматривалась А.Сардом. Сформулированные выше задачи для некоторых важных классов регулярных функций решены в работах многих математиков. Обстоятельный обзор всех

© Р. С. Сабоиев, З. А. Парвонаева, 2016

этих результатов приведен Н.П.Корнейчуком в дополнение к книге С.М.Никольского „Квадратурные формулы" (Москва, Наука, 1988 г.).

Однако для сингулярных интегралов и весовых квадратурных формул вида (1), с весом q имеющих на концах отрезка $[a,b]$ особенности, аналогичные экстремальные задачи недостаточно изучены.

Здесь мы приводим некоторые результаты для классов функций малой гладкости. Для более подробного изложения результатов нам понадобятся следующие обозначения:
$W^1_\infty := W^{(1)}L_\infty(1;a,b)$ — класс функций $f\in C[a,b]$, имеющих почти всюду на $[a,b]$ производные, удовлетворяющие условию

$$\operatorname{supvrai}\{|f'(t)| : t\in[a,b]\}\leqslant 1;$$

$H^{(1)}=H^{(1)}(1;a,b)$ — класса функций f, удовлетворяющих условию Липщица первого порядка

$$|f(t')-f(t'')|\leqslant|t'-t''|\quad\text{для всех}\quad t',t''\in[a,b],$$

(известно, что $W^1_\infty=H^1$);
$H^\omega := H^\omega[a,b]$ — множество функций $f\in C[a,b]$ таких, что

$$|f(t^{''})-f(t^{'})|\leqslant\omega(|t^{''}-t^{'}|)\quad\text{для любых}\quad t^{'},\,t^{''}\in[a,b],$$

где ω — заданный модуль непрерывности, т. е. непрерывная функция, удовлетворяющая соотношениям

$$\omega(t^{''})-\omega(t^{'})\leqslant\omega(t^{''}-t^{'}),\quad 0\leqslant t^{'}\leqslant t^{''}\leqslant b-a,\ \omega(0)=0;$$

$W^{(1)}L := W^{(1)}L[a,b]$ — класс функций f, производные которых существуют почти всюду на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяют условию

$$\|f'\|_{L[a,b]}=\int\limits_a^b|f'(t)|dt\leqslant 1.$$

Сначала рассмотрим задачу нахождения оптимальной по коэффициентам квадратурной формулы вида

$$\int\limits_0^1\frac{f(t)}{t^s}dt=\sum_{k=j}^n p_kf(t_k)+R_{n,j}(f;t^{-s};T,P)\quad 0<s<1,\quad j=0,1. \tag{2}$$

Формулу (2) будем рассматривать в следующих двух случаях:
а) $j=0$, $t_0=0$,$t_n=1$, т. е. когда (2) является формулой типа Маркова;
б) $j=1$, $0\leqslant t_1<t_2<...<t_{n-1}<t_n\leqslant 1$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Среди квадратурных формул типа Маркова с весом $q(t)=t^{-s}$, $0<s<1$, имеющих вид (2) с фиксированным вектором узлов $T^*=\{k/n\}_{k=0}^n$ наилучшая по коэффициентам квадратурная формула на классах W^1_∞ и H^1 имеет вид*

$$\int\limits_0^1\frac{f(t)}{t^s}dt=\frac{1}{1-s}\left\{\left(\frac{1}{2n}\right)^{1-s}f(0)+\left[1-\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{1-s}\right]f(1)\right\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(\frac{2k+1}{2n}\right)^{1-s}-\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^{1-s}\right]f\left(\frac{k}{n}\right)+R_n(f;t^{-s}),$$

погрешность которой на указанных классах равна

$$\mathcal{E}_n(W^1_\infty; t^{-s}; T^*) = \mathcal{E}_n(H^1; t^{-s}; T^*) = \frac{3}{4(1-s)} \cdot \frac{1}{n} + \frac{5}{24} \cdot \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Теорема 2. *Среди квадратурных формул вида* (2) *при фиксированном векторе узлов* $T^{**} = \{(2k-1)/2n\}_{k=1}^n$ *наилучшая по коэффициентам формула на классах* W^1_∞ *и* H^1 *имеет вид*

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t^s} dt = \frac{1}{1-s}\Bigg\{ \frac{1}{n^{1-s}} f\left(\frac{1}{2n}\right) + \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-s}\right] f\left(\frac{2n-1}{2n}\right) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n-1} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{1-s} - \left(\frac{k-1}{n}\right)^{1-s}\right] f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\Bigg\} + R_n(f; t^{-s}; T^{**}),$$

погрешность которой на указанных классах равна

$$\mathcal{E}_n(W^1_\infty; t^{-s}; T^{**}) = \mathcal{E}_n(H^1; t^{-s}; T^{**}) = \frac{3}{4(1-s)} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Далее рассматривается следующая квадратурная формула специального вида для оптимизации приближённого вычисления интегралов от быстроосцилирующих функций:

$$\int_0^1 (\sin m\pi t) f(t) dt = \sum_{k=j}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f; T, P, m), \quad n \geqslant m \geqslant 1, \quad j = 0, 1, \tag{3}$$

задаваемая векторами узлов $T = \{t_k : 0 \leqslant t_j < t_{j+1} < \ldots < t_n \leqslant 1\}$ и коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=j}^n$.

Задача приближённого вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций ранее рассматривалась в известных монографиях В.И.Крылова [2] и Н.С.Бахвалова [3], в работах Я.М.Жилейкина и А.В.Кукарина [4], В.К.Задирака и С.С.Василенко [5], Т.Н.Бусарова [6], а также в [7–10] для различных классов функций. Н.С.Бахваловым [3] отмечено, что формулу (3) достаточно рассмотреть для случая $m = 1$. Включая концы отрезка $t_0 = 0, t_n = 1$ в число узлов, будем изучать оценки погрешности следующей квадратурной формулы типа Маркова:

$$\int_0^1 (\sin \pi t) f(t) dt = p_0 f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k f(t_k) + p_n f(1) + R_n(f; P, T). \tag{4}$$

Теорема 3. *Среди всех квадратурных формул вида* (4) *наилучшей по коэффициентам квадратурной формулой при фиксированных узлах* $T^* = \{t_k :\ t_k = k/n\}_{k=0}^n$ *для класса* $H^\omega[0,1]$ *является формула*

$$\int_0^1 (\sin \pi t) f(t) dt = \frac{2}{\pi}\left\{\sin^2\frac{\pi}{4n}[f(0) + f(1)] + \sin\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} \sin\frac{\pi k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right\} + R_n(f; P, T^*),$$

погрешность которой на всем классе $H^\omega[0,1]$ *равна*

$$\mathcal{E}_n(H^\omega; T^*) = 2\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^{-1} \int_0^{1/2n} \cos\pi\Big(t - \frac{1}{2n}\Big)\omega(t) dt; \tag{5}$$

в частности, при $\omega(t) = t$ *имеем*

$$\mathcal{E}_n(W^{(1)}_\infty; T^*) = \mathcal{E}_n(H^1; T^*) = \frac{2}{\pi^2} \operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}.$$

Теорема 4. *Среди всех квадратурных формул вида* (4) *наилучшей по коэффициентам при фиксированном векторе узлов*

$$T^{**}=\Big\{t_0=0,\ t_k=\frac{2k-1}{2n},\quad k=1,2,\ldots,n;\ t_{n+1}=1\Big\}$$

является формула

$$\int\limits_0^1(\sin\pi t)f(t)dt=\frac{2}{\pi}\Bigg\{\sin^2\frac{\pi}{8n}[f(0)+f(1)]+\sin\frac{3\pi}{8n}\sin\frac{5\pi}{8n}\left[f\left(\frac{1}{2n}\right)+f\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right]+$$

$$+\sin\frac{\pi}{2n}\sum_{k=2}^{n-1}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\Bigg\}+R_n(f;T^{**}),$$

погрешность которой на всем классе $H^\omega[0,1]$ *имеет вид*

$$\mathcal{E}_n(H^\omega;T^{**})=4\sin\frac{\pi}{4n}\int\limits_0^{1/4n}\cos\pi\Big(t-\frac{1}{4n}\Big)\omega(t)dt+2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}\int\limits_0^{1/2n}\cos\pi\Big(t-\frac{1}{2n}\Big)\omega(t)dt. \qquad (6)$$

В частности, при $\omega(t)=t$ *из* (6) *следует, что*

$$\mathcal{E}_n(W^{(1)}_\infty;T^{**})=\mathcal{E}_n(H^1;T^{**})=\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{4n}\left(1-\frac{\sin(\pi/(4n))}{\sin(\pi/(2n))}\right).$$

Приведем некоторые утверждения для класса функций $W^{(1)}L[0,1]$.

Теорема 5. *Среди квадратурных формул вида* (3) *при* $m=1$, $j=1$ *наилучшей для класса* $W^{(1)}L[0,1]$ *является формула*

$$\int\limits_0^1 f(t)\sin\pi t\,dt=\frac{2}{\pi n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{\pi}\arccos\left(1-\frac{2k-1}{n}\right)\right)+R_n(f;\sin\pi t), \qquad (7)$$

с погрешностью на классе $W^{(1)}L[0,1]$ *равной* $\mathcal{E}_n(W^{(1)}L;\sin\pi t)=\dfrac{1}{\pi n}$.

Теорема 6. *Среди всех квадратурных формул вида* (1) *с весом* $q(t)=(1-t^2)^{-1/2}$ *на* $[0,1]$ *наилучшей на классе* $W^{(1)}L[0,1]$ *является формула*

$$\int\limits_0^1\frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^n f\left(\sin\frac{2k-1}{4n}\pi\right)+R_n\big(f;(1-t^2)^{-1/2}\big)$$

с погрешностью $\mathcal{E}_n\Big(W^{(1)}L;(1-t^2)^{-1/2}\Big)=\dfrac{\pi}{4n}$.

Теорема 7. *Среди всех квадратурных формул вида* (1) *с весом* $q(t)=(1+t^2)^{-1}$ *на полуоси* $[a,b)=[0,+\infty)$ *наилучшей на классе* $W^{(1)}L[0,+\infty)$ *является формула*

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(t)dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^n f\left(\operatorname{tg}\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)+R_n\big(f;(1+t^2)^{-1}\big).$$

При этом погрешность формулы на всём классе $W^{(1)}L[0,+\infty)$ *равна*

$$\mathcal{E}_n\Big(W^{(1)}L[0,+\infty);(1+t^2)^{-1}\Big)=\frac{\pi}{4n}.$$

Имеет место более общее утверждение для класса $W^{(1)}L[a,b]$ и веса $q(t)=m^{\alpha t}$, где $m>0$, $m\neq 1$, α — произвольное действительное число.

Теорема 8. *Среди квадратурных формул вида*

$$\int\limits_a^b m^{\alpha t} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f; m^{\alpha t})$$

наилучшей на классе $W^{(1)}L[a,b]$ *является формула с вектором коэффициентов*

$$P = \left\{p_k\colon\ p_k = \frac{1}{\alpha \ln m}(m^{\alpha b} - m^{\alpha a}) \cdot \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n\right\}$$

и вектором узлов

$$T = \left\{t_k\colon\ t_k = \frac{1}{\alpha \ln m} \cdot \ln\left(m^{\alpha b}\frac{2k-1}{2n} + m^{\alpha a}\frac{2n-2k+1}{2n}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n\right\},$$

причем

$$\mathcal{E}_n(W^{(1)}L; m^{\alpha t}) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{m^{\alpha b} - m^{\alpha a}}{\alpha \ln m}.$$

В случае веса $q(t) = e^{-t}$ *на полуоси* $[a, b) = [0, +\infty)$ *наилучшая квадратурная формула имеет вид*

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-t} f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\ln\frac{2n}{2n-2k+1}\right) + R_n(f; e^{-t}),$$

а ее погрешность на всем классе $W^{(1)}L$ *равна* $\mathcal{E}_n\big(W^{(1)}L; e^{-t}\big) = \dfrac{1}{2n}$.

Список литературы

1. *Никольский С.М.* Квадратурные формулы. — М.: Наука. 1986. 256 с.
2. *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов. — М.: Наука. 1967. 500 с.
3. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. — М.: Наука. 1975. 631 с.
4. *Жилейкин Я.М.*, *Кукаркин А.Б.* Об оптимальном вычислении интегралов от быстроосциллирующих функций // ЖВМ и МФ. 1978. Т. 18, № 2. С. 294-301.
5. *Задирак В.К.*, *Василенко С.С.* Оптимальные квадратурные формулы вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций из некоторых классов и их реализация на ЭВМ. — Киев. 1974. 37 с.
6. *Бусарова Т.Н.* Об оптимизации приближенного интегрирования быстроосциллирующих функций // Укр. матем. журнал. 1986. Т. 38, № 1. С. 89-93.
7. *Шабозов М.Ш.*, *Сабоиев Р.С.* Об оптимизации приближенного интегрирования быстро осциллирующих функций // ДАН Республики Таджикистан. 2004. Т. 47, № 3. С. 14-19.
8. *Шабозов М.Ш.*, *Сабоиев Р.С.* О наилучших по коэффициентам весовых квадратурных формулах, имеющих фиксированные особенности // Вестник ХоГУ. Серия 1. 2006, № 7. С. 42-54.
9. *Шабозов М.Ш.*, *Парвонаева З.А.* О наилучших по коэффициентам весовых квадратурных формулах для классов функций, задаваемых модулями непрерывности // ДАН Республики Таджикистан. 2006. Т. 49, № 7. С. 589-596.
10. *Парвонаева З.А.* Оптимизация весовых квадратурных формул для классов функций малой гладкости // ДАН Республики Таджикистан. 2008. Т. 51, № 2. С. 87-96.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 217–223

Точные неравенства типа Колмогорова для функций, принадлежащих весовому пространству Бергмана

М. С. Саидусайнов

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан

Аннотация. Получено точное неравенство типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$ с весом $\gamma := \gamma(|z|) > 0$ для аналитических в единичном круге функций и даны некоторые его приложения к экстремальным задачам теории аппроксимации в комплексной плоскости.

1. Введение. В теории приближений и её приложения хорошо известны неравенства Колмогорова на всей оси $\mathbb{R}$, которые оценивают сверху L_q – норму промежуточной производной функции через L_p–норму самой функции и L_s–норму её старшей производной:

$$\|f^{(\nu)}\|_{L_q(\mathbb{R})} \leqslant \mathcal{K}\|f\|^{\alpha}_{L_p(\mathbb{R})} \cdot \|f^{(r)}\|^{1-\alpha}_{L_s(\mathbb{R})}, \quad \alpha = \frac{n-\nu-\frac{1}{s}+\frac{1}{q}}{n-\frac{1}{s}+\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

Неравенства вида (1) посвящено большое число работ. Отметим, что интерес к точным неравенствам (1), в частности, вызван их связью с задачей Стечкина о наилучшем приближении оператора дифференцирования ограниченными операторами и другими родственными задачами. Подробную информацию об исследованиях неравенств Колмогорова и связанных с ними экстремальных задач можно найти в обзорной статье [1] и в сравнительно недавно вышедшей монографии [2]. Что же касается неравенства вида (1) для аналитических в единичном круге функций в пространствах Харди $H_p (p \geqslant 1)$ и Бергмана $B_p (p \geqslant 1)$, то в случае $p = 2$ такие неравенства были получены С.Б.Вакарчуком [3] и С.Б.Вакарчуком и М.Б.Вакарчуком [4–7], а в случае $1 \leqslant p \leqslant \infty$ в пространстве Харди – Р.Р.Акопяном [8]. Отметим также, что К.Ю.Осипенко [9] получил точное неравенство Колмогорова в случае равномерных норм на $\mathbb{R}$ для функций, аналитических в полосе $|Imz| < \beta$.

В работе [10] для последовательных производных $f_a^{(r-\nu)}(z) = \partial^{r-\nu} f(\rho e^{it})/\partial t^{r-\nu}$ $(\nu = \overline{1, r-1},\ 0 < \rho \leqslant 1)$ $(r-\nu)$-го порядка по аргументу функции $f(z)$, определяемой рекуррентными равенствами $f_a^{(r-\nu)}(z) = \{f_a^{(r-\nu-1)}(z)\}'_a, (r-\nu) \in \mathbb{N}, f'_a(z) = f'(z)zi$ в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$ доказано следующее мультипликативное неравенство типа Харди-Литтльвуда-Полиа:

$$\|f_a^{(r-\nu)}\|_{2,\gamma} \leqslant \|f_a^{(r)}\|^{1-\nu/r}_{2,\gamma}\|f\|^{\nu/r}_{2,\gamma}.$$

В данном сообщение найдены точные неравенства Колмогорова в весовом пространстве Бергмана $B_{q,\gamma}$ аналитических в единичном круге функций, у которых обычная производная r-го порядка $f^{(r)}(z) \in B_{2,\gamma}$. Полученные результаты продолжают наши исследования [10, 11] в этом направлении и обобщают недавно полученные результаты из работы [5].

© М. С. Саидусайнов, 2016

2. Неравенства для норм последовательных производных функций, принадлежащих пространству $B_{2,\gamma}$. Приведем сначала некоторые обозначения и определения из [12], нужные нам в дальнейшем. Пусть $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $\mathcal{A}(U)$ – множество аналитических в круге U функций. Для произвольной функции $f \in \mathcal{A}(U)$ при $\rho \in (0,1)$ положим

$$M_q(f,\rho) := \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt\right)^{1/q}, & \text{если } 1 \leqslant q < \infty, \\ \max\left\{|f(\rho e^{it})| : t \in [0,2\pi)\right\}, & \text{если } q = \infty, \end{cases}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Через $\mathscr{L}_q := \mathscr{L}_q(U), 1 \leqslant q < \infty$ обозначим банахово пространство комплекснозначных в U функций f, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{\mathscr{L}_q} := \left(\frac{1}{2\pi}\iint\limits_U |f(z)|^q dxdy\right)^{1/q} = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} \rho|f(\rho e^{it})|^q d\rho dt\right)^{1/q}.$$

Пусть $\gamma := \gamma(|z|)$ – неотрицательная измеримая неэквивалентная нулю функция, суммируемая в круге U. Через $\mathscr{L}_{q,\gamma} := \mathscr{L}_q(U,\gamma), 1 \leqslant q < \infty$ – обозначим множество комплекснозначных в U функций f, для которых $\gamma^{1/q} f \in \mathscr{L}_q(U)$, $\|f\|_{\mathscr{L}_{q,\gamma}} = \|\gamma^{1/q} f\|_{\mathscr{L}_q}$, $1 \leqslant q < \infty$.

Под $B_{q,\gamma} := B_q(U,\gamma), 1 \leqslant q < \infty$ понимаем банахово пространство функций $f \in \mathcal{A}(U)$ таких, что $f \in \mathscr{L}_{q,\gamma}$. При этом

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\int\limits_0^1 \rho\gamma(\rho) M_q^q(f,\rho) d\rho\right)^{1/q}. \tag{2}$$

В частном случае, когда $\gamma(\rho) \equiv 1$, пространство $B_q := B_{q,1}$ является обычным пространством Бергмана [12]. Рассмотрим подробно случай $q = 2$. Для произвольного элемента

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k \in B_{2,\gamma}$$

в силу (2) запишем равенство [10]

$$\|f\|_{2,\gamma}^2 := \|f\|_{B_{2,\gamma}}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2 \int\limits_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho) d\rho. \tag{3}$$

Всюду далее полагаем $\alpha_{k,r} := k(k-1)\ldots(k-r+1),\ k,r \in \mathbb{N}, k \geqslant r$. Под $\mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)}$, где $r \in \mathbb{N}$, будем понимать множество функций $f \in \mathcal{A}(U)$, у которых производная

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r}$$

принадлежит пространству $B_{2,\gamma}$, то есть

$$\|f^{(r)}\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \int\limits_0^1 \rho^{2(k-r)+1}\gamma(\rho) d\rho. \tag{4}$$

Аналогичным образом, для произвольной функции $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, её промежуточные производные $f^{(r-\nu)}(\nu = \overline{1, r-1})$ принадлежат $B_{2,\gamma}$:

$$\|f^{(r-\nu)}\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=r-\nu}^{\infty} \alpha_{k,r-\nu}^2 |c_k(f)|^2 \int_0^1 \rho^{2(k-r+\nu)+1}\gamma(\rho)d\rho. \tag{5}$$

Таким образом, из соотношений (3)-(5) следует, что сама функция f и все её промежуточные производные $f^{(r-\nu)}(\nu = \overline{0, r-1})$ также принадлежат пространству $B_{2,\gamma}$.

Теорема 1. *Пусть* $r, \nu \in \mathbb{N}$, $r \geqslant \nu > 1$, $\gamma(|z|) > 0$ – *произвольная суммируемая не эквивалентная нулю интегрируемая в* U *функция. Тогда для произвольной функции* $f \in \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, *у которой коэффициенты*

$$c_k(f) = 0 \ (k = r-\nu, ..., r-2, r-1)$$

справедливо неравенство

$$\|f^{(r-\nu)}\|_{2,\gamma} \leqslant \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\int_0^1 \rho^{2\nu+1}\gamma(\rho)d\rho}{\left(\int_0^1 \rho^{2r+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{\nu/r} \cdot \left(\int_0^1 \rho\gamma(\rho)d\rho\right)^{1-\nu/r}} \right\}^{1/2} \cdot \|f\|_{2,\gamma}^{\nu/r} \cdot \|f^{(r)}\|_{2,\gamma}^{1-\nu/r}. \tag{6}$$

Неравенство (6) *является точным в том смысле, что существует функция* $f_0 \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, *обращающая* (6) *в равенство.*

Доказательство. Для произвольной функции $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, удовлетворяющей условию теоремы, учитывая (5), норму промежуточных производных $f^{(r-\nu)}(\nu = 1, r-1)$ представим в виде

$$\|f^{(r-\nu)}\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r-\nu}^2 |c_k(f)|^2 \int_0^1 \rho^{2(k-r+\nu)+1}\gamma(\rho)d\rho =$$

$$= \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^{2(1-\nu/r)} \left\{ |c_k(f)|^2 \int_0^1 \rho^{2(k-r)+1}\gamma(\rho)d\rho \right\}^{1-\nu/r} \cdot \left\{ \frac{\alpha_{k,r-\nu}}{\alpha_{k,r}^{1-\nu/r}} \right\}^2 \times$$

$$\times \left\{ |c_k(f)|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho \right\}^{\nu/r} \cdot \frac{\int_0^1 \rho^{2(k-r+\nu)+1}\gamma(\rho)d\rho}{\left(\int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{\nu/r} \left(\int_0^1 \rho^{2(k-r)+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1-\nu/r}}. \tag{7}$$

Полагая

$$\varphi_{r,\nu}(\gamma, k) := \frac{\alpha_{k,r-\nu}}{\alpha_{k,r}^{1-\nu/r}} \frac{\int_0^1 \rho^{2(k-r+\nu)+1}\gamma(\rho)d\rho}{\left(\int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{\nu/r} \left(\int_0^1 \rho^{2(k-r)+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1-\nu/r}}, \tag{8}$$

из равенства (7), учитывая обозначения (8), получаем

$$\|f^{(r-\nu)}\|_{2,\gamma}^2 \leqslant \left\{ \sup_{k \geqslant r} \varphi_{r,\nu}(\gamma, k) \right\}^2 \cdot \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^{2(1-\nu/r)} \left\{ |c_k(f)|^2 \int_0^1 \rho^{2(k-r)+1}\gamma(\rho)d\rho \right\}^{1-\nu/r} \times$$

$$\times\left\{|c_k(f)|^2\int\limits_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right\}^{\nu/r}. \qquad (9)$$

Применяя к сумме в правой части (9) неравенство Гёльдера для сумм в случае $p=r/(r-\nu)$, $p^{'}=r/\nu$ и учитывая равенства (3) и (4), имеем

$$\|f^{(r-\nu)}\|_{2,\gamma}\leqslant\left\{\sup_{k\geqslant r}\varphi_{r,\nu}(\gamma,k)\right\}\cdot\left\{\sum_{k=r}^{\infty}|c_k(f)|^2\int\limits_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right\}^{\nu/(2r)}\times$$

$$\times\left(\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}^2|c_k(f)|^2\int\limits_0^1\rho^{2(k-r)+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{(r-\nu)/(2r)}=$$

$$=\left\{\sup_{k\geqslant r}\varphi_{r,\nu}(\gamma,k)\right\}\cdot\|f\|_{2,\gamma}^{\nu/r}\cdot\|f^{(r)}\|_{2,\gamma}^{1-\nu/r}. \qquad (10)$$

Легко доказать, что

$$\sup\{\varphi_{r,\nu}(\gamma;k):k\geqslant r\}=\varphi_{r,\nu}(\gamma;r):=$$

$$=\frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}}\cdot\frac{\left(\int\limits_0^1\rho^{2\nu+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/2}}{\left(\int\limits_0^1\rho^{2r+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{\nu/(2r)}\left(\int\limits_0^1\rho\gamma(\rho)d\rho\right)^{(r-\nu)/(2r)}}. \qquad (11)$$

Поставляя равенство (11) в (10) получаем требуемое неравенство (6), чем и завершаем доказательство теоремы 1. Установим теперь точность неравенства (6).

Рассмотрим функцию $f_0(z)=z^r\in\mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, удовлетворяющую ограничению на коэффициенты Тейлора, сформулированному в условиях теоремы. Поскольку $f_0^{(r)}(z)=\alpha_{r,r}$ и $f_0^{(r-\nu)}(z)=\alpha_{r,r-\nu}z^{\nu}$, то, исходя из равенств (3)-(5), получаем

$$\|f_0\|_{2,\gamma}=\left(\int\limits_0^1\rho^{2r+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/2}, \qquad (12)$$

$$\left\|f_0^{(r)}\right\|_{2,\gamma}=\alpha_{r,r}\left(\int\limits_0^1\rho\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/2}, \qquad (13)$$

$$\left\|f_0^{(r-\nu)}\right\|_{2,\gamma}=\alpha_{r,r-\nu}\left(\int\limits_0^1\rho^{2\nu+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/2}. \qquad (14)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что если в неравенстве (6) функцию f заменить на f_0 и воспользоваться соотношениями (12)-(14), то неравенство (6) обращается в равенство, чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Из доказанной теоремы сразу вытекает

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 *при* $\gamma(\rho)\equiv 1$ *имеет место точное неравенство*

$$\|f^{(r-\nu)}\|_{B_2}\leqslant\frac{\alpha_{r,r-\nu}(r+1)^{\nu/(2r)}}{(\alpha_{r,r})^{1-\nu/r}(\nu+1)^{1/2}}\cdot\|f\|_{B_2}^{\nu/r}\left\|f^{(r)}\right\|_{B_2}^{1-\nu/r},$$

которое обращается в равенство для функции $f_0(z)=z^r\in\mathcal{B}_2^{(r)}$.

Отметим, что утверждение следствие 1 ранее получена в [5].

Пусть $\mathcal{P}_n := \{p_n(z) : p_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k,\ a_k \in \mathbb{C}\}$ – подпространство комплексных алгебраических полиномов степени n. Для произвольной функции $f \in B_{2,\gamma}$ равенством

$$E_{n-1}(f) := \inf\left\{\|f - p_{n-1}\|_{B_{2,\gamma}} :\ p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\right\} \tag{15}$$

определим наилучшее приближение f подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$ в пространстве $B_{2,\gamma}$. Далее нам понадобится следующая

Лемма [10]. *Среди произвольных полиномов $p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ наименьшее значение величины* (15) *доставляет частная сумма Тейлора*

$$T_{n-1}(f,z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k$$

разложения функции $f(z)$ в степенной ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k$$

в круге $|z| < 1$. При этом

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma} = \|f - T_{n-1}(f)\|_{2,\gamma} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \int\limits_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right\}^{1/2}. \tag{16}$$

В частности, для $f \in B_2$ из (15) следует равенство

$$E_{n-1}(f)_2 = \|f - T_{n-1}(f)\|_2 = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{2(k+1)}\right\}^{1/2}. \tag{17}$$

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть $r,\nu \in \mathbb{N}$ и $r \geqslant \nu > 1$. Тогда для произвольной функции $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}$ и любого натурального $n > r$ справедливо неравенство*

$$E_{n-r+\nu-1}(f^{(r-\nu)}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha_{n,r-\nu}}{\alpha_{n,r}^{1-\nu/r}} \cdot \frac{\left(\int\limits_0^1 \rho^{2(n-r+\nu)+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/2}}{\left(\int\limits_0^1 \rho^{2(n-r)+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{(r-\nu)/(2r)} \cdot \left(\int\limits_0^1 \rho^{2n+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{\nu/(2r)}} \times$$

$$\times (E_{n-1}(f))^{\nu/r} \cdot \left(E_{n-r-1}(f^{(r)})\right)^{1-\nu/r}. \tag{18}$$

Существует функция $f_1 \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, для которой неравенство (18) *обращается в равенство.*

Доказательство. В самом деле, для произвольной функции $f \in B_{2,\gamma}$ полагаем

$$R_{n-1}(f,z) := f(z) - T_{n-1}(f,z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k(f) z^k. \tag{19}$$

Ясно, что $R_{n-1}(f,z) \in B_{2,\gamma}$. Из (19) в силу (16) вытекает, что

$$\|R_{n-1}(f)\|_{B_{2,\gamma}} = E_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}}. \tag{20}$$

Пусть $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$, где $n,\nu \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Так как $T_{n-1}^{(\nu)}(f,z) = T_{n-\nu-1}(f^{(\nu)},z)$, то для $n \geqslant r > \nu > 1$ получаем

$$R_{n-1}^{(r-\nu)}(f,z) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r-\nu} c_k(f) z^{k-r+\nu} = f^{(r-\nu)}(z) - T_{n-r+\nu-1}(f^{(r-\nu)},z) = R_{n-r+\nu-1}(f^{(r-\nu)},z),$$

$$R_{n-1}^{(r)}(f,z)=f^{(r)}(z)-T_{n-r-1}(f^{(r)},z)=R_{n-r-1}(f^{(r)},z).$$

Из полученных равенств вытекает, что

$$\|R_{n-1}^{(r-\nu)}(f)\|_{B_{2,\gamma}}=E_{n-r+\nu-1}(f^{(r-\nu)})_{B_{2,\gamma}},\ \nu=\overline{0,r-1}. \tag{21}$$

Применяя ход рассуждений теоремы 1 к функции $R_{n-1}(f,z)$, с учётом того что на этот раз функция натурального аргумента $\varphi_{r,\nu}(\gamma;k)$, определённая формулой (8), рассматривается для всех натуральных $k\geqslant n>r$, имеем:

$$\max\{\varphi_{r,\nu}(\gamma;k):k\geqslant n\}=\varphi_{r,\nu}(\gamma;n):=$$

$$=\frac{\alpha_{n,r-\nu}}{\alpha_{n,r}^{1-\nu/r}}\cdot\frac{\left(\int\limits_0^1\rho^{2(n-r+\nu)+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/2}}{\left(\int\limits_0^1\rho^{2n+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{\nu/(2r)}\left(\int\limits_0^1\rho^{2(n-r)+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{(r-\nu)/(2r)}}, \tag{22}$$

а потому запишем

$$\|R_{n-1}^{(r-\nu)}(f)\|_{B_{2,\gamma}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha_{n,r-\nu}}{\alpha_{n,r}^{1-\nu/r}}\cdot\frac{\left(\int\limits_0^1\rho^{2(n-r+\nu)+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/2}}{\left(\int\limits_0^1\rho^{2(n-r)+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{(r-\nu)/(2r)}\cdot\left(\int\limits_0^1\rho^{2n+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{\nu/(2r)}}\quad\times$$

$$\times\|R_{n-1}(f)\|_{B_{2,\gamma}}^{\nu/r}\cdot\|R_{n-r-1}(f^{(r)})\|_{B_{2,\gamma}}^{1-\nu/r}. \tag{23}$$

Требуемое неравенство (18) с учётом равенств (20)-(22) получаем из соотношения (23). Установим точность неравенства (18).

Рассмотрим функцию $f_1(z):=z^n\in\mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}, n>r$. Поскольку

$$f_1^{(r-\nu)}(z)=\alpha_{n,r-\nu}z^{n-r+\nu},\ f_1^{(r)}(z)=\alpha_{n,r}z^{n-r},$$

то, учитывая, что

$$\|f_1\|_{B_{2,\gamma}}=\left(\int\limits_0^1\rho^{2n+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/2}, \tag{24}$$

$$\|f_1^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}}=\alpha_{n,r-\nu}\left(\int\limits_0^1\rho^{2(n-r+\nu)+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/2}, \tag{25}$$

$$\|f_1^{(r)}\|_{B_{2,\gamma}}=\alpha_{n,r}\left(\int\limits_0^1\rho^{2(n-r)+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/2}, \tag{26}$$

и подставляя в левую и правую части неравенства (18) вместо $f, f^{(r-\nu)}$ и $f^{(r)}$ соответственно $f_1, f_1^{(r-\nu)}$ и $f_1^{(r)}$, убедимся в точности указанного неравенства. Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 при $\gamma(\rho)\equiv 1$ вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть $r,\nu\in\mathbb{N}$ и $r>\nu>1$. Тогда для произвольной функции $f\in\mathcal{B}_2^{(r)}$ и любого натурального числа $n>r$ справедливо неравенство*

$$E_{n-r+\nu-1}(f^{(r-\nu)})\leqslant\frac{\alpha_{n,r-\nu}(n-r+1)^{(r-\nu)/(2r)}(n+1)^{\nu/(2r)}}{(\alpha_{n,r})^{1-\nu/r}(n-r+\nu+1)^{1/2}}\left(E_{n-1}(f)\right)^{\nu/r}\bigl(E_{n-r-1}(f^{(r)})\bigr)^{1-\nu/r}, \tag{27}$$

которое является точным на множестве $\mathcal{B}_2^{(r)}$.

Неравенство (27) ранее было получена в [5]. Отметим, что полученные результаты легко распространяются на случай аналитических в бикруге функций двух комплексных переменных.

Список литературы

1. *Арестов В.В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи — Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 6. С. 89-124.
2. *Бабенко В.Ф.*, *Корнейчук Н.П.*, *Кофанов В.А.*, *Пичугов С.А.* Неравенства для производных и их приложения. — Киев. Наукова думка. 2003. 590 с.
3. *Вакарчук С.Б.* О неравенствах типа Колмогорова для некоторых банаховых пространств аналитических функций // Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии. В сб. науч. работ Ин-та математики АН УССР. — Киев. 1988. С. 4-7.
4. *Вакарчук С.Б.*, *Вакарчук М.Б.* О мультипликативных неравенствах типа Харди-Литтльвуда-Полиа для аналитических функций одной и двух комплексных переменных // Віснік Дніпропетровского університету. Серия: Математика. 2010. Т. 18, №6/1. С. 81-87.
5. *Вакарчук С.Б.*, *Вакарчук М.Б.* О неравенствах типа Колмогорова для аналитических в круге функций // Віснік Дніпропетровского університету. Серия: Математика. 2012. Т. 17, №6/1. С. 82-88.
6. *Вакарчук С.Б.*, *Вакарчук М.Б.* О неравенствах типа Колмогорова для аналитических в единичном бикруге функций // Віснік Дніпропетровского університету. Серия: Математика. 2013. Т. 18, №6/1. С. 61-66.
7. *Вакарчук С.Б.*, *Вакарчук М.Б.* Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации // Укр. матем. журнал. 2011. Т. 63, № 12. С. 1579-1601.
8. *Акопян Р.Р.* Неравенство Колмогорова для функций, аналитических в полуплоскости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 3-9.
9. *Osipenko K.Yu.* Optimal Recovery of Analytic Function. Huntington (NY): Nova Science Publication Jnc. 2000.
10. *Шабозов М.Ш.*, *Саидусайнов М.С.* Неравенство типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана // ДАН Республики Таджикистан. 2007. Т. 50, № 1. С. 14-19.
11. *Саидусайнов М.С.* Неравенство типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана для аналитических функций одной переменной // Изв. АН Республики Таджикистан. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2014. № 4(157). С. 24-31.
12. *Вакарчук С.Б.*, *Шабозов М.Ш.* О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Матем. сборник. 2010. Т. 201. № 8. С. 3-22.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 224–226

Оптимальные квадратурные формулы для приближённого вычисления криволинейных интегралов первого типа для некоторых классов функций и кривых

Д. С. Сангмамадов[1], Ш. Дж. Хамдамов[2], Ф. М. Мирпоччоев[2]

[1] *Таджикский государственный университет коммерции, Душанбе, Таджикистан*
[2] *Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова, Душанбе, Таджикистан*

Аннотация. Для некоторых классов функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности, найдены оптимальные квадратурные формулы для приближённого вычисления криволинейных интегралов первого рода и вычислены оптимальные оценки погрешности указанных классов функций.

В статье рассматривается задача о приближённом вычислении криволинейных интегралов первого рода для классов функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности. Пусть функция $f(M) = f(x_1, x_2)$, определена и интегрируема вдоль кривой $\Gamma \in R^2$ и

$$J(f;\,\Gamma) = \int\limits_{\Gamma} f(M)ds. \tag{1}$$

Предположим, что на кривой Γ установлено положительное направление так, что положение точки $M \in \Gamma$ определено длиной дуги $s = \overset{\smile}{AM}$, отсчитываемой от начальной точки A. Тогда Γ выразится параметрическими уравнениями $x_i = \varphi_i(s)$, $i = 1, 2$; $0 \leqslant s \leqslant L$, а интеграл (1) запишется в виде

$$J(f;\,\Gamma) = \int\limits_{0}^{L} f(\varphi_1(s), \varphi_2(s))ds. \tag{2}$$

Всякая квадратурная формула вида

$$J(f;\,\Gamma) \approx L_N(f;\,\Gamma; P, S) := \sum_{k=1}^{N} p_k f(\varphi_1(s_k), \varphi_2(s_k)) \tag{3}$$

для приближённого вычисления интеграла (2) задается векторами коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^N$ и узлов $S = \{s_k : 0 \leqslant s_1 < \ldots < s_N \leqslant L\}$. Через $\mathcal{A}$ обозначим множество векторов (P, S), для которых формула (3) имеет смысл. Через $\mathfrak{N}_L$ обозначим множество кривых Γ, заданных параметрическими уравнениями $x_i = \varphi_i(s), i = \overline{1,2}$, длины которых равно L, а через $\mathfrak{M}$ – класс функций $f(\varphi_1(s), \varphi_2(s))$, определённых на кривых $\Gamma \in \mathfrak{N}_L$. Положим $|R_N(f;\,\Gamma; P, S)| = |J(f;\Gamma) - L_N(f;\,\Gamma; P, S)|$. За величину, характеризующую наибольшую погрешность формулы (3) на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}_L$, примем величину

$$R_N(\mathfrak{M};\,\mathfrak{N}_L;\,P, S) = \sup\{\sup\{|R_N(f;\,\Gamma; P, S)| :\ f \in \mathfrak{M}\} :\ \Gamma \in \mathfrak{N}_L\}.$$

Требуется найти величину [1]

© Д. С. Сангмамадов, Ш. Дж. Хамдамов, Ф. М. Мирпоччоев, 2016

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M};\,\mathfrak{N}_L) = \inf\{R_N(\mathfrak{M};\,\mathfrak{N}_L;\,P,S):\ (P,S)\in\mathcal{A}\} \tag{4}$$

и указать вектор (P^*,S^*), реализующий точную нижнюю грань в (4).

Через $H^\omega := H^\omega[0,L]$ обозначим множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию $|\varphi(t')-\varphi(t'')| \leqslant \omega(|t'-t''|)$, $\forall\, t',\, t''\in[0,L]$, где $\omega(\delta)$ – заданный модуль непрерывности, а через $\overline{H}^{\omega_1,\omega_2}$ обозначим класс кривых $\Gamma\subset R^2$, у которых координатные функции $\varphi_i(s)\in H^{\omega_i}$, $i=\overline{1,2}$. В частности, если $\omega_i(t)=\mathcal{K}_i t^{\alpha_i}$ $(0<\alpha_i\leqslant 1,\ i=1,2)$, то класс $H^{\omega_i}[0,L]$ совпадает с классом Гёльдера $\mathcal{K}_iH^{\alpha_i}[0,L]$ с константами Гёльдера $\mathcal{K}_i>0$ $(i=1,2)$. Если же $\alpha_i=1$, то класс Гёльдера превращается в класс Липшица $\mathcal{K}_iH^1[0,L]$.

Через $\mathfrak{M}^\omega_{\rho_p}$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ обозначим класс функций $f(M):=f(x_1,x_2)$, таких для любых двух точек $M'(x_1',x_2'), M''(x_1'',x_2'')\in\Gamma$ выполняется неравенство

$$|f(M')-f(M'')| \leqslant \omega\left(\sqrt[p]{|x_1'-x_1''|^p+|x_2'-x_2''|^p}\right). \tag{5}$$

В частности, если кривая $\Gamma\subset H^{\omega_1,\omega_2}$, то из (5) для любых $t',t''\in[0,L]$ вытекает неравенство

$$|f(M')-f(M'')| \leqslant \omega\left(\sqrt[p]{\omega_1^p(|t'-t''|)+\omega_2^p(|t'-t''|)}\right).$$

Имеет место следующая

Теорема. *Среди всех квадратурных формул вида (3) с произвольными векторами коэффициентов и узлов (P,S) наилучшей на классе $\mathfrak{M}^\omega_{\rho_p}$ и кривых $H^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ является формула средних прямоугольников*

$$\int\limits_\Gamma f(M)ds = \frac{L}{N}\sum_{k=1}^N f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right),\varphi_2\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right)+R_N(f),$$

где $x_i=\varphi_i(s)$ $(i=1,2)$ – параметрические уравнения кривой Γ, L – её длина. При этом точная оценка погрешности наилучшей формулы на указанных классах функций и кривых равна

$$\mathscr{E}_N\left(\mathfrak{M}^\omega_{\rho_p};H^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right) = \\ = 2N\int\limits_0^{L/(2N)}\omega\left(\sqrt[p]{\omega_1^p(s)+\omega_2^p(s)}\right)ds,\ 1\leqslant p\leqslant\infty. \tag{6}$$

Из этой теоремы вытекает ряд следствий.

Следствие 1. *Если $\omega(t)=\mathcal{K}t^\alpha$, $\mathcal{K}>0$, $0<\alpha\leqslant 1$, то из (6) вытекает равенство*

$$\mathscr{E}_N\left(\mathfrak{M}^{\mathcal{K}t^\alpha}_{\rho_p};H^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right) = 2N\mathcal{K}\int\limits_0^{L/(2N)}\left(\omega_1^p(s)+\omega_2^p(s)\right)^{\alpha/p}ds,\ 1\leqslant p\leqslant\infty. \tag{7}$$

В частности, если $\alpha=1$, то из (7) вытекает равенство [2,3]:

$$\mathscr{E}_N\left(\mathfrak{M}^{\mathcal{K}t}_{\rho_p};H^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right) = 2N\mathcal{K}\int\limits_0^{L/(2N)}\sqrt[p]{\omega_1^p(s)+\omega_2^p(s)}\,ds,\ 1\leqslant p\leqslant\infty.$$

Следствие 2. *Если в условиях теоремы полагать* $\omega(t) = \mathcal{K}t$, $\omega_1(t) = \mathcal{K}_1 t$, $\omega_2(t) = \mathcal{K}_2 t$, *то имеем*:

$$\mathscr{E}_N \left(\mathfrak{M}_{\rho_p}^{\mathcal{K}t}; H^{\mathcal{K}_1 t, \mathcal{K}_2 t}[0, L] \right) = \frac{\mathcal{K}(\mathcal{K}_1^p + \mathcal{K}_2^p)^{1/p} L^2}{4N}.$$

Список литературы

1. *Шабозов М.Ш.* О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых // Матем. заметки. 2014. Т. 96, № 4. С. 637-640.
2. *Сангмамадов Д.С.* К вопросу об оценках квадратурных формул для приближённого вычисления криволинейных интегралов первого рода некоторых классов функций // Изв. АН Республики Таджикистан. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2011. № 3(144). С. 7-13.
3. *Мирпочоев Ф.М.* К вопросу об оценках квадратурных формул для приближённого вычисления криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах кривых, задаваемых модулями непрерывности // ДАН Республики Таджикистан. 2012. Т. 55, № 6. С. 448-454.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 227–230

Интегральное представление двоякопериодических функций класса C^2

Д. С. Сафаров

Курган-Тюбинский госуниверситет им. Н. Хусрава, Курган-Тюбе, Таджикистан

Аннотация. В заметке представлено новое интегральное представление двоякопериодических функций, с основными периодами $\omega_1, \omega_2, Im(\omega_2/\omega_1) \neq 0$, класса C^2 с помощью дифференциального оператора Бицадзе

$$4\partial^2_{\bar{z}} = \partial_{xx} - \partial_{yy} + 2i\partial_{xy},$$

ядром которого служит неэллиптическая квазипериодическая функция, построенная на периодах ω_1, ω_2.

Пусть

$$\omega(z) = z + m_1\omega_1 + m_2\omega_2; m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

преобразования двоякопериодической группы P_2, где ω_1, ω_2 – отличные от нуля комплексные числа, удовлетворяющие условию $Im(\omega_2/\omega_1) \neq 0$. Числа ω_1, ω_2 называются основными периодами группы, через них любой период может быть представлен в виде $\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, где m_1 и m_2 – некоторые положительные или отрицательные целые числа.

Обозначим через R_0 основной параллелограмм периодов с вершинами

$$z_0, z_0 + \omega_1, z_0 + \omega_1 + \omega_2, z_0 + \omega_2,$$

содержаший начало координат, z_0 – произвольная точка плоскости C. В R_0 войдут все внутренные точка параллелограмма, стороны $(z_0, z_0 + \omega_1), (z_0, z_0 + \omega_2)$ и вершина z_0 [1].

Определенная на плоскости C функция $f(z)$ называется двоякопериодической с основными периодами $\omega_1, \omega_2, Im(\omega_2/\omega_1) \neq 0$, если она удовлетворяет соотношением

$$f(z + m_1\omega_1 + m_1\omega_1) = f(z), \quad m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

Обозначим через C^n_*–класс двоякопериодических функций с основными периодами $\omega_1, \omega_2, Im(\omega_2/\omega_1) \neq 0$, принадлежащих пространству $C^n(R_0) \cap C^{n-1}(\overline{R_0}), n \geqslant 1$.

Пусть $\zeta(z)$ – дзета-функция Вейерштрасса [2], построенная на периодах ω_1, ω_2

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega}{}' \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right),$$

где суммирования распространяется на все периоды ω, за исключением $\omega = 0$. $\zeta(z)$ – квазиэллиптическая функция, удовлетворяющая условием

$$\zeta(z + \omega_i) = \zeta(z) + \eta_i, i = 1, 2,$$

где $\eta_i = 2\zeta(\omega_i/2)$–циклические постоянные, и с периодами ω_1, ω_2 связаны соотношением Лежандра $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi i$. Это соотношение есть условием существования функции $\zeta(z)$.

В работе [2] было получено аналог формулы Бореля–Помпея [3], для функций класса C^1_* и оно имеет вид

© Д. С. Сафаров, 2016

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\eta_1 \int\limits_{z_0}^{z_0+\omega_1} w(t)dt - \eta_2 \int\limits_{z_0}^{z_0+\omega_2} w(t)dt\right] - \frac{1}{\pi}\int\limits_{R_0} \frac{\partial w}{\partial \bar{t}}\zeta(t-z)dR_0, \qquad (1)$$

где η_1, η_2 – циклические постоянные.

Первое слагаемое-постоянная, то есть двоякопериодическая. А двоякопериодичность второго слагаемого следует из формулы Грина для функций класса C_*^1

$$\iint\limits_{R_0} \frac{\partial w}{\partial \bar{t}} dR_0 = 0$$

и из квазипериодичности функции $\zeta(z)$.

Из формулы (1) при $f(z) \equiv const$ следует соотношение Лежандра, а когда $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$ утверждение теоремы Лиувилля [1] и явный вид функционала зависящего от w. С помощью формулы (1) исследованы задачи существования и нахождения двоякопериодических обобщенных аналитических функций [4]. Также с помощью этой формулы получены интегральные представления двоякопериодических функций класса C_*^2 посредством $\sigma(z)$ – сигма-функций Вейерштрасса через дифференциальный оператор Лапласа.

Здесь получим формулы интегрального представления функций класса C_*^2 через дифференциальный оператор Бицадзе

$$4\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2i\frac{\partial^2}{\partial x \partial y},$$

с помощью функции

$$\Omega_1(z) = \frac{\bar{z}}{z} + \sum_{\omega}{}' \left[\frac{\overline{z-\omega}}{z-\omega} - \frac{\bar{\omega}}{\omega} - \frac{\bar{\omega}}{\omega}\cdot\frac{z}{\omega} - \frac{\bar{\omega}}{\omega}\cdot\frac{z^2}{\omega^2} + \frac{\bar{z}}{\omega} + \frac{z\cdot\bar{z}}{\omega^2}\right]. \qquad (2)$$

Как показана в работе [5] написанный ряд в правой части (2) абсолютной равномерно сходится в любой конечной области $D \subset C$.

1. Функция $\Omega_1(z)$ является бианалитической функцией, то есть удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} = 0, \text{при } z \neq m_1\omega_1 + m_2\omega_2, m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

2. Частные производные функции $\Omega_1(z)$ вычисляется формулами

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial \bar{z}} = \zeta(z) = \zeta_0(z), \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} = \zeta_1(z), \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \zeta_1(z)}{\partial z} = P_2(z), \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial \bar{z}\partial z} = \wp(z),$$

функции $P_2(z), \wp(z)$ – двоякопериодические функции, причем $P_2(z)$ – бианалитическая, $\wp(z)$ – эллиптическая "пе" – функция Вейерштрасса. Бианалитическая функция $P_2(z)$ была получена и использована при решении краевых задач теории упругости В.Я. Натансоном [6].

3. Функция $\Omega_1(z)$ обладает свойством квазипериодичности

$$\Omega_1(z+\omega_i) - \Omega_1(z) = 2(\eta_{i,0}\bar{z} - \eta_{i,1}z) + \eta_{i,0}\overline{\omega_i} - \eta_{i,1}\omega_i, i = 1, 2, \qquad (4)$$

где $\eta_{i,0} = 2\zeta(\omega_1/2), \eta_{i,1} = \zeta_1(\omega_i/2), i = 1, 2.$

Следует отметить, что в теории эллиптических функций нет аналога функции $\Omega_1(z)$.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть функция* $f(z) \in C_*^2$, *тогда в каждой точке* $z \in R_0$ имеет место формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{z_0}^{z+\omega_2}\left(\eta_{1,0}f(t) + \alpha_i(t,z)\frac{\partial f}{\partial \bar{t}}\right)dt - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{z_0}^{z+\omega_1}\left(\eta_{2,0}f(t) + \alpha_2(t,z)\frac{\partial f}{\partial \bar{t}}\right)dt + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{R_0}\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{t}^2}\Omega_1(t-z)dR_0\right], \qquad (1)$$

где

$$\alpha_i(t,z) = \eta_{i,0}(2\overline{(t-z)} + \overline{\omega}_i) + \eta_{i,1}(2(t-z) + \omega_i), i = 1, 2.$$

Для доказательство этой формулы исключим из R_0 малый круг $U_\varepsilon = \{t : |t-z| \leqslant \varepsilon\}$ с центром в точке z и радиусом ε и к функции $g(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{t}^2}\Omega_1(t-z)$, принадлежащий классу C^2 в области $D_\varepsilon = R_0 \backslash U_\varepsilon$ дважды применим формулу Грина [3]

$$\iint\limits_{R_0}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}dR_0 = \frac{1}{2i}\int\limits_{\partial R_0}w(t)dt,$$

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_\varepsilon}\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{t}^2}\Omega_1(t-z)dR_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R_0}\frac{\partial f}{\partial \bar{t}}\Omega_1(t-z)dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial \bar{t}}\Omega_1(t-z)dt - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial \bar{t}}\zeta(t-z)dR_0 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R_0}\frac{\partial f}{\partial \bar{t}}\Omega_1(t-z)dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial \bar{t}}\Omega_1(t-z)dt - \frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{\partial R_0}f(t)\zeta(t-z)dt - \int\limits_{\partial U_\varepsilon}f(t)\zeta(t-z)dt\right]. \quad (2)$$

Теперь используя свойств функции $\zeta(z)$ и $\Omega_1(z)$ и, их условием квазипериодичности в последнем равенство переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Так как

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{t}} \in C_*^1,$$

то имеем

$$\int\limits_{\partial R_0}\frac{\partial f}{\partial \bar{t}}\Omega_1(t-z)dt = \int\limits_{z_0}^{z+\omega_2}\frac{\partial f}{\partial \bar{t}}\left[\Omega_1(t-z+\omega_1) - \Omega_1(t-z)\right]dt - \int\limits_{z_0}^{z+\omega_1}\frac{\partial f}{\partial \bar{t}}[\Omega_1(t-z+\omega_2) - \Omega_1(t-z)]dt =$$

$$= \int\limits_{z_0}^{z+\omega_2}\frac{\partial f}{\partial \bar{t}}\left[2\eta_{1,0}\overline{(t-z)} - 2\eta_{1,1}(t-z) + \eta_{1,0}\overline{\omega_1} - \eta_{1,1}\omega_1\right]dt - \int\limits_{z_0}^{z+\omega_1}\frac{\partial f}{\partial \bar{t}}[2\eta_{2,0}\overline{(t-z)} - 2\eta_{2,1}(t-z) +$$

$$+ \eta_{2,0}\overline{\omega}_2 - \eta_{2,1}\omega_2]dt,$$

$$\int\limits_{\partial R_0}f(t)\zeta(t-z)dt = \int\limits_{z_0}^{z_0+\omega_2}f(t)\left(\zeta(t-z+\omega_1) - \zeta(t-z)\right)dt - \int\limits_{z_0}^{z_0+\omega_1}f(t)\left(\zeta(t-z+\omega_2) - \zeta(t-z)\right)dt =$$

$$= \eta_{1,0}\int\limits_{z_0}^{z_0+\omega_2}f(t)dt - \eta_{2,0}\int\limits_{z_0}^{z_0+\omega_1}f(t)dt,$$

причем $\eta_{i,0} = \eta_i = 2\zeta(\omega_i/2) = 2\zeta_0(\omega_i/2), i = 1, 2$. С другой стороны легко показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial U_\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial \bar t}\Omega_1(t-z)dt=0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial U_\varepsilon}f(t)\zeta(t-z)dt=2\pi i f(z),$$

так как $\frac{\partial f(t)}{\partial \bar t}=\frac{\partial f(z)}{\partial \bar t}+O(\varepsilon), f(t)=f(z)+O(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$ и $|\Omega_1(e^\theta|\leqslant K$,$k-const, \xi(\varepsilon e^{i\theta})=$ $=\frac{e^{i\theta}}{\varepsilon}+O(\varepsilon)$. Поэтому переходя в равенство (2) к пределу при $\varepsilon\to 0$ получим формулу (1).

Двоякопериодичность двойного интеграла в правой части (1) следует из условия квазипериодичности функций $\Omega_1(z)$, $(\eta_{i,0}\bar z+\eta_{i,1}z), i=1,2$ и равенствами

$$\iint\limits_{R_0}\frac{\partial^2 f}{\partial \bar t^2}dR_0=0, \iint\limits_{R_0}\bar t\frac{\partial^2 f}{\partial \bar t^2}dR_0=\iint\limits_{R_0}\frac{\partial}{\partial \bar t}\left(\bar t\frac{\partial f}{\partial \bar t}\right)dR_0, \iint\limits_{R_0}t\frac{\partial^2 f}{\partial \bar t^2}dR_0=\iint\limits_{R_0}\frac{\partial}{\partial \bar t}\left(t\frac{\partial f}{\partial \bar t}\right)dR_0,$$

$$\Omega_1(t-z-\omega_i)=-2\eta_{i,0}\overline{(t-z)}+2\eta_{i,1}(t-z)-\eta_{i,0}\overline{\omega}_i+\eta_{i,1}\omega_i, i=1,2.$$

Список литературы

1. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. – М.: Наука. 1968. 648 с.
2. *Сафаров Д.С.* Периодические решения эллиптических систем первого порядка // Дифференциальные уравнения 1981. Т. 24, № 9. С. 535-538.
3. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. – М. 1959. 683 с.
4. *Сафаров Д.С.* Двоякоперидические обобщенные аналитические функции // Дифференцмальные уравнения. 1991. Т. 27, № 4. С. 656-664.
5. *Показеев В.В.* Полианалитические двоякопериодические функции // Труды семинара по краевым задачам. 1982. Вып. 18. С. 155- 167.
6. *Натанзон В.Я.* О напряжениях в растягиваемой пластине, ослабленной отверствиями,расположенными в шахматном порядке // Матем. сборник. 1935. Т. 42. Вып. 5.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 231–233

Интерполяционные всплески в задаче оценки кривизны

Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук Уральского федерального университета им. первого Президента России Б. Н. Ельцина,
Екатеринбург, Россия

Аннотация. Интерполяционно-ортогональные периодические всплески, построенные авторами ранее, применены для оценки кривизны графиков гладких функций, заданных своими отсчетами на равномерной двоично рациональной сетке.

Пусть $y = f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая 1-периодическая функция на прямой R. Как и в работе [1], рассматривается задача о конечномерной аппроксимации кривизны

$$K(x, f) = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}$$

кривой — графика функции $f(x)$ в метрике пространства $C[0, 1)$. Только теперь в качестве аппроксиманта берем кривизны графиков очень просто конструируемых функций из пространств $\widetilde{V}_j$ $(j \in \mathbb{Z})$ 1-периодического кратномасштабного анализа (КМА), порожденного масштабирующими функциями $\varphi_s(x)$ $(s = 1, 2)$ из нашей работы [2]. Там $\varphi_s(x)$ — модифицированные масштабирующие функции Мейера – Осколкова $\varphi_\varepsilon(x)$ [3, 4], которые определяются своими преобразованиями Фурье $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ такими, что

$$\operatorname{supp} \widehat{\varphi}_\varepsilon = [-(\varepsilon + 1)/2, (\varepsilon + 1)/2] \quad (0 < \varepsilon \leqslant 1/3),$$

$|\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)|$ — гладкие четные функции, тождественные единице при $|\omega| < (1 - \varepsilon)/2$, и такие, что $|\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)|^2 + |\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega - 1)|^2 \equiv 1$ при $\omega \in [(1 - \varepsilon)/2, (1 + \varepsilon)/2]$. Для простоты считаем, что $|\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)|$ возрастает на $[-(\varepsilon + 1)/2, (\varepsilon - 1)/2]$. Тогда, если $\varphi'((1 + \varepsilon)/2) = 0$ и $\widehat{\varphi}'_\varepsilon(\omega)$ есть функция ограниченной вариации на $\mathbb{R}$, то $|\varphi_\varepsilon(x)| \leqslant C(\varphi_\varepsilon)(1 + |x|)^2$, $C(\varphi_\varepsilon) \leqslant 1 + \mathrm{Var}_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)/(2\pi)^2$. Для краткости мы здесь используем только одну модификацию: $\varphi_2(x) = \int\limits_R \widehat{\varphi}_2(\omega) e^{2\pi i x \omega}$ функции $\varphi_\varepsilon(x)$, полагая

$$\widehat{\varphi}_2(\omega) = \widehat{\varphi}_{2,\varepsilon}(\omega) = |\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)|^2 + i|\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)|\big(|\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega - 1)| + |\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega + 1)|\big).$$

(В [1] мы считали, $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega) \geqslant 0$, но это и условия монотонности функции $\widehat{\varphi}_\varepsilon$ при $\omega < 0$ и при $\omega > 0$ необязательны).

В [1] доказано, что функции $\varphi_s(x)$ $(s = 1, 2)$ порождают системы $\{\varphi_s(2^j x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ $(j \in \mathbb{Z})$ одновременно ортогональные и интерполяционные:

$$\big(2^{j/2}\varphi_s(2^j x - k), 2^{j/2}\varphi_s(2^j x - l)\big)_{L^2(\mathbb{R})} = \delta_{k,l};\ \varphi_s(2^j x - l)\Big|_{x = k/2^j} = \delta_{k,l}.$$

Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013). Исследования второго автора также поддержаны Программой государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-9356.2016.1).

© Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных, 2016

Оказалось, что аналогичными свойствами обладают и 1-периодизации

$$\widetilde{\Phi}_{s,j,k}(x)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\varphi_s(2^j(x+\nu)-k)\quad (j\in\mathbb{Z}_+,\ k=0,1,\dots,2^j-1,\ \Phi_{s,0,0}\equiv 1)$$

функций $\varphi(2^jx-k)$. Это тригонометрические полиномы порядка $N_j=[2^{j-1}(1-\varepsilon)]$, в частности, при $s=2$ равные

$$\widetilde{\Phi}_{j,k}(x)=2^{-j}\Bigg(1+2\sum_{l=1}^{[2^{j-1}(1+\varepsilon)]}\Big|\widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(\frac{l}{2^j}\Big)\Big|^2\cos 2\pi l\Big(x-\frac{k}{2^j}\Big)-$$

$$-2\sum_{l=[2^{j-1}(1-\varepsilon)]}^{[2^{j-1}(1+\varepsilon)]}\Big|\widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(\frac{l}{2^j}\Big)\widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(\frac{l}{2^j}-1\Big)\Big|\sin 2\pi l\Big(x-\frac{k}{2^j}\Big)\Bigg).$$

При $j\in\mathbb{N}$ и $0\leqslant k,l\leqslant 2^j-1$ имеем

$$\big(2^{j/2}\widetilde{\Phi}_{j,k},2^{j/2}\widetilde{\Phi}_{j,l}\big)=\delta_{k,l}\quad\text{и}\quad \widetilde{\Phi}_{j,k}\Big(\frac{l}{2^j}\Big)=\delta_{k,l}.$$

Все эти данные (для $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)\geqslant 0$) обоснованы в [1] и приведены здесь для удобства читателя. Там же (при доказательстве теоремы 3) доказано, что для любой функции $f(x)\in\widetilde{C}^{(r)}_{[0,1]}$ и ее интерполяционной проекции

$$S_{2^j}(x,f)=\sum_{k=0}^{2^j-1}f\Big(\frac{k}{2^j}\Big)\widetilde{\Phi}_{j,k}(x)$$

на пространство $\widetilde{V}_j=\operatorname{span}\{\widetilde{\Phi}_{j,k}(x):\ k=0,1,\dots,2^j-1\}$ при каждом $\nu=0,1,\dots,r$ и $2^j\geqslant r$ справедлива оценка

$$\|f^{(\nu)}(x)-S^{(\nu)}_{2^j}(x,f)\|_{C[0,1)}\leqslant C(r,\widehat{\varphi}_\varepsilon)E_{N_j(\varepsilon)}(f^{(\nu)}),\tag{1}$$

где $N_j(\varepsilon)=[2^{j-1}(1-\varepsilon)]\asymp 2^j$, $E_N(g)$ — наилучшее приближение в $C[0,1)$ функции $g(x)$ тригонометрическими 1-периодическими полиномами порядка n, $C(r,\widehat{\varphi}_\varepsilon)<(4/\pi^2)\ln r+{}$ $+\pi e+4+C(\widehat{\varphi}_\varepsilon)$, $C(\widehat{\varphi}_\varepsilon)\leqslant 2\pi K_{N_j(\varepsilon)}$ (см. [5] и [2]) (K_n ($n\in\mathbb{N}$) — константы Фавара).

С помощью (1), применяя схему доказательства работы [1] с заменой примененных там аппроксимантов для функций $y'=f'(x)$ и $y''=f''(x)$ на $S_{2^j}(x,f)$ и $S''_{2^j}(x,f)$, получаем следующий результат о погрешности аппроксимации кривизны $K(x,f)$ кривой $y=f(x)$ с помощью кривизны $K(x;S_2;(f))$ аппроксимирующей ее кривой $y=S_{2^j}(x,f)$.

Теорема. *Для каждой дважды непрерывно дифференцируемой 1-периодической функции $f(x)$ при аппроксимации ее интерполяционной проекцией $S_{2^j}(x,f)$ на подпространство $\widetilde{V}_j\subset C[0,1)$ справедлива следующая оценка уклонения кривизны $K(x;S_2;(f))$ от кривизны $K(x,f)$:*

$$|K(x,f)-K(x,S_{2^j})|\leqslant C(2,\widehat{\varphi}_\varepsilon)(E_{N_j(\varepsilon)}(f'')+|f''(x)|E_{N_j(\varepsilon)}(f'))$$

Следствие. *На классе*

$$W^{(r)}=\{f(x):\ f(x+1)\equiv f(x)\ \ \text{на}\ \ R,\ f^{(r-1)}(x)\ \ \text{— непрерывные},\ \ |f^{(r)}(x)|\leqslant 1\ \ \text{п.в.}\}$$

имеем

$$|K(x,f)-K(x;S_{2^j};(f))|\leqslant C(r,\widehat{\varphi}_\varepsilon)(2\pi)^{r-2}K_{r-2}(2^j+K_{n-1}(2\pi)^{r-1})E_{N_j(\varepsilon)}(f^{(r)}).$$

Здесь использованы известные неравенства для 2π-периодических функций $g(x)$ и их наилучших приближений $E_n(f)_{2\pi}$ в $C_{2\pi}$ тригонометрическими полиномами порядка n:

$$E_n(f) \leqslant \frac{K_r}{n^r} E_n(f^{(r)}) \quad (r \in \mathbb{N}),$$

вытекающие из неравенства Фавара $\|f\| \leqslant K_r \|f^{(r)}\|$ (K_r — константа Фавара, см., например, [1]).

Список литературы

1. *Субботин Ю.Н.* Равномерная аппроксимация кривизны гладких классов плоских кривых // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 273–276.
2. *Субботин Ю.Н.*, *Черных Н.И.* Интерполяционно-ортогональные системы всплесков // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 153–161.
3. *Meyer Y*. Ondelettes. Paris: Herman, 1990.
4. *Offin D.*, *Oskolkov K*. A note on orthonormal polynomial bases and wavelets // Constr. Approx. 1993. Vol. 9. P. 319–325.
5. *Гаркави А.Л.* О совместном приближении периодической функции и ее производных тригонометрическими полиномами // Известия АН СССР. Серия матем. 1960. Т. 24. С. 103–128.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 234–237

Верхние грани наилучших приближений некоторых классов дифференцируемых в смысле Вейля функций

С. Д. Темурбекова

Институт математики им. А. Джураева АН РТ, Душанбе, Таджикистан

Аннотация. В работе вычислены точные верхние грани наилучших приближений некоторых классов периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций в пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ и даны их приложения.

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ — множество положительных чисел вещественной оси; L_2 — пространство измеримых и суммируемых с квадратом по Лебегу 2π-периодических функций f с конечной нормой

$$\|f\| := \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty,$$

а ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

является рядом Фурье функции $f \in L_2$.

Через $L_2^{(\alpha)}$ $(L_2^{(0)} \equiv L_2)$ обозначим множество функций f, у которых существует производная Вейля $f^{(\alpha)} \in L_2$ $(f^{(0)} \equiv f)$. Если $S_{n-1}(f^{(\alpha)}; x)$ $(\alpha \geqslant 0)$ — частичная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f^{(\alpha)}$, то, как хорошо известно, наилучшее приближение

$$E_{n-1}(f^{(\alpha)}) := \inf_{T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f^{(\alpha)} - T_{n-1}(f^{(\alpha)})\|$$

функции $f^{(\alpha)} \in L_2$ тригонометрическими полиномами T_{n-1} порядка не выше $n-1$ удовлетворяет равенствам

$$E_{n-1}(f^{(\alpha)}) = \|f^{(\alpha)} - S_{n-1}(f^{(\alpha)})\| = \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha} \rho_k^2\right)^{1/2},$$

где $\rho_k^2 := a_k^2 + b_k^2,\ k \geqslant n,$ а $\mathcal{T}_{2n-1}$ — подпространство тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$. Равенством

$$\omega_m(f, t) = \sup\left\{\left\|\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x + kh)\right\| :\ |h| \leqslant t\right\}$$

определим модуль непрерывности порядка m функции $f \in L_2$.

В данной работе мы решим задачу отыскания точных констант в неравенстве Джексона – Стечкина в пространстве L_2

$$E_{n-1}(f) \leqslant \chi_n^{\alpha} \omega_m(f^{(\alpha)}, t/n),\ f \in L_2^{(\alpha)},\ t > 0,$$

© С. Д. Темурбекова, 2016

в которой погрешность приближения функций $f \in L_2^{(\alpha)}$ оценивается через модуль непрерывности $\omega_m(f^{(\alpha)}, t/n)$ производной $f^{(\alpha)}$ в смысле Вейля в L_2.

Сформулированная задача для целых $\alpha \in \mathbb{N}$ рассматривалась во многих работах (см., напр., [1–5]). Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < h \leqslant \pi/n$, φ – произвольная неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, h]$ функция, не эквивалентная нулевой функции. Если при некоторых вещественных $\alpha \geqslant 1$ и $p \in [1/\alpha, \leqslant 2)$ выполняется дифференциальное неравенство*

$$(\alpha p - 1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \geqslant 0 \quad \text{при всех} \quad t \in [0, h],$$

то

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(\alpha)} \\ f^{(\alpha)} \neq const}} \frac{2^m n^\alpha E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left\{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} \varphi(t)dt\right\}^{-1/p}.$$

Следствие 1. *Пусть $\varphi(t) = \sin^\gamma(\beta t/h)$, $0 < \beta \leqslant \pi$, $0 < t \leqslant h$, $0 < h \leqslant \pi/n$, $0 \leqslant \gamma \leqslant \leqslant \alpha p - 1$, $1/\alpha < p \leqslant 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \geqslant 1$. Тогда*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(\alpha)} \\ f^{(\alpha)} \neq const}} \frac{2^m n^\alpha E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}; t)\sin^\gamma(\beta t/h)dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} \sin^\gamma\left(\frac{\beta t}{h}\right) dt\right)^{-1/p}.$$

Это равенство непосредственным вычислением получено в [1].

Следствие 2. *Пусть $\varphi(t) \equiv 1$, $0 < t \leqslant h$, $0 < h \leqslant \pi/n$, $0 < p \leqslant 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(\alpha)}} \frac{2^m n^{\alpha - 1/p} E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}; t)dt\right)^{1/p}} = \left\{\int\limits_0^{nh} \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp} dt\right\}^{-1/p}. \tag{1}$$

Соотношение (1) при целых $\alpha \in \mathbb{N}$ ранее было доказано в работе [4].

В экстремальных задачах теории приближения периодических функций $f \in L_2$ с заданным классом функций $\mathfrak{M} \subset L_2$ часто связывают следующие его характеристики аппроксимации:

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} := E(\mathfrak{M}; \mathcal{T}_{2n-1}) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \inf_{T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f - T_{n-1}\|_{L_2} \tag{2}$$

— наилучшее приближение класса $\mathfrak{M}$ множеством $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометрических полиномов T_{n-1} порядка $n - 1$;

$$\gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} = \sup\left\{\|f\|_{L_2} : f \in \mathfrak{M}_n^\perp\right\}, \tag{3}$$

где $\mathfrak{M}_n^\perp$ — множество функций $f \in \mathfrak{M}$ таких, что

$$\int\limits_0^{2\pi} f(t)\begin{Bmatrix}\sin kx \\ \cos kx\end{Bmatrix} dt = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Помимо величин (2) и (3) часто будет полезным отыскание величины

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} = \inf_{A\in\mathscr{L}_n}\sup_{f\in\mathfrak{M}}\|f - Af\|_{L_2}, \tag{4}$$

где $\mathscr{L}_n$ — совокупность всех линейных операторов, переводящих функции $f \in L_2$ в тригонометрические полиномы порядка не выше $n-1$.

Из определения величин (2) – (4) следует, что

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} \leqslant \gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} \leqslant \mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M}). \tag{5}$$

Второе неравенство в (5) вытекает из того факта, что если $f \in \mathfrak{M}_n$, то $Af \equiv 0$, и потому мы имеем

$$\sup\left\{\|f\|_{L_2} : f \in \mathfrak{M}_n^{\perp}\right\} \leqslant \sup\left\{\|f - Af\|_{L_2} : f \in \mathfrak{M}\right\}.$$

В ряде важных случаев, для конкретных классов функций все введённые выше аппроксимационные характеристики совпадают. Задача состоит в отыскании значений величин (2) – (4) для класса функций, естественно возникшего из утверждения теоремы 1.

Пусть $\Phi(t),\ 0 \leqslant t < \infty$ — непрерывная неубывающая положительная функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Для $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < p \leqslant 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $0 < h \leqslant 2\pi$ введём в рассмотрение следующий класс функций:

$$W_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi) = \left\{ f \in L_2^{(\alpha)} : \left(\frac{1}{h}\int_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)},t)_{L_2}dt\right)^{1/p} \leqslant \Phi(h) \right\},$$

Теорема 2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $0 < p \leqslant 2$. Тогда при любом $h \in (0,\pi/n]$ справедливы равенства*

$$E_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-m-1/p}n^{-\alpha}\left(\frac{1}{nh}\int_0^{nh/2}\sin^{mp}t dt\right)^{-1/p}\Phi(h).$$

Следствие 3. *При выполнении всех условий теоремы 2, имеют место равенства*

$$E_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}\left(\frac{\pi}{n},\Phi\right)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}\left(\frac{\pi}{n},\Phi\right)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}\left(\frac{\pi}{n},\Phi\right)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-m}n^{-n}\pi^{1/2p}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{mp}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{mp-1}{2}\right)}\right\}^{1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье $a_k(f)$ и $b_k(f)$ на различных классах функций в различных пространствах рассматривались, например, в работах [1–5]. Для введённого в этой работе класса функций данный вопрос также представляет определённый интерес. В самом деле, из утверждения теоремы 2 сразу получаем

Следствие 4. *Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда для коэффициентов Фурье $a_n(f)$ и $b_n(f)$ при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство*

$$\sup\left\{|a_n(f)|, |b_n(f)| :\ f \in W_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right\} = 2^{-m}n^{-\alpha}\left(\frac{1}{nh}\int_0^{nh}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Phi(h).$$

Список литературы

1. *Есмаганбетов М.Г.* Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Матем. заметки. 1999. Т. 65, № 6. С. 816-820.
2. *Вакарчук С.Б., Зубутная В.И.* Точное неравенство типа Джексона – Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. 2009. Т. 86, № 3. С. 328-336.
3. *Вакарчук С.Б., Зубутная В.И.* Неравенство типа Джексона – Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 4. С. 497-514.
4. *Шабозов М.Ш.* Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 616-623.
5. *Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.* Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. 2011. Т. 90, № 5. С. 764-775.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 238–245

Неравенства Джексона – Стечкина для специальных модулей непрерывности и значение поперечников классов функций в $L_{2,\mu}[-1,1]$

К. Тухлиев

Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова, Худжанд, Таджикистан

Аннотация. В гильбертовом пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ с весом Чебышёва $\mu(x) := (1 - x^2)^{-1/2}$ получены неравенства Джексона – Стечкина, связывающие величину наилучшего приближения $E_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}}$ функции f алгебраическими многочленами степени не более $n-1$ с усреднённым положительным весом обобщённого модуля непрерывности m-го порядка $\Omega_m(\mathcal{D}^r f; t)$, где $\mathcal{D}$ – некоторый дифференциальный оператор второго порядка. Для классов функций $W^{(2r)}_{p,m}(\Psi)$ $(m, r \in \mathbb{N},\ 1/(2r) < p \leqslant 2)$, определяемых указанным модулем непрерывности и заданной мажорантой $\Psi(t)$ $(t \geqslant 0)$, удовлетворяющей определённым ограничениям, вычислены значения различных n-поперечников в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$.

1. К настоящему времени известен целый ряд содержательных результатов, связанных с отысканием точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина и вычислением точных значений различных n-поперечников функциональных классов, принадлежащих пространству измеримых 2π-периодических функций $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ с нормой (см., например, [1–7])

$$\|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

В последнее время появился ряд работ, в которых аналогичные задачи рассматриваются на конечном отрезке. Так например, А.Г.Бабенко [8] получил точное неравенство типа Джексона – Стечкина в случае приближения на отрезке $[0,\pi]$ действительных измеримых 2π-периодических функций вида $f(x) = \varphi(\cos x)$ подпространством $\mathcal{F}_{n-1}$ косинус-полиномов

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos kx, \quad a_k \in \mathbb{R},$$

порядка не выше $n-1$ в пространстве $L^2_{\alpha,\beta}[0,\pi]$ $(\alpha > -1,\ \beta > -1)$ с нормой

$$\|f\|_{L^2_{\alpha,\beta}} = \left\{\int\limits_0^{\pi} f^2(x)\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2\beta+1} dx\right\}^{1/2} < \infty.$$

Дальнейшее исследование этой задачи в общем случае при $\alpha = \beta \geqslant -1/2$ приведено в работе Д.В.Чертовой [9], а при любых $\alpha > \beta \geqslant -1/2$ Во Тхи Куком [10]. Для функции многих переменных в пространстве $L_p(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом указанная задача решена в работах [11, 12]. С.Б.Вакарчук [13] доказал точное неравенство типа Джексона – Стечкина для приближения действительных измеримых на отрезке $[-1,1]$ функций f подпространством

© К. Тухлиев, 2016

$\mathcal{P}_{n-1}$ алгебраических многочленов степени $\leqslant n-1$ в пространстве $L_2[-1,1]$ с обычной нормой

$$\|f\|_{L_2[-1,1]} = \left(\int_{-1}^{1} f^2(x)dx\right)^{1/2} < \infty.$$

В данной работе мы продолжим исследования в этом направление и докажем точные неравенства типа Джексона – Стечкина для наилучшего приближения действительных измеримых на отрезке $[-1,1]$ функций f с весом $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$ в гильбертовом пространстве $L_{2,\mu}[-1,1] := L_2\Big((1-x^2)^{-1/2};[-1,1]\Big)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \left(\int_{-1}^{1} \mu(x)f^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

Введём обозначения: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{R}_+ := (0,\infty)$, $\mathbb{R} := (-\infty,+\infty)$. Следуя работе А.В.Абилова и Ф.В.Абиловой [14], в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ рассмотрим оператор

$$F_h f(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(x\cos h + \sqrt{1-x^2}\,\sin h\right) + f\left(x\cos h - \sqrt{1-x^2}\,\sin h\right)\right], \tag{1}$$

который будем называть *оператором обобщённого сдвига*, и введём конечные разности первого и высших порядков равенствами

$$\widetilde{\Delta}_h^1(f;x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - E)f(x),$$

$$\widetilde{\Delta}_h^m(f;x) = \widetilde{\Delta}_h(\widetilde{\Delta}_h^{m-1}(f;\cdot);x) = (F_h - E)^m f(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}F_h^k f(x),$$

где $F_h^0 f(x) \equiv f(x)$, $F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1}f(x))$, $k=1,2,\ldots,m$; $m\in\mathbb{N}$ и E – единичный оператор в пространстве L_2. Определим обобщённый модуль непрерывности m-го порядка равенством

$$\Omega_m(f;t)_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \sup\Big\{\big\|\widetilde{\Delta}_h^m(f;\cdot)\big\|_{L_{2,\mu}[-1,1]} : \ |h|\leqslant t\Big\}. \tag{2}$$

Пусть далее

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad T_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\cos(k\arccos x),\ k=1,2,\ldots \tag{3}$$

– ортонормированная система многочленов Чебышёва первого рода в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$. Тогда, как хорошо известно [15],

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)T_k(x) \tag{4}$$

есть ряд Фурье – Чебышёва функции $f\in L_{2,\mu}[-1,1]$, а

$$c_k(f) = \int_{-1}^{1}\mu(x)f(x)\,T_k(x)dx \tag{5}$$

– её коэффициенты Фурье – Чебышёва. Равенство в (4) понимается в смысле сходимости в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$.

Пусть теперь $\mathcal{D} = (1-x^2)\dfrac{d^2}{dx^2} - x\dfrac{d}{dx}$ – дифференциальный оператор второго порядка. Операторы высших порядков определим последовательно, полагая $\mathcal{D}^r f = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1}f)$,

$r=2,3,\ldots$ Известно [15, с. 47], что многочлены (3) удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)T_k''(x)-xT_k'(x)+k^2T_k(x)=0, \tag{6}$$

а потому из (6) следуют равенства

$$\mathcal{D}T_k(x)=-k^2T_k(x),\ldots,\mathcal{D}^rT_k(x)=(-1)^rk^{2r}T_k(x). \tag{7}$$

В [14] доказано, что для произвольной функции $f\in L_{2,\mu}[-1,1]$, имеющей обобщённые производные в смысле Леви [16, с. 172], коэффициенты Фурье – Чебышёва (5) ряда (4) удовлетворяют соотношениям

$$c_k(f)=(-1)^r\,k^{-2r}\,c_k(\mathcal{D}^rf),\ k=1,2,\ldots, \tag{8}$$

$$c_k(F_hf)=(\cos kh)\,c_k(f),\ k=1,2,\ldots, \tag{9}$$

где функция F_hf – определена равенством (1).

Обозначим через $L_{2,\mu}^{(r)}[-1,1]$ ($r\in\mathbb{Z}_+, L_{2,\mu}^{(0)}[-1,1]=L_{2,\mu}[-1,1]$) – множество функций $f\in\in L_{2,\mu}[-1,1]$, у которых производная $\mathcal{D}^rf$ принадлежит пространству $L_{2,\mu}[-1,1]$. Всюду далее, вместо $L_{2,\mu}[-1,1], L_{2,\mu}^{(r)}[-1,1]$, $\|f\|_{L_{2,\mu}[-1,1]}$, ради сокращения записи, будем писать $L_{2,\mu}, L_{2,\mu}^{(r)}$, $\|f\|_{2,\mu}$ соответственно.

Пользуясь соотношениями (7) – (9) и равенством Парсеваля, из (4) для произвольной функции $f\in L_{2,\mu}^{(r)}$ легко получить равенство [14]

$$\|\Delta_h^m(\mathcal{D}^rf)\|_{2,\mu}^2=\sum_{k=1}^{\infty}(1-\cos kh)^{2m}k^{4r}c_k^2(f). \tag{10}$$

Учитывая соотношение (10), запишем

$$\Omega_m^2(\mathcal{D}^rf;t)_{2,\mu}=\sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}k^{4r}c_k^2(f)(1-\cos kh)^{2m}:\ |h|\leqslant t\right\}. \tag{11}$$

Пусть

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}=\inf\Big\{\|f-p_{n-1}\|_{2,\mu}:\ p_{n-1}\in\mathcal{P}_{n-1}\Big\} \tag{12}$$

– наилучшее приближение функции $f\in L_{2,\mu}$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$. В [15, с. 26] доказано, что среди всех элементов $p_n\in\mathcal{P}_{n-1}$ частичная сумма $S_{n-1}(f;x)=$ $=\sum\limits_{k=0}^{n-1}c_k(f)T_k(x)$ ряда (4) доставляет минимум величине (12). При этом

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}=\|f-S_{n-1}(f)\|_{2,\mu}=\left(\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)\right)^{1/2}. \tag{13}$$

Из (13), учитывая равенство (8), для произвольной $f\in L_{2,\mu}^{(r)}$ получаем

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\leqslant n^{-2r}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^rf)_{2,\mu}. \tag{14}$$

Неравенство (14) обращается в равенство для функции $f_0(x)=T_n(x)$, принадлежащей множеству $L_{2,\mu}^{(r)}$, поскольку $\mathcal{E}_{n-1}(f_0)_{2,\mu}=1,\ \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^rf_0)_{2,\mu}=n^{2r}$.

Условимся в дальнейшем называть φ *весовой функцией* на отрезке $[0,h]$, если φ – суммируемая неотрицательна и неэквивалентная нулю функция на $[0,h]$. Н.И.Черных [1] заметил, что для произвольной весовой функции φ на $[0,h]$ $(0<h\leqslant\pi)$ функционал

$$J_n(f;h)=\left\{\int_0^h\omega_m^2(f;t)_2\varphi(t)dt\right\}^{1/2}\left\{\int_0^h\varphi(t)dt\right\}^{-1/2}$$

меньше джексоновского функционала $\omega_m(f;h)_2$ и более естественен для характеристики наилучших приближений $E_{n-1}(f)$ периодических функций f из $L_2[0,2\pi]$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$. Для рассматриваемой нами характеристики гладкости Ω_m (см. (2), (11)) наблюдается аналогичная ситуация. Очевидно, что без потери общности можно полагать, что при некотором $h \in (0,\pi/n]$ выполняется условие

$$0 < \int_0^h \varphi(t)dt \leqslant 1$$

и при любом $0 < p \leqslant 2$ имеет место неравенство

$$\left\{\int_0^h \Omega_m^p(f;t)_{2,\mu}\,\varphi(t)dt\right\}^{1/p} \leqslant \Omega_m(f;h)_{2,\mu}.$$

В связи с этим обстоятельством, введём в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(\varphi;h) = \sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}, \tag{15}$$

где $n,m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \in \mathbb{R}_+$, $0 < h \leqslant \pi$, φ – весовая функция на отрезке $[0,h]$.

Теорема 1. *Пусть* $n,m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leqslant 2$, $0 < h \leqslant \pi$, φ – *весовая функция на* $[0,h]$. *Тогда для характеристики* (15) *выполняются неравенства*

$$\left\{\alpha_{n,m,r,p}(\varphi;h)\right\}^{-1} \leqslant \mathcal{M}_{n,m,r,p}(\varphi;h) \leqslant \left\{\inf_{n\leqslant k<\infty} \alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h)\right\}^{-1},$$

где

$$\alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h) = \left(k^{2rp}\int_0^h (1-\cos kt)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}. \tag{16}$$

При этом, если

$$\inf_{n\leqslant k<\infty} \alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h) = \alpha_{n,m,r,p}(\varphi;h),$$

то имеет место равенство

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(\varphi;h) = \left(n^{2rp}\int_0^h (1-\cos nt)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Следствие 1. *Пусть весовая функция* φ *является непрерывно дифференцируемой на отрезке* $[0,h]$. *Если при всех* $t \in [0,h]$ *и* $q \in [1/(2r),2]$, $r \in \mathbb{N}$ *выполнено неравенство*

$$(2rq-1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \geqslant 0, \tag{17}$$

то справедливо равенство

$$\inf_{n\leqslant k<\infty} \alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h) = \alpha_{n,m,r,p}(\varphi;h)$$

и имеет место соотношение

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(\varphi;h) = \left\{\alpha_{n,m,r,p}(\varphi;h)\right\}^{-1}.$$

Следствие 2. *Пусть весовая функция* $\varphi(t) \equiv 1$ *и числа* $m, n, r \in \mathbb{N}$; $1/(2r) \leqslant p \leqslant 2$; $0 < h \leqslant 3\pi/(4n)$. *Тогда выполнено следующее равенство*

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(1;h) = \Big\{\alpha_{n,m,r,p}(1;h)\Big\}^{-1} := \left\{n^{2rp}\int\limits_0^h (1-\cos nh)^{mp}dt\right\}^{-1/p}.$$

В равенстве (16) положим $h = a/n$, где $0 < a \leqslant \pi$, $\varphi_*(t) = g(nt)$, $g(u)$ – весовая функция на отрезке $[0, a]$. Тогда

$$\alpha_{k,m,r,p}(g(nt); a/n) = \left\{k^{2rp}\int\limits_0^{a/n}(1-\cos kt)^{mp}g(nt)dt\right\}^{1/p} =$$

$$= n^{2r-1/p}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^{2rp}\int\limits_0^a\left(1-\cos\frac{k}{n}t\right)^{mp}g(t)dt\right\}^{1/p}. \qquad (18)$$

Из равенства (18) следует, что

$$\inf\Big\{\alpha_{k,m,r,p}(g(n\cdot); a/n):\ n \leqslant k < \infty\Big\} =$$

$$= n^{2r-1/p}\inf_{x\geqslant 1}\left\{x^{2rp}\int\limits_0^a(1-\cos xt)^{mp}g(t)dt\right\}^{1/p} := n^{2r-1/p}\cdot\inf_{x\geqslant 1}\beta_{m,r,p}(a;g,x). \qquad (19)$$

Используя равенство (19) с помощью теоремы 1, получаем

Следствие 3. *Пусть* $r \in \mathbb{Z}_+$, $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \leqslant 2$, $0 < a \leqslant \pi$, g *– весовая функция на отрезке* $[0, a]$. *Тогда имеют место неравенства*

$$\frac{1}{\beta_{m,r,p}(a;g,1)} \leqslant \sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(r)}\\ f\neq const}}\frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^a\Omega_m^p(\mathcal{D}^rf;t/n)_{2,\mu}\,g(t)dt\right)^{1/p}} \leqslant \frac{1}{\inf\limits_{1\leqslant x<\infty}\beta_{m,r,p}(a;g,x)}.$$

Если при этом функция g *такова, что*

$$\inf_{1\leqslant x<\infty}\beta_{m,r,p}(a;g,x) = \beta_{m,r,p}(a;g,1),$$

то справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(r)}\\ f\neq const}}\frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^a\Omega_m^p(\mathcal{D}^rf;t/n)_{2,\mu}\,g(t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\beta_{m,r,p}(a;g,1)}.$$

Следствие 4. *Пусть* $0 < a \leqslant \pi$, $m, n, r \in \mathbb{N}$. *Если при всех* $0 < p \leqslant 2$ *функция* $g(t) := t^{2rp-1}g_1(t)$, *где* $g_1(t)$ *не возрастает, является неотрицательной суммируемой на отрезке* $[0, a]$ *функцией, то*

$$\inf_{1\leqslant x<\infty}\beta_{m,r,p}(a;g,x) = \beta_{m,r,p}(a;g,1)$$

и, следовательно, имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(r)}\\ f\neq const}}\frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^a\Omega_m^p(\mathcal{D}^rf;t/n)_{2,\mu}\,t^{2rp-1}g_1(t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\beta_{m,r,p}(a;t^{2rp-1}g_1(t),1)}.$$

Теорема 2. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}; 0 < p \leqslant 2; 0 < h \leqslant 3\pi/(4n)$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $s = 0, 1, \ldots, r$; φ – *весовая функция на отрезке* $[0, h]$, *удовлетворяющая на* $[0, h]$ *неравенству* (17). *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L^{(r)}_{2,\mu}\\ f\neq const}} \frac{n^{2(r-s)}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h \Omega^p_m(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu}\, \varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left\{\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p};$$

в частности, при $p = 1/m$ *и* $\varphi(t) \equiv 1$ *имеем*

$$\sup_{\substack{f\in L^{(r)}_{2,\mu}\\ f\neq const}} \frac{n^{2(r-s)}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h \Omega^{1/m}_m(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} dt\right)^{m}} = \left\{\frac{n}{nh - \sin nh}\right\}^m.$$

2. Прежде чем сформулировать остальные результаты, напомним необходимые понятия и определения, используемые нами в дальнейшем.

Пусть $\mathcal{B}$ – единичный шар в $L_{2,\mu}$; $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество из $L_{2,\mu}$; $\Lambda_n \subset L_{2,\mu}$ – n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_{2,\mu}$ – подпространство коразмерности n; $\mathscr{L} : L_{2,\mu} \to \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства $L_{2,\mu}$ в Λ_n; $\mathscr{L}^\perp : L_{2,\mu} \to \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования пространства $L_{2,\mu}$ на подпространство Λ_n. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu}) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0 : \ \varepsilon\mathcal{B} \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset L_{2,\mu}\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu}) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - g\|_{2,\mu} : g \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_n \subset L_{2,\mu}\right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu}) =$$
$$= \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathscr{L}f\|_{2,\mu} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathscr{L}L_{2,\mu} \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_{2,\mu}\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu}) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\|_{2,\mu} : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset L_{2,\mu}\right\},$$

$$\pi_n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu}) =$$
$$= \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathscr{L}^\perp f\|_{2,\mu} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathscr{L}^\perp L_{2,\mu} \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_{2,\mu}\right\}$$

называют соответственно *бернштейновским*, *колмогоровским*, *линейным*, *гельфандовским*, *проекционным* n*-поперечниками*. Поскольку $L_{2,\mu}$ является гильбертовым пространством, то справедливы следующие соотношения между перечисленными выше n-поперечниками (см., например, [18]):

$$b_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) \leqslant d^n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) \leqslant d_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) = \delta_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) = \pi_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}).$$

При помощи специального модуля непрерывности (2) определим следующий класс функций. Пусть $\Psi(t)$, $0 \leqslant t < \infty$ – произвольная непрерывная неубывающая функция, такая, что $\Psi(0) = 0$. Символом $W^{(r)}_p(\Omega_m, \Psi)$, $1/(2r) < p \leqslant 2$, $r \in \mathbb{N}$ обозначим класс функций $f \in L^{(r)}_{2,\mu}$, для которых при любом $t \in \mathbb{R}_+$ выполняется условие

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Omega^p_m(D^r f; \tau)_{2,\mu}\, d\tau \leqslant \Psi^p(t).$$

Полагаем также

$$(1 - \cos t)^m_* = \left\{\ (1 - \cos t)^m, \text{ если } 0 < t \leqslant \pi; \quad 2^m, \text{ если } t \geqslant \pi\ \right\}.$$

Теорема 3. *Пусть $m,n,r\in\mathbb{N}$, $1/(2r)<p\leqslant 2$ и функция Ψ при любых значениях $t\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Psi(t)}{\Psi(\pi/n)}\right)^p\geqslant\frac{\pi}{nt}\int\limits_0^{nt}(1-\cos\tau)_*^{mp}d\tau\left(\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau\right)^{-1}. \tag{20}$$

Тогда выполняются равенства

$$\lambda_n(W_p^{(r)}(\Omega_m,\Psi);L_{2,\mu})=\mathcal{E}_{n-1}(W_p^{(r)}(\Omega_m,\Psi))_{L_{2,\mu}}=$$
$$=\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau\right\}^{-1/p}n^{-2r}\,\Psi(\pi/n),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *– любой из перечисленных выше n-поперечников, а*

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_p^{(r)}(\Omega_m,\Psi))_{L_{2,\mu}}\stackrel{def}{=}\sup\Big\{\,\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}:\ f\in W_p^{(r)}(\Omega_m,\Psi)\Big\}.$$

Множество мажорант Ψ, удовлетворяющих условию (20), не пусто; так например, условию (20) удовлетворяет функция

$$\Psi_*(t):=t^{\alpha/p},\quad \text{где}\quad \alpha:=\frac{\pi}{\int\limits_0^{\pi}\left(\sin\frac{\tau}{2}\right)^{2mp}d\tau}-1.$$

Из теоремы 3 вытекает

Следствие 5. *Для любых $m,n,r\in\mathbb{N}$, $1/(2r)<p\leqslant 2$ справедливы равенства*

$$\lambda_n(W_p^{(r)}(\Omega_m,\Psi_*);L_{2,\mu})=\mathcal{E}_{n-1}(W_p^{(r)}(\Omega_m,\Psi_*))_{L_{2,\mu}}=$$
$$=2^m(\alpha+1)^{-1/p}\,\pi^{\alpha/p}\,n^{-(2r+\alpha/p)},$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *– любой из перечисленных выше n-поперечников.*

Список литературы

1. *Черных Н.И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1967. Т. 2, № 5. С. 513-522.
2. *Тайков Л.В.* Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Матем. заметки. 1979. Т. 25, № 2. С. 217-223.
3. *Бабенко А.Г.* О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки. 1986. Т. 39, № 5. С. 651-664.
4. *Бабенко А.Г., Черных Н.И., Шевалдин В.Т.* Неравенства Джексона – Стечкина в L_2 с тригонометрическим модулем непрерывности // Матем. заметки. 1999. Т. 65, № 6. С. 928-932.
5. *Вакарчук С.Б., Забутная В.И.* Неравенства типа Джексона – Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 4. С. 497-514.
6. *Иванов В.И., Смирнов О.И.* Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. — Тула: ТулГУ. 1995. 192 с.
7. *Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.* Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. 2011. Т. 90, № 5. С. 764-775.
8. *Бабенко А.Г.* Точное неравенство Джексона – Стечкина в пространстве L^2-приближений на отрезке с весом Якоби и проективных пространствах // Известия РАН. Серия матем. 1998. Т. 62, № 6. С. 27-52.
9. *Чертова Д.В.* Теоремы Джексона в пространствах L_p, $1\leqslant p\leqslant 2$ с периодическим весом Якоби // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2009. Вып. 1. С. 5-27.
10. *Кук Во Тхи.* Операторы обобщённого сдвига в пространствах L_p на торе с весом Якоби и их применение // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2012. Вып. 1. С. 17-43.

11. *Иванов А.В., Иванов В.И.* Теория Данкля и теорема Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 180-192.
12. *Иванов А.В., Иванов В.И.* Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Матем. заметки. 2013. Т. 94, № 3. С. 338-348.
13. *Вакарчук С.Б.* О неравенствах типа Джексона в L_2 и точных значениях n-поперечников функциональных классов // Укр. матем. вiсник. 2006. Т. 3, № 1. С. 116-133.
14. *Абилов В.А., Абилова Ф.В.* Об одной квадратурной формуле // Журнал выч. матем. и мат. физ. 2002. Т. 42, № 4. С. 451-458.
15. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука. 1979. 416 с.
16. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука. 1969.
17. *Шабозов М.Ш., Тухлиев К.* $\mathcal{K}$-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов функций в пространстве $L_2\Big((\sqrt{1-x^2}\,)^{-1};\Big)$ // Известия ТулГУ. 2014. Естественные науки. Вып. 1. С. 491-499.
18. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ. 1976. 325 с.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 246–247

О чебышевских подпространствах в $C(T)$

Г. М. Устинов

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

Аннотация. Основной результат работы связан с проблемой о чебышевских подпространствах бесконечной размерности и коразмерности в рефлексивных пространствах $C(Q)$. Доказано, что в любом пространстве $C(Q)$ над счетным метрическим компактом Q с конечным числом предельных точек таких подпространств не существует.

Пока не решен давно известный вопрос: содержит ли какое-либо сепарабельное пространство $C(Q)$ чебышевское подпространство L, $\dim L = \operatorname{codim} L = +\infty$? Определенный шаг в решении этого вопроса представляет

Теорема 1. *Пусть T — счетный метризуемый компакт, множество предельных точек которого конечно, $L \subset C(T)$ — замкнутое подпространство,*

$$\dim L = \operatorname{codim} L = +\infty.$$

Тогда L — не чебышевское подпространство.

Введем необходимые определения. Если $t \in T$, то полагаем

$$\delta_t(e) = \begin{cases} 1, & t \in e, \\ 0, & t \overline{\in} e \end{cases}, \qquad \delta_t = \delta(t).$$

Тогда $\forall \mu \in C^*(T)$ представима в виде $\mu = \sum\limits_{t \in T} \mu_t \delta_t$, $\mu_t \in R$, $\|\mu\| = \sum\limits_{t \in T} |\mu_t| < +\infty$; $\mu_t = \mu(t)$, полагаем $\operatorname{supp} \mu = \{t \in T : \ \mu_t \neq 0\}$.

Для $h \in C(T)$, $\|h\| = \max\limits_{t \in T} |h(t)|$, $\operatorname{supp} h = \{t \in T : \ h(t) \neq 0\}$. Если $|\operatorname{supp} \mu| < +\infty$ ($|\operatorname{supp} h| < +\infty$), то элемент $\mu \in C^*(T)$ ($h \in C(T)$) называем финитным. Для $L \subset C(T)$ обозначаем $L^\perp = \{\mu \in C^*(T) : \ \mu(h) = 0 \ \forall\, h \in L\}$ — аннулятор L, $S_{L^\perp} = \{\mu \in L^\perp : \ \|\mu\| = 1\}$. Известно, что если $h \in C(T) \backslash L$, то $\exists\ \mu_h \in S_{L^\perp} : \ \mu_h(h) = \rho(h, L) = d$. Хорошо известна следующая лемма.

Лемма А. *Пусть $L \subset C(T)$, $\dim L = \operatorname{codim} L = +\infty$ и если либо L, либо $L^\perp$ содержат финитный элемент, то L не чебышевское подпространство.*

Эта лемма позволяет установить следующую теорему.

Теорема 2. *Если L — чебышевское подпространство в $C(T)$, $\dim L = \operatorname{codim} L = +\infty$, μ_k, $\mu_0 \in S_{L^\perp}$, причем $\mu_k \underset{k\to\infty}{\overset{W^*}{\longrightarrow}} \mu_0$, то $\|\mu_k - \mu_0\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

В дальнейшем считаем, что L не удовлетворяет условиям леммы. Каждый элемент $h \in C(T) \backslash L$ определяет на $L^\perp$ w^*-непрерывный функционал $\widetilde{h}$ соотношением $\widetilde{h}(\mu) = \mu(h)$, причем $\|\widetilde{h}\| = \rho(h, L) = d$. Согласно классическому результату А. Л. Гаркави [1] h имеет в L единственный ближайший элемент l_h тогда и только тогда, когда $\widetilde{h}$ допускает единственное w^*-непрерывное продолжение H с $L^\perp$ на все $C^*(T)$, с сохранением нормы $\|H\| = \|\widetilde{h}\|$. Если $\pi : \ C(T) \to L$ — оператор метрического проектирования, то $h = \pi(h) + H$.

Так как $\delta_t \overline{\in} L^\perp$, то $L_t = L \oplus [\delta_t]$ — одномерное расширение $L^\perp$. Согласно аналитической форме теоремы Хана – Банаха продолжение H на L_t определяется формулой $H(\mu + \alpha \delta_t) =$

© Г. М. Устинов, 2016

$= h(\mu) + \alpha\beta_t$, где $\beta_t \in R$ и требование $\|H\| = \|\widetilde{h}\|$ выполняется, если $\beta_t \in [\beta_t^-, \beta_t^+]$ (см. [2]). Далее используются видоизмененные формулы для $[\beta_t^-, \beta_t^+]$ (см. [3]). Введем множества $D_h^-(t)$, $D_h^+(t)$, полагая

$$D_h^-(t) = \{\mu \in S_{L^\perp} :\ \mu_t > 0,\ d - h(\mu) \leqslant 2d\mu_t\},$$
$$D_h^+(t) = \{\mu \in S_{L^\perp} :\ \mu_t < 0,\ d - h(\mu) \leqslant 2d|\mu_t|\}$$

и пусть
$$\gamma_h^-(t) = \inf_{\mu \in D_h^-(t)} \frac{d - h(\mu)}{\mu_t}, \qquad \gamma_h^+(t) = \inf_{\mu \in D_h^+(t)} \frac{d - h(\mu)}{|\mu_t|},$$

тогда
$$\beta^-{}_t = \begin{cases} -d, & \text{если } D_h^-(t) = \varnothing, \\ d - \gamma_h^-(t), & \text{если } D_h^-(t) \neq \varnothing, \end{cases} \qquad \beta^+{}_t = \begin{cases} d, & \text{если } D_h^+(t) = \varnothing, \\ -d + \gamma_h^+(t), & \text{если } D_h^+(t) \neq \varnothing. \end{cases}$$

Теорема 3. *Если L — чебышевское подпространство в $C(T)$, $h \in C(T) \backslash L$, $\|h\| = \|H\| = 1$, $t \in T$, то $H(t) = 1 - \gamma^-{}_h(t) = \gamma_h^+(t) - 1$.*

На основании теорем 2,3 можно установить справедливость следующей теоремы.

Теорема 4. *Если $L \subset C(T)$ — чебышевское подпространство, $h_n, h \in C(T)$, $t \in T$, $\|h_n - h_0\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то $H_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} H_0(t)$ (метрическая проекция секвенциально слабо непрерывна).*

Для доказательства теоремы 1 обозначим через $t_1, t_2, \ldots, t_n$ предельные точки T и полагаем $L_0 = \{h \in L :\ h(t_i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, æ — естественное фактор-отображение $L \to L/_{L_0}$. Рассмотрим в $C(t)$ $(n+1)$-мерное подпространство Z_0, $Z_0 \bigcap L = \{0\}$, образованное финитными функциями, и пусть $S_n = \{h \in Z_0 :\ \rho(h, L) = 1\}$. Определим отображение $\tau :\ S_n \to L/_{L_0}$, полагая $\tau(h) = \text{æ}[\pi(h)]$. Поскольку $\dim L/_{L_0} = n$, то секвенциально слабо непрерывное отображение τ будет непрерывным в нормированной топологии. Следуя П. А. Бородину [4], применим к τ теорему Борсука об антиподальных отображениях [5]. Это позволяет установить наличие $h_0 \in S_n$, для которого $\pi(h_0) \in L_0$. Поскольку $(h_0 - \pi h_0)(t_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то не найдется (в силу леммы A) элемента $\mu \in S_{L^\perp}$, который бы реализовывал равенства $\mu(h_0 - \pi(h_0)) = \|h_0 - \pi(h_0)\| = 1$. Получили противоречие с критерием Зингера [6] элемента наилучшего приближения.

Список литературы

1. *Гаркави А.Л.* О наилучшем приближении элементами бесконечномерных подпространств одного класса // Матем. сборник. 1963. Т. 62, № 1. С. 104–120.
2. *Колмогоров А.Н.*, *Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972. 543 с.
3. *Устинов Г.М.* О подпространствах существования в $C(Q)$ // Матем. заметки. 1999. Т. 65, № 5. С. 726–737.
4. *Бородин П.А.* Аппроксимативные свойства подпространств в пространствах типа c // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2002. Vol. 5. P. 54–58.
5. *Borsuk K.* Drei Sätre über die n-dimensionale enclidische sphäre // Fund. Math. 1933. Vol. 20. P. 177–190.
6. *Singer I.* Characterisation des éléments de meilleure approximations daus un espace de Banach quelconque // Acta Sci. Math. 1956. Vol. 17, № 3–4. P. 181–189.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 248–250

Об одной наилучшей квадратурной формуле для приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода

Л. Г. Файзмамадова, М. Азизов

Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни, Душанбе, Таджикистан

Аннотация. В работе вычислены точные оценки погрешности наилучших квадратурных формул для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода для некоторых классов дифференцируемых функций.

1. В работах [1–5] рассматривается вопрос приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода для различных классов функций, определенных на заданной кривой Γ, по которой вычисляется криволинейный интеграл. Здесь для некоторых классов функций и классов кривых находим наилучшие квадратурные формулы. Следуя указанным работам, введем в рассмотрение квадратурную формулу

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)ds = \sum_{k=1}^{N} p_k f(M_k) + R_N(f;\Gamma), \tag{1}$$

где $f(M) = f(x,y)$, $M_k \in \Gamma$, $k = \overline{1,N}$. Сумму $\sum\limits_{k=1}^{N} p_k f(M_k)$, состоящую из линейной комбинации конечного числа значений подынтегральной функции, назовём квадратурной суммой, а $P = \{p_k\}_{k=1}^{N}$, $M = \{M_k\}_{k=1}^{N}$ — векторами коэффициентами и векторами узлами, $R_N(f;\Gamma) = R_N(f;\Gamma,P,M)$ — погрешность квадратурной формулы (1) на функции f, заданной и определённой вдоль кривой Γ.

Если на кривой Γ установлено положительное направление так, что положение точки $M = M(x,y)$ на кривой определяется длиною дуги $s = \breve{AM}$, отсчитываемой от начальной точки A, то, как хорошо известно, кривая Γ параметрически выразится уравнениями

$$x = x(s), y = y(s),\ 0 \leqslant s \leqslant L. \tag{2}$$

В этом случае функция $f(x,y) \equiv f(x(s),y(s))$ и квадратурная формула (1) при помощи разбиения отрезка $[0,L]$ точками

$$0 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_{N-1} < s_N \leqslant L$$

запишется в виде

$$\int\limits_{0}^{L} f(x(s),y(s))ds = \sum_{k=1}^{N} p_k f\left(x(s_k),y(s_k)\right) + R_N\left(f;\Gamma,\{p_k\},\{s_k\}\right). \tag{3}$$

© Л. Г. Файзмамадова, М. Азизов, 2016

При фиксированном N формула (3) задается векторами-коэффициентами $P=\{p_k\}_{k=1}^N$ и узлами $S=\{s_k\}_{k=1}^N$ и её остаток

$$R_N(f;\Gamma;P,S)=\int\limits_0^L f(x(s),y(s))ds-\sum_{k=1}^N p_k f\left(x(s_k),y(s_k)\right),$$

имеет вполне определенное числовое значение.

Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций $\{f(x(s),y(s)\}$, определенных в точках кривой Γ с параметрическими уравнениями (2) и интегрируемых как сложная функция $F(s):=f(x(s),y(s))$ параметра $s\in[0,L]$, то за величину, характеризующую точную оценку погрешности на всем классе $\mathfrak{M}$ на заданной кривой Γ, примем величину

$$R_N(\mathfrak{M};\Gamma;P,S)=\sup\left\{|R_N(f;\Gamma;P,S)|:f\in\mathfrak{M}\right\}.$$

Пусть $\mathfrak{N}_Q(L)$ — класс плоских спрямляемых кривых Γ с непрерывной кривизной, расположенных в области $D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant L^2\}$, длина которых не более L.

Обозначим через $W_p^{(1)}(K;Q):=W^{(1)}L_p(K;Q)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$ – класс функций $\{f(x(s),y(s))\}$, у которых почти всюду в области Q существуют частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ с ограничением

$$\|gradf(x(\cdot),y(\cdot))\|_{L_{p[0,L]}}=\left(\int\limits_0^L\left|\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right|^p ds\right)^{1/p}\leqslant K,$$

где, как обычно,

$$\|grad\,f(x(s),y(s))\|=\sqrt{\left(\frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial y}\right)^2}$$

при условии , что $\left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2=1.$

Через $W_{0,p}^{(1)}(K;Q)$ обозначим множество функций $f\in W_p^{(1)}(K;Q)$, удовлетворяющих условию $f(x(0),y(0))=0$. Всюду далее под $\mathfrak{M}$, подразумевая класс $W_p^{(1)}(K;Q)$ или $W_{0,p}^{(1)}(K;Q)$, за величину, характеризующую наибольшую погрешность квадратурной формулы (3) на классе функций $\mathfrak{M}$ и классе $\mathfrak{N}_Q(L)$, длина которых не превосходит L, следует взять величину

$$R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);P,S)=\sup\left\{R_N(\mathfrak{M};\Gamma;P,S):\Gamma\subset\mathfrak{N}_Q(L)\right\}. \tag{4}$$

Если A — множество всевозможных векторов (P,S) – коэффициентов и узлов формулы (4), то требуется найти величину

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L))=\inf\left\{R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);P,S):(P,S)\subset A\right\}. \tag{5}$$

Если существует вектор коэффициентов и узлов $(P^{(0)},S^{(0)})=(\{p_k^0\}_{k=1}^N,\{s_k^0\}_{k=1}^N)$, для которых выполняется равенство

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L))=R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);P^0,S^0)$$

то квадратурная формула (3) с вектором (P^0,S^0) называется наилучшей (или оптимальной) квадратурной формулой на классах функций $W_{0,p}^{(1)}(K;Q)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$, а вектор (P^0,S^0) называется наилучшим или оптимальным вектором коэффициентов и узлов.

В этой заметке мы приводим решение сформулированной задачи (5) для случая $p==1,2,\infty$.

Теорема. *Среди всех квадратурных формул вида* (3) *наилучшей на классах функций* $W_{0,p}^{(1)}(K;Q)$ *при* $p = 1, 2$ *и* $p = \infty$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L))$ *является формула*

$$\int\limits_0^L f\left(x(s), y(s)\right) ds =$$

$$= \frac{2L}{2N+1} \cdot \sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{2kL}{2N+1}\right), y\left(\frac{2kL}{2N+1}\right)\right) + R_N(f) \qquad (6)$$

При этом точная оценка погрешности формулы (6) *на указанных классах функций и кривых равна*

$$\mathcal{E}_N(W_{0,\infty}^{(1)}(K;Q), \mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{KL^2}{(2N+1)\sqrt{3}},$$

$$\mathcal{E}_N\left(W_{0,2}^{(1)}(K;Q), \mathfrak{N}_Q(L)\right) = \frac{KL^{3/2}}{(2N+1)\sqrt{3}},$$

$$\mathcal{E}_N\left(W_{0,\infty}^{(1)}(K;Q), \mathfrak{N}_Q(L)\right) = \frac{KL^2}{2(2N+1)}.$$

Список литературы

1. *Вакарчук С.Б.* Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Укр. матем. журнал. 1986. Т. 38, № 5. С. 643-645.
2. *Шабозов М.Ш.*, *Мирпоччоев Ф.М.* Оптимизация приближенного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // ДАН Республики Таджикистан. 2010. Т. 53, № 6. С. 415-419.
3. *Сангмамадов Д.С.* Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для классов функций и кривых, определяемых модулями непрерывности // ДАН Республики Таджикистан. 2011. Т. 54, № 10. С. 801-806.
4. Шабозов М.Ш. О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых // Матем. заметки. 2014. Т. 96, № 7. С. 637-640.
5. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета. 2015. Сер. 1. Т. 2(60). Вып. 4. С. 576-589.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 251–254

Оценки погрешности квадратурной формулы Чебышёва – Эрмита на некоторых классах функций

О. К. Фарайдунов

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан

Аннотация. Найдена точная оценка погрешности квадратурной формулы Чебышёва – Эрмита на классе функций $H^\omega[-1,1]$.

Хорошо известно, что квадратурная формула Чебышёва – Эрмита [1, с. 195]

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) + R_n(f) \tag{1}$$

точна для всех алгебраических многочленов степени не выше $2n-1$.

Заметим, что в формуле (1) все коэффициенты равны π/n, а узлы $x_k = \cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi$ являются нулями полинома Чебышёва первого рода

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Пусть $H^\omega[a,b]$ – класс функций f, определённых на отрезке $[a,b]$ и для любых двух точек $x', x'' \in [a,b]$, удовлетворяющих условию

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant \omega(|x' - x''|), \tag{3}$$

где $\omega(x)$ – заданный модуль непрерывности, то есть непрерывная неубывающая на $0 \leqslant x \leqslant$ $\leqslant b-a$ функция такая, что $\omega(0) = 0$. В частности, при $\omega(x) = Kx^\alpha$, где $K > 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, получаем класс Гёльдера $KH^\alpha[a,b]$, состоящий из функций f, удовлетворяющих условию

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant K|x' - x''|^\alpha, \quad \text{для всех} \quad x', x'' \in [a,b].$$

Если в квадратурной формуле Чебышёва – Эрмита (1) положить

$$x = \cos\theta, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad f(\cos\theta) = \varphi(\theta), \tag{4}$$

то вектор узлов

$$\overline{X} = \left\{x_k : \ x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right\}_{k=1}^{n}$$

переходит в вектор узлов

$$X^\circ = \left\{\theta_k : \ \theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}\right\},$$

а вектор коэффициентов $P^\circ = \{p_k : \ p_k = \pi/n\}_{k=1}^n$ остаётся на месте. При этом для погрешности квадратурной формулы Чебышёва – Эрмита (1) имеем

$$R_n(f) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx - \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) =$$

© О. К. Фарайдунов, 2016

$$= \int\limits_0^\pi \varphi(\theta)d\theta - \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = R_n(\varphi). \tag{5}$$

Этим мы вопрос о нахождении точного остатка квадратурной формулы Чебышёва – Эрмита (1) свели к вопросу об отыскании точного остатка квадратурной формулы прямоугольника следующего вида:

$$\int\limits_0^\pi \varphi(\theta)d\theta = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) + R_n(\varphi). \tag{6}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Среди всех квадратурных формул вида*

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sum_{k=1}^n p_k f\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) + R_n(f) \tag{7}$$

с весовой функцией $q(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$, *фиксированными узлами*

$$\overline{X} = \Big\{x_k : \ x_k = \cos(2k-1)\pi/(2n)\Big\}_{k=1}^n$$

и произвольными векторами коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^n$ *наилучшей по коэффициентам квадратурной формулой на классе* $H^\omega[-1,1]$ *является квадратурная формула Чебышёва – Эрмита* (1). *При этом для точной оценки погрешности формулы* (1) *на всём классе* $H^\omega[-1,1]$ *имеет место равенство*

$$R_n\Big(H^\omega[-1,1]; (\sqrt{1-x^2}\,)^{-1}, \overline{X}\Big) = 2n\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(\theta)d\theta. \tag{8}$$

Доказательство. В самом деле, из равенства (5), согласно определению погрешности на всём классе $H^\omega[-1,1]$ имеем [2, с. 128]

$$R_n(H^\omega[-1,1]; (\sqrt{1-x^2}\,)^{-1}, \overline{X}) = \inf_P R_n(H^\omega[-1,1]; (\sqrt{1-x^2}\,)^{-1}, \overline{X}, P) =$$
$$= \inf_P R_n(H^\omega[0,\pi]; X^\circ, P) = R_n(H^\omega[0,\pi]; X^\circ), \tag{9}$$

где положено $X^\circ = \Big\{\theta_k : \ \theta_k = (2k-1)\pi/(2n)\Big\}_{k=1}^n$.

Из (9) ясно, что для нахождения точной оценки погрешности квадратурной формулы (7) на классе функций $H^\omega[-1,1]$ достаточно найти точную оценку погрешности квадратурной формулы (6) на классе $H^\omega[0,\pi]$. С этой целью оценим величину в правой части (9), следуя методу Н. П. Корнейчука [3], а именно сопоставим вектору узлов $T^\circ = \Big\{\theta_k : \theta_k = (2k-1)\pi/(2n)\Big\}$ подмножество функций

$$H^\omega_\circ[0,\pi] = \Big\{\varphi : \ \varphi \in H^\omega[0,\pi], \ \varphi(\theta_k) = 0, \ k = \overline{1,n}\Big\}.$$

Очевидно, что при произвольном векторе узлов $P = \{p_k\}_{k=1}^n$ для этого подмножества функций имеем

$$\sup\Big\{|R_n(\varphi; T^\circ, P)| : \ \varphi \in H^\omega_\circ[0,\pi]\Big\} = \int\limits_0^\pi \varphi_\circ(\theta)d\theta, \tag{10}$$

где

$$\varphi_\circ(\theta) = \Big\{\omega(|\theta - (2k-1)\pi/(2n)|), \ (k-1)\pi/n \leqslant \theta \leqslant k\pi/n, \ k = \overline{1,n}\Big\}.$$

Таким образом, из соотношения (10) следует, что при произвольном векторе узлов P справедлива оценка снизу

$$R_n(H^\omega[0,\pi]; T^\circ, P) \geqslant R_n(H^\omega_\circ[0,\pi]; T^\circ, P) =$$
$$= \int\limits_0^\pi \varphi_\circ(\theta)d\theta = \sum_{k=1}^n \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \omega(|\theta - (2k-1)\pi/(2n)|)d\theta =$$
$$= \sum_{k=1}^n \left\{ \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{(2k-1)\pi/(2n)} + \int\limits_{(2k-1)\pi/(2n)}^{k\pi/n} \right\} \omega\left(\left| \theta - \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right| \right) d\theta =$$
$$= \sum_{k=1}^n \left\{ \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{(2k-1)\pi/(2n)} \omega((2k-1)\pi/(2n) - \theta)d\theta + \int\limits_{(2k-1)\pi/(2n)}^{k\pi/n} \omega(\theta - (2k-1)\pi/(2n))d\theta \right\} =$$
$$= \sum_{k=1}^n \left\{ - \int\limits_{\pi/(2n)}^{0} \omega(\theta)d\theta + \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(\theta)d\theta \right\} = 2\sum_{k=1}^n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(\theta)d\theta = 2n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(\theta)d\theta. \tag{11}$$

Теперь оценим сверху величину погрешности формулы (9) на классе $H^\omega[0,\pi]$ для конкретной квадратурной формулы прямоугольников. С этой целью для вектора

$$T^\circ = \Big\{ \theta_k : \theta_k = (2k-1)\pi/(2n) \Big\}_{k=1}^n$$

сопоставим вектор коэффициентов $P^\circ = \Big\{ p_k : p_k = \pi/n \Big\}_{k=1}^n$.

Очевидно, что для произвольной функции $\varphi \in H^\omega[0,\pi]$ погрешность квадратурной формулы прямоугольника (6) имеет вид

$$|R_n(\varphi; T^\circ, P^\circ)| = \left| \sum_{k=1}^n \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} [\varphi(\theta) - \varphi((2k-1)\pi/(2n))]d\theta \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^n \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \omega(|\theta - (2k-1)\pi/(2n)|)d\theta = 2n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(\theta)d\theta. \tag{12}$$

Утверждение теоремы 1 теперь с учётом равенства (9) следует из сопоставления неравенств (11) и (12) и таким образом доказано, что обе квадратурные формулы (7) и (6) соответственно на классах $H^\omega[-1,1]$ и $H^\omega[0,\pi]$ имеют одинаковую точную оценку

$$R_n\Big(H^\omega[-1,1] : (\sqrt{1-x^2}\,)^{-1}, \overline{X} \Big) = R_n(H^\omega[0,\pi], X^\circ) = 2n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(\theta)d\theta. \tag{13}$$

В частности, для класса Гёльдера из правой части равенства (13) при $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$ получаем следующую точную оценку:

$$R_n\Big(H^\alpha[-1,1]:\ (\sqrt{1-x^2}\,)^{-1}, \overline{X} \Big) = R_n\Big(H^\alpha[0,\pi], X^\circ \Big) = \frac{\pi^{\alpha+1}}{2^\alpha(\alpha+1)} \cdot \frac{1}{n^\alpha}.$$

Теорема 2. *Если функция $f \in C^{(2)}[-1,1]$, то для остаточного члена квадратурной формулы Чебышёва – Эрмита (1) выполняется равенство*

$$R_n(f) = \frac{\pi^3}{24n^2}\Big[(1-x_0^2)f''(x_0) - x_0 f'(x_0) \Big], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

где x_0 – некоторая точка интервала $(-1,1)$.

Доказательство. В равенствах (4), полагая

$$x_k = \cos\theta_k, \quad \theta_k = (2k-1)\pi/(2n), \quad k = \overline{1,n},$$

в силу равенства $f(\cos\theta_k) = \varphi(\theta_k)$, сразу обнаружим, что квадратурная формула (1) переходит в квадратурную формулу прямоугольников (6) и, так как $R_n(f) = R_n(\varphi)$ и по условию теоремы $f(x) \in C^{(2)}[-1,1]$, то ясно, что $\varphi(\theta) \in C^{(2)}[0,\pi]$. Поэтому в силу равенства $\varphi(\theta) = f(\cos\theta)$ имеем:

$$\varphi''(\theta) = (1-x^2)f''(x) - xf'(x). \tag{15}$$

В монографии [4, с. 101] доказано, что для квадратурной формулы прямоугольников (5) справедлива оценка

$$R_n(\varphi) = \frac{\pi^3}{24n^2} \cdot \varphi''(\theta_0), \tag{16}$$

где θ_0 – некоторая точка из интервала $(0,\pi)$. Очевидно, $\cos\theta_0 = x_0 \in [-1,1]$. Тогда из равенств (15) и (16) с учётом соотношения $\varphi(\theta) = f(\cos\theta)$ получаем

$$R_n(f) := R_n(\varphi) = \frac{\pi^3}{24n^2} \cdot \varphi''(\theta_0) = \frac{\pi^3}{24n^2}\Big[(1-x_0^2)f''(x_0) - x_0 f'(x_0)\Big], \quad x_0 \in (-1,1).$$

Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. *Крылов В.И*. Приближённое вычисление интегралов. – М.: Наука. 1967. 500 с.
2. *Никольский С.М*. Квадратурные формулы. – М.: Наука. 1988. 255 с.
3. *Корнейчук Н.П*. Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных // Матем. заметки. 1968. Т. 3, № 5. С. 565-576.
4. *Бахвалов Н.С*. Численные методы. – М.: Наука. 1975. 631 с.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 255–258

Точные неравенства для производных полиномов в пространстве Харди H_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$

Ш. А. Холмамадова

Хорогский государственный университет им. М.Назаршоева, Хорог, Таджикистан

Аннотация. Работа посвящена получению точных оценок производных алгебраических комплексных полиномов через модули непрерывности и гладкости самих полиномов в пространстве Харди H_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

В экстремальных задачах приближения функций полиномами в различных банаховых пространствах важную роль играют точные неравенства, позволяющие установить новые связи между конструктивными и структурными свойствами функций. При этом структурные свойства функций, как правило, характеризуются скоростью стремления к нулю модулями непрерывности различных порядков. С целью выявления этих структурных свойств в последнее время интенсивно изучаются оценки производных комплексных полиномов посредством модулей непрерывности высших порядков самих полиномов в банаховых пространствах аналитических в круге функций (см., например, [1-8] и приведенную там литературу).

Говорят, что аналитическая в круге $|z| < 1$ функция $f(z)$ принадлежит пространству Харди $H_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$, если

$$\|f\|_p := \|f\|_{H_p} = \lim_{\rho\to 1-0}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(\rho e^{it})|^p dt\right)^{1/p} < \infty,\ 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{H_\infty} = \max\Big\{|f(z)| : |z| < 1\Big\},\ p = \infty.$$

При $p = \infty$, предполагается, что f является непрерывной в области $|z| \leqslant 1$.

Хорошо известно [2, 3], что норма функции $f \in H_p$ реализуется на её угловых граничных значениях $f(t) := f(e^{it})$. Всюду далее, через $H_{p,\rho}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty,\ 0 < \rho \leqslant 1)$ обозначим пространство Харди аналитических в круге $|z| < \rho$ функций с конечной нормой

$$\|f\|_{H_{p,\rho}} := \|f(\rho z)\|_{H_p} \leqslant \infty.$$

Производную r-го порядка функции $f(z)$ по аргументу t комплексного переменного $z = \rho e^{it}$ обозначим через $f_a^{(r)}(z)$, а обычную производную r-го порядка через $f^{(r)}(z)$, т. е. полагаем

$$f_a^{'}(z) = f^{'}(z)\cdot zi, \quad f_a^{(r)} = \{f_a^{(r-1)}\}_a^{'}, \quad r = 2, 3, \ldots;$$

$$f^{(r)}(z) = d^r f/dz^r, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

а соответствующие граничные значения производных обозначим через $f_a^{(r)}(t)$ и $f^{(r)}(t)$. Если $f \in H_p$, то, структурные свойства этой функции охарактеризуем быстротою стремления к нулю модуля непрерывности

© Ш. А. Холмамадова, 2016

$$\omega(f,t)_p = \sup\left\{\|f(e^{i(\cdot+h/2)}) - f(e^{i(-h/2)})\|_p : |h| \leqslant t\right\}$$

и модуля гладкости её граничных значений

$$\omega_2(f,t)_p = \sup\left\{\|f(e^{i(\cdot+h/2)}) - 2f(e^{i(\cdot)}) + f(e^{i(-h/2)})\|_p : |h| \leqslant t\right\}.$$

Через $\mathcal{P}_n$ обозначим совокупность всех алгебраических комплексных полиномов степени не выше n:

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k, \ c_k \in \mathbb{C}.$$

Сформулируем основные утверждения настоящей работы, доказательство которых можно получить из соответствующих неравенств для производных аналитических в круге функций посредством модулей непрерывности самих функций в пространстве Харди H_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, опубликованных в работах [9–11].

Теорема 1. *Для произвольного алгебраического полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ при любом $\rho \in (0,1]$ справедливы точные неравенства*

$$\|p_{n,a}^{(r)}\|_{H_{p,\rho}} \leqslant \frac{1}{4}\rho^n n^{r+1} \int_0^{\pi/n} \omega(p_n,t)_p dt, \tag{1}$$

$$\|p^{(r)}\|_{H_{p,\rho}} \leqslant \frac{1}{4}\rho^{n-r} n\alpha_{nr} \int_0^{\pi/n} \omega(p_n,t)_p dt, \tag{2}$$

где $\alpha_{nr} = n(n-1)\ldots(n-r+1)$, $n \geqslant r$. *Неравенства* (1) *и* (2) *обращаются в равенства для полинома* $p_n(z) = az^n$, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

Отметим, что равенства (1) и (2) являются обобщением результатов Л. В. Тайкова [2, 3]. Знак равенства в (1) и (2) для полинома $p_n = az^n$, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, проверяется непосредственным вычислением.

Следующее утверждение является обобщением теоремы 1.

Теорема 2. *При любых* $r \in \mathbb{Z}_+$ *и* $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ $(q^{-1} + (q')^{-1} = 1$, $1 \leqslant q' \leqslant \infty)$ *для произвольного полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ справедливо неравенство*

$$\|p_{n,a}^{(r)}\|_{H_{p,\rho}} \leqslant \frac{1}{4}\rho^n \pi^{1/q'} n^{r+1/q} \left(\int_0^{\pi/n} \omega^q(p_n,t)_p dt\right)^{1/q}, \tag{3}$$

и при тех же условиях на $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ *и* $n > r$ *справедливо также неравенство*

$$\|p_n^{(r)}\|_{H_{p,\rho}} \leqslant \frac{1}{4}\rho^{n-r} \pi^{1/q'} n^{1/q} \alpha_{nr} \left(\int_0^{\pi/n} \omega^q(p_n,t)_p dt\right)^{1/q}, \tag{4}$$

причём при $q = 1$ (*и следовательно* $q' = \infty$) *оба неравенства* (3) *и* (4) *обращаются в равенства для полинома* $p_n = az^n$, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

В приводимых ниже теоремах норма производной r-го порядка полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ оценивается через усреднённое значение модуля гладкости самого полинома.

Теорема 3. *При любых* $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *справедливы точные неравенства*

$$\|p_{n,a}^{(r)}\|_{H_{p,\rho}} \leqslant \rho^n \frac{n^{r+1}}{2(\pi-2)} \int_0^{\pi/n} \omega_2(p_n,t)_p dt, \quad p_n \in \mathcal{P}_n, \tag{5}$$

$$\|p^{(r)}\|_{H_{p,\rho}} \leqslant \rho^{n-r}\frac{n\alpha_{nr}}{2(\pi-2)}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_2(p_n,t)_p dt, \quad n>r, \quad p_n\in\mathcal{P}_n, \tag{6}$$

Знак равенства в неравенствах (5) *и* (6) *реализует полином* $p_n = az^n$, $a\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$.

Неравенства (5) и (6) допускают следующее обобщение.

Теорема 4. *Для произвольного полинома* $p_n \in \mathcal{P}_n$ *при любых* $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r \geqslant 2$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *справедливы неравенства*

$$\|p_{n,a}^{(r)}\|_{H_{p,\rho}} \leqslant \rho^{n}\frac{\pi^{1/q'}n^{r+1/q}}{2(\pi-2)}\left(\int\limits_0^{\pi/n}\omega_2^q(p_n,t)_p dt\right)^{1/q}, \tag{7}$$

$$\|p_{n}^{(r)}\|_{H_{p,\rho}} \leqslant \rho^{n-r}\frac{\pi^{1/q'}n^{1/q}\alpha_{nr}}{2(\pi-2)}\left(\int\limits_0^{\pi/n}\omega_2^q(p_n,t)_p dt\right)^{1/q}, \tag{8}$$

где $1 \leqslant q \leqslant \infty$ $(q^{-1} + (q')^{-1} = 1)$, *причём при* $q = 1$ *неравенства* (7) *и* (8) *обращаются в равенства для полинома* $p_n = az^n, a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$.

Отметим, что при доказательстве теорем 1 и 3 мы используем схему рассуждения работ [3, 5, 9–11], а доказательства теорем 2 и 4 базируются ещё на следующем элементарном утверждении.

Лемма. *Для произвольной положительной и суммируемой со степени* $q \geqslant 1$ *функции* f *на отрезке* $[a, b]$ *имеет место неравенство*

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f^q(x)dx\right)^{1/q}, \quad 1\leqslant q\leqslant\infty. \tag{9}$$

В работе [4] Н. Айнуллоев доказал, что для произвольного тригонометрического полинома степени m вида

$$T_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m \rho_k\cos(kx+\varphi_k) \tag{10}$$

при любом натуральном $r \geqslant 2$ выполняется точное неравенство

$$\|T_m^{(r)}\|_p \leqslant \frac{m^{r+1}}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/2m}\omega_2(T_m,t)_p dt, \quad 1\leqslant p\leqslant\infty. \tag{11}$$

В следующем утверждении неравенство (11) распространяется на пространство L_q, а именно справедлива

Теорема 5. *Для произвольного тригонометрического полинома* (10) *при любых* $m \in \mathbb{N}$ *и* $r \geqslant 2$ $(r \in \mathbb{N})$ *имеет место неравенство*

$$\|T_m^{(r)}\|_p \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/q'}\frac{m^{r+1/q}}{\pi-2}\left(\int\limits_0^{\pi/(2m)}\omega_2^q(T_m,t)_p dt\right)^{1/q}, \tag{12}$$

$$1\leqslant q\leqslant\infty, \quad q^{-1}+(q')^{-1}=1,$$

которое, в частности, при $q = 1$ *превращается в* (11), *и равенства в этом случае в* (12) *реализуется полиномом* $T_m(x) = a\cos(mx + b)$, *где* $a, b \in \mathbb{R}$.

Список литературы

1. *Тайков Л.В.* О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 155-162.
2. *Тайков Л.В.* Некоторые точные неравенства в теории приближения функций // Analysis Mathematica. 1976. Т. 2, № 1. С. 77-85.
3. *Тайков Л.В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 285-295.
4. *Айнуллоев Н.* Точная оценка второй производной в пространстве L_p // Матем. заметки. 1991. Т. 49, № 5. С. 3-6.
5. *Шабозов М.Ш.*, *Шабозов О.Ш.* Наилучшее приближение и значение поперечников некоторых классов функций в пространстве Бергмана B_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ // ДАН России. 2006. Т. 410, № 4. С. 461-464.
6. *Шабозов М.Ш.*, *Шабозов О.Ш.* О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана // ДАН России. 2007. Т. 412, № 4. С. 466-469.
7. *Вакарчук С.Б.*, *Шабозов М.Ш.* О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Матем. сборник. 2010. Т. 201, № 8. С. 3-22.
8. *Шабозов М.Ш.*, *Лангаршоев М.Р.* Наилучшее приближение некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана // Известия АН Республики Таджикистан. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2009. № 3(136). С. 7-23.
9. *Шабозов М. Ш.*, *Холмамадова Ш.А.* Некоторые точные неравенства теории приближения аналитических в круге функций // ДАН Республики Таджикистан. 2010. Т. 53, № 8. С. 581-588.
10. *Холмамадова Ш.А.* Об оценке производных аналитических в круге функций // ДАН Республики Таджикистан. 2011. Т. 54, № 4. С. 265-269.
11. *Холмамадова Ш.А.* О точных оценках нормы второй производной функции в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ // ДАН Республики Таджикистан. 2011. Т. 54, № 6. С. 431-435.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 259–261

О значении поперечников классов периодических дифференцируемых функций в пространстве L_2

С. С. Хоразмшоев

Таджикский технический университет, Душанбе, Таджикистан

Аннотация. Для определённого вида характеристики гладкости функций получены точные неравенства типа Джексона. Найдены точные значения некоторых n-поперечников для классов функций, определённых при помощи указанной характеристики гладкости и мажорант, удовлетворяющих определённым требованиям.

Пусть $L_2{:=}L_2[0,2\pi]$ – пространство измеримых и суммируемых с квадратом 2π-периодических функций f с нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Через $\mathscr{F}_{2n-1}$ обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка $n-1$. Известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, которая имеет разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right),$$

величина ее наилучшего приближения элементами подпространства $\mathscr{F}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f)_2 := \inf\left\{\|f - T_{n-1}\|_2 : \quad T_{n-1}(x) \in \mathscr{F}_{2n-1}\right\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2\right\}^{1/2},$$

где S_{n-1} — частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f, $\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $k \geqslant n$, $a_k(f)$, $b_k(f)$ – косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции f.

Символом $L_2^{(r)}\big(r \in \mathbb{Z}_+,\, L_2^{(0)} \equiv L_2\big)$ обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка принадлежат пространству L_2.

Для оценки наилучшего приближения 2π-периодических функций используем следующую усредненную характеристику гладкости (см. напр. [1-3])

$$\Omega_m(f;t) = \left\{\frac{1}{t^m}\int\limits_0^t \ldots \int\limits_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m f(\cdot)\|^2 dh_1 \ldots dh_m\right\}^{1/2}, \tag{1}$$

где $t > 0$; $\overline{h} := (h_1, h_2, \ldots, h_m)$, $\Delta_{\overline{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \ldots \circ \Delta_{h_m}^1$.

© С. С. Хоразмшоев, 2016

Используя величину (1) в качестве характеристики гладкости, вводим в рассмотрение аппроксимационную характеристику следующего вида:

$$\mathscr{K}_{m,n,r}(h)=\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}}\frac{2^{m/2}\cdot n^rE_{n-1}(f)}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int_0^h(h-t)\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)},t\right)dt\right)^{m/2}}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ и $h\in\mathbb{R}_+$. Тогда выполняется равенство*

$$\mathscr{K}_{m,n,r}(h)=\left[1-\frac{2Si(nh)}{nh}+\Big(\frac{2\sin(nh/2)}{nh}\Big)^2\right]^{-m/2},$$

где $Si(t)=\displaystyle\int_0^t x^{-1}\sin x dx$ – интегральный синус.

Через $b_n(\mathfrak{M},L_2)$, $d^n(\mathfrak{M},L_2)$, $d_n(\mathfrak{M},L_2)$, $\delta_n(\mathfrak{M},L_2)$ и $\Pi_n(\mathfrak{M},L_2)$ обозначим соответственно бернштейновский, гельфандовский, колмогоровский, линейный и проекционный n-поперечники некоторого выпуклого центрально-симметричного компакта $\mathfrak{M}$ в пространстве L_2 (см. напр., [4,5]).

Также полагаем

$$E_{n-1}(\mathfrak{M}):=\sup\{E_{n-1}(f):f\in\mathfrak{M}\}.$$

Непрерывную возрастающую на полусегменте $[0,\infty)$ функцию $\Phi(t)$ такую, что $\Phi(0)=0$, будем называть мажорантой. Для произвольных $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ введём в рассмотрение следующий класс функций:

$$W_m^{(r)}(\Omega_m,\Phi):=\left\{f\in L_2^{(r)}:\ \left(\frac{2}{h^2}\int_0^h(h-t)\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)},t\right)dt\right)^{m/2}\leqslant\Phi(h),\ h>0\right\}.$$

Положим

$$\Big(1-\frac{\sin x}{x}\Big)_*:=\Big\{1-\frac{\sin x}{x},\ \text{ если }\ 0\leqslant x\leqslant t_*;\ \ 1-\frac{\sin t_*}{t_*},\ \text{ если, }\ x\geqslant t_*\Big\},$$

где через t_* обозначена величина аргумента $x\in(0,\infty)$ функции $\sin x/x$, при котором она достигает своего наименьшего значения. Очевидно, что t_* есть наименьший из положительных корней уравнения $x=\operatorname{tg}x$. Простые вычисления показывают, что $4,49<t_*<4,51$.

Теорема 2. *Пусть $m,n,r\in\mathbb{N}$ и функция Φ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)}\geqslant\left\{\frac{\pi^2}{\pi^2-2\pi Si(\pi)+4}\right\}^{m/2}\times$$

$$\times\begin{cases}\left\{1-\dfrac{2Si(nh)}{nh}+\Big(\dfrac{2\sin(nh/2)}{nh}\Big)^2\right\}^{m/2}, & \text{если }\ 0\leqslant h\leqslant\pi/n,\\[2ex] \left\{1-\dfrac{2\pi}{nh}+\dfrac{2\pi^2}{n^2h^2}-\dfrac{2\pi Si(\pi)-4}{n^2h^2}\right\}^{m/2}, & \text{если }\ h\geqslant\pi/n.\end{cases}\tag{2}$$

Тогда справедливы равенства

$$\gamma_{2n}\left(W_m^{(r)}(\Omega_m,\Phi);L_2\right)=\gamma_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(\Omega_m,\Phi);L_2\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W_m^{(r)}(\Omega_m,\Phi)\right)=\frac{\pi^m}{2^{m/2}n^r}\left\{\frac{1}{\pi^2-2\pi Si(\pi)+4}\right\}^{m/2}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\gamma_n(\cdot)$ *– любой из* n*-поперечников, рассмотренных выше.*

Множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (2)*, не пусто.*

Список литературы

1. *Вакарчук С.Б.* Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. 2005. Т. 78, № 5. С. 792-796.
2. *Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б., Забутная В.И.* Точные неравенства типа Джексона – Стечкина для периодических функций в L_2 и значения поперечников классов функций // ДАН России. 2013. Т. 451, № 6. С. 625-628.
3. *Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш., Забутная В.И.* Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых функциональных классов // Український математичний вісник. 2014. Т. 11, № 3. С. 417-441.
4. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ. 1976. 325 с.
5. *Pinkus A.* n-width in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag. 1985. 292 p.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 262–265

Поперечники некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана

Х. М. Хуромонов

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан

Аннотация. В работе получены некоторые результаты, связанные с построением наилучших линейных методов приближения и вычислением точных значений различных n-поперечников некоторых классов функций, аналитических в круге радиуса $R \geqslant 1$, принадлежащих весовому пространству Бергмана, усреднённые модули гладкости которых мажорируются заданной функцией.

1. Первые результаты, связанные с вычислением колмогоровских n-поперечников в банаховом пространстве Харди H_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ для классов аналитических функций с ограниченной по норме H_p r-й производной, найдены В. М. Тихомировым [1] $(p = \infty)$ и Л. В. Тайковым [2] $(1 \leqslant p < \infty)$. Оценка сверху ранее была получена К. И. Бабенко [3]. С. Б. Вакарчук [4] изучал аналогичные задачи в пространствах Бергмана и вычислил точные значения целой серии n-поперечников для некоторых классов аналитических функций. Им же построены наилучшие линейные методы приближения для ранее изучавшихся Л. В. Тайковым [5], Н. Айнуллоевым и Л. В. Тайковым [6] классов функций. Продолжая исследование указанных авторов, С. Б. Вакарчуком и М. Ш. Шабозовым в работе [7] построены наилучшие линейные методы приближения в пространстве Бергмана с произвольным суммируемым весом. Здесь мы продолжаем исследование в этом направлении и излагаем некоторые новые результаты.

Напомним некоторые обозначения и определения, используемые в дальнейшем. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{C}$ – соответственно множество натуральных, положительных и комплексных чисел; $U_R \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ – круг радиуса $R \geqslant 1$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $A(U_R)$ – множество аналитических в U_R функций. Для произвольной функции $f \in A(U_R)$ символом $H_{p,R}(1 \leqslant p \leqslant \infty, R \geqslant 1)$ обозначим банахово пространство Харди, для которого конечна норма

$$\|f\|_{H_{p,R}} = \lim_{\rho \to R-0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^p dt \right)^{1/p}, \text{ если } 1 \leqslant p < \infty. \tag{1}$$

В случае $p = \infty$ дополнительно будем предполагать функцию $f(z)$ непрерывной в замкнутом круге $\overline{U}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant R\}$ и

$$\|f\|_{H_{\infty,R}} = \max\{|f(Re^{it})| : t \in [0, 2\pi]\}.$$

В (1) интеграл понимается в смысле Лебега и норма реализуется на угловых граничных значениях функций $f \in H_{p,R}$, т. е.

$$\|f\|_{H_{p,R}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})|^p dt \right)^{1/p}, \ 1 \leqslant p < \infty.$$

© Х. М. Хуромонов, 2016

В случае $R = 1$ полагаем $U \stackrel{def}{=} U_1$, $H_p \stackrel{def}{=} H_{p,1}$ и $\|f\|_{H_p} \stackrel{def}{=} \|f\|_{H_{p,1}}$.

Через $\mathscr{L}_p \stackrel{def}{=} \mathscr{L}_p(U)$, $1 \leqslant p < \infty$ обозначим банахово пространство комплекснозначных в U функций f, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{\mathscr{L}_p} = \left(\frac{1}{2\pi}\iint\limits_U |f(z)|^p dxdy\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} \rho|f(\rho e^{it})|^p dtd\rho\right)^{1/p},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Пусть $\gamma(z)$ — некоторая неотрицательная измеримая не эквивалентная нулю функция, суммируемая на множестве U. Через $\mathscr{L}_{p,\gamma} \stackrel{def}{=} \mathscr{L}_p(U,\gamma)$, $1 \leqslant p < \infty$ обозначим множество комплекснозначных в U функций f, для которых

$$\gamma^{1/p} f \in \mathscr{L}_p(U), \quad \|f\|_{\mathscr{L}_{p,\gamma}} = \|\gamma^{1/p} f\|_{\mathscr{L}_p}.$$

Под $B_{p,\gamma} \stackrel{def}{=} B_p(U,\gamma)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ понимаем банахово пространство функций $f \in A(U)$, таких, что $f \in \mathscr{L}_{p,\gamma}$. При этом

$$\|f\|_{B_{p,\gamma}} = \left(\int\limits_0^1 \rho\gamma(\rho) M_p^p(f,\rho) d\rho\right)^{1/p},$$

где

$$M_p^p(f,\rho) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^p dt.$$

В [7] рассматривалась конкретная весовая функция γ_*, которая позволяет получать пространство B_{p,γ_*} аналитических в U функций с менее жесткими ограничениями на их поведение вблизи границы $|z| = 1$ круга U по сравнению с функциями, принадлежащими пространству B_p.

2. Пусть X – банахово пространство, S — единичный шар в X, $\mathfrak{M}$ – некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество в X, $\Lambda_n \subset X$ — n-мерное линейное подпространство, $\Lambda^n \subset X$ – подпространство коразмерности n, $\mathcal{L} : X \to \Lambda_n$ – линейный непрерывный оператор, отображающий X в Λ_n. Приближение фиксированного множества $\mathfrak{M} \subset X$ фиксированным подпространством $\Lambda_n \subset X$ определяется величиной

$$E(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X \stackrel{def}{=} \sup\{E(f,\Lambda_n)_X : \ f \in \mathfrak{M}\} := \sup\{\inf\{\|f - \varphi\|_X : \ \varphi \in \Lambda_n\} : \ f \in \mathfrak{M}\}.$$

Величина

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X \stackrel{def}{=} \inf\{\sup\{\|f - \mathcal{L}(f)\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\} : \mathcal{L}X \subset \Lambda_n\} \tag{2}$$

характеризует наилучшее линейное приближение множества $\mathfrak{M}$ элементами подпространства $\Lambda_n \subset X$. Линейный оператор $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{L}^* X \subset \Lambda_n$, если он существует и реализует в (2) точную нижнюю грань:

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X = \sup\{\|f - \mathcal{L}^*(f)\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\},$$

называется наилучшим для $\mathfrak{M}$ линейным методом приближения. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : \ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} : \ \Lambda_{n+1} \subset X\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\{E(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X : \Lambda_n \subset X\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \inf\{\sup\{\|f\|_X : \ f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\} : \Lambda^n \subset X\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\{\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X : \Lambda_n \subset X\}$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, гельфандовским и линейным n-поперечниками (см., например, [8, с.17]). Если существует подпространство Λ^*_{n+1}, для которого

$$b_n(\mathfrak{M},X)=\sup\{\varepsilon>0:\varepsilon S\cap\Lambda^*_{n+1}\subset\mathfrak{M}\},$$

то оно является экстремальным для бернштейновского n-поперечника. Подпространство $\Lambda^n_*\subset X$ коразмерности n, если оно существует, такое, что

$$d^n(\mathfrak{M},X)=\sup\{\|f\|_X:\ f\in\mathfrak{M}\cap\Lambda^n_*\},$$

называют экстремальным для гельфандовского n-поперечника. Если существует $\widetilde{\Lambda}_n\subset X$, для которого

$$d_n(\mathfrak{M},X)=E(\mathfrak{M},\widetilde{\Lambda}_n)_X,$$

то $\widetilde{\Lambda}_n$ называют экстремальным подпространством для колмогоровского n-поперечника. Подпространство $\overline{\Lambda}_n\subset X$, для которого

$$\delta_n(\mathfrak{M},X)=\mathcal{E}(\mathfrak{M},\overline{\Lambda}_n)_X,$$

называют экстремальным для линейного n-поперечника. Между перечисленными выше n-поперечниками имеют место соотношения [8]

$$b_n(\mathfrak{M},X)\leqslant \begin{matrix} d_n(\mathfrak{M},X)\\ d^n(\mathfrak{M},X)\end{matrix} \leqslant\delta_n(\mathfrak{M},X).$$

3. Символом $f^{(r)}(z)$, $r\in\mathbb{N}$ обозначим обычную производную r-го порядка по переменной z функции $f\in A(U_R)$. Равенством

$$\omega_2(f,2t)_{H_{p,R}}:=\sup\left\{\|f(ze^{ix})-2f(z)+f(ze^{-ix})\|_{H_{p,R}}:\ |x|\leqslant t\right\}=$$
$$=\sup_{|x|\leqslant t}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|f\left(Re^{i(\tau+x)}\right)-2f\left(Re^{i\tau}\right)+f\left(Re^{i(\tau-x)}\right)\right|^p d\tau\right\}^{1/p}$$

определим модуль гладкости функции $f\in H_{p,R}$ и структурные свойства указанных функций охарактеризуем скоростью убывания к нулю модуля гладкости граничных значений производных $f^{(r)}(z)$, задавая эту скорость убывания посредством мажоранты некоторой усреднённой величины $\omega_2(f^{(r)},2t)_{H_{p,R}}$.

Пусть $\Phi(t)$, $t\geqslant 0$ – произвольная непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0)=0$. Выбирая в качестве мажоранты функцию Φ введем в рассмотрение следующий класс функций:

$$W^{(r)}_{p,R}\overset{def}{=}\left\{f\in A(U_R):\ \frac{1}{h}\int\limits_0^h\omega_2(f^{(r)};2t)_{H_{p,R}}dt\leqslant\Phi(h)\ \text{для всех}\ h\in(0,\pi/2]\right\},$$

где $r\in\mathbb{N}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $R\geqslant 1$. При этом $W^{(r)}_p(\Phi)\overset{def}{=}W^{(r)}_{p,1}(\Phi)$.

Обозначим через $\mathcal{P}_n$ – совокупность алгебраических комплексных полиномов степени n вида $p_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kz^k$, $a_k\in\mathbb{C}$, и полагаем

$$\alpha_{n,r}:=n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1),\quad n\geqslant r,\quad n,r\in\mathbb{N}.$$

Теорема 1. *Пусть $r\in\mathbb{N}$, $R\geqslant 1$, $1\leqslant p<\infty$, $0<h\leqslant\pi/2$ и мажоранта Φ удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi\big(\pi/(2(n-r))\big)}\geqslant\frac{\pi}{\pi-2}\cdot\frac{1}{(n-r)h}\int\limits_0^{(n-r)h}(1-\cos x)_*dx,$$

где

$$(1-\cos x)_*=\Big\{1-\cos x,\ \textit{если}\ \ 0\leqslant x\leqslant\pi;\ 2,\ \textit{если}\ \ x\geqslant\pi\Big\}.$$

Тогда для любого натурального числа $n > r$ имеют место следующие равенства:

$$b_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); B_{p,\gamma}\right) = b_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); \mathscr{L}_{p,\gamma}\right) = d_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); B_{p,\gamma}\right) =$$

$$= d^n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); B_{p,\gamma}\right) = d^n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); \mathscr{L}_{p,\gamma}\right) = \delta_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); \mathscr{L}_{p,\gamma}\right) =$$

$$= E\left(W^{(r)}_{p,R}; \overline{\Lambda}_n\right)_{\mathscr{L}_{p,\gamma}} = \mathcal{E}\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); \overline{\Lambda}_n\right)_{\mathscr{L}_{p,\gamma}} = \sup\left\{\|f - \mathcal{L}_*(f)\|_{\mathscr{L}_{p,\gamma}} : \, f \in W^{(r)}_{p,R}(\Phi)\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right)\left(\int\limits_0^1 \rho^{np+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/p}.$$

При этом:

1) *в случае $d_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); \mathscr{L}_{p,\gamma}\right)$ и $\delta_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); \mathscr{L}_{p,\gamma}\right)$ подпространство*

$$\Lambda^*_n \overset{def}{=} span\left\{\left\{z^k\right\}_{k=0}^{r-1}, \left\{\left[R^{2(n-k)} + \frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\left[\sigma_{k,r}\left(1 - \left(\frac{k-r}{2n-r-k}\right)^2\right) - 1\right]|z|^{2(n-k)}\right]z^k\right\}_{k=r}^{n-1}\right\},$$

где

$$\sigma_{k,r} \overset{def}{=} \frac{2(n-r)}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/[2(n-r)]}(1 - \sin(n-r)x)\cos(k-r)x dx, \quad k \geqslant r,$$

является экстремальным для класса $W^{(r)}_{p,R}(\Phi)$ в пространстве $\mathscr{L}_{p,\gamma}$;

2) *линейный непрерывный оператор*

$$\mathcal{L}^*_{n-1}(f,z) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f)z^k + \sum_{k=r}^{n-1}\left\{1 + \frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\left[\sigma_{k,r}\left(1 - \left(\frac{k-r}{2n-r-k}\right)^2\right) - 1\right]\left(\frac{|z|}{R}\right)^{2(n-k)}\right\}c_k(f)z^k$$

является наилучшим для класса $W^{(r)}_{p,R}$ линейным методом приближения в пространстве $\mathscr{L}_{p,\gamma}$;

3) *подпространство $\Lambda^n_* \overset{def}{=} \{f \in B_{p,\gamma} : \, f^{(k)}(0) = 0, \, k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ – экстремальное для n-поперечника $d^n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); B_{p,\gamma}\right)$*;

4) *экстремальным для n-поперечника $b_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); B_{p,\gamma}\right)$ является подпространство $\overline{\Lambda}_{n+1} \overset{def}{=} span\{1, z, \ldots, z^n\}$.*

Список литературы

1. *Тихомиров В.М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи матем. наук. 1960. Т. 15, № 3. С. 81-120.
2. *Тайков Л.В.* О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 155-162.
3. *Бабенко К.И.* О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Известия АН СССР. Серия матем. 1958. Т. 22, № 5. С. 631-640.
4. *Вакарчук С.Б.* Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки. 1995. Т. 57, № 1. С. 30-39.
5. *Тайков Л.В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 285-294.
6. *Айнуллоев Н.*, *Тайков Л.В.* Наилучшее приближение в смысле Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Матем. заметки. 1986. Т. 40, № 3. С. 341-351.
7. *Вакарчук С.Б.*, *Шабозов М.Ш.* О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Матем. сборник. 2010. Т. 201, № 8. С. 3-22.
8. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ. 1976. 324 с.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 266–273

Локальная солнечность в задачах эйконала и локальных минимумов функции-расстояния

И. Г. Царьков

Московский государственный университет, Москва, Россия

Аннотация. В докладе затрагиваются вопросы, связанные с изучением C^1-решений уравнений эйконала, как частного случая уравнений Гамильтона-Якоби. При исследовании этих вопросов применяются стандартные методы геометрической теории приближения. Параллельно с этим обсуждается вопрос о поведении локальных минимумов функций расстояния. Хотя теоремы рассмотрены для нормированных пространств, соответствующие свойства выполняются и для однородных функционалов, линия уровня которых состоит из конечного числа C^2-гладких с модулем выпуклости 2-го порядка кривых (поверхностей). Доклад сопровождается показом различных картинок, демонстрирующих различные случаи каустики различных однородных функционалов. На одной из картинок демонстрируется теорема об областях постоянства числа локальных минимумов. Отметим один из важных случаев функционалов. Это функционал, порожденный шаром со смещенным центром. Для геометрической оптики это соответствует изучению распространения фронта возмущения при наличии ненулевой скорости среды (эфира).

Одним из новых и перспективных направлений геометрической теории приближения является изучение ее методами решений уравнений Гамильтона-Якоби, одним из представителей которого является уравнение эйконала: $|\nabla u| = 1$, где функция $u = u(x)$ обычно задана на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Из простейших соображений нетрудно получить, что такие решения локально представляют собой функции вида $c \pm \varrho(x, M)$ для некоторых констант $c \in \mathbb{R}$ и подмножеств $M \subset \mathbb{R}^n$, где $\varrho(x, M)$ – расстояние до некоторого множества M от точки x. Само уравнение эйконала является основным уравнением геометрической оптики, с основами которой можно ознакомится в монографиях М. Борна, Э. Вольфа [1], Дж. Бруса, П. Джиблина [2] и Р. Фейнмана [3], Ю.А. Кравцова, Ю.И. Орлова [4], В. И. Арнольда [5], С. Н. Кружкова [6]. Здесь мы обратим внимание на следующий факт: свойство гладкости решения уравнения эйконала взаимосвязано с геометрическо-аппроксимативным понятием локальной солнечности поверхностей уровня этого решения. По этой причине в данной работе мы будем исследовать свойства локальной солнечности (регулярности) и особых точек. Подробнее о связи C^1-решений уравнения эйконала с геометрической теорией приближения и свойствами функций расстояния до множества можно посмотреть в работе [7], а также ознакомиться со свойствами функций расстояния и свойств солнечности в работах [8, 9].

Далее мы будем изучать аппроксимативные свойства непустого и замкнутого множества M в произвольном действительном конечномерном банаховом пространстве X с нормой $\|\cdot\|$, что имеет отношение к уравнению эйконала вида $\|\nabla u\|_{X^*} = 1$. Здесь X^* – сопряженное с X пространство, а $u = u(x)$ – функция на подмножестве пространства X. Заметим, что случай $\dim X = +\infty$ разбирается во многих утверждениях аналогично при правильном модифицировании основных определений и дополнительных условий. Отме-

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 16-01-00295-а.

© И. Г. Царьков, 2016

тим, что более общий вид этой задачи может быть записан в виде $f(\nabla u) = 1$ для некоторой выпуклой функции на X^*. В частности рассмотрение функции $f(x^*) := \|x^*\|_{X^*} + (x_0, x^*)$ ($\|x_0\|_X < 1$) приводит к необходимости исследования задач геометрической теории приближения в несимметричном пространстве $(X, \|\cdot - x_0\|)$. В случае $X = \mathbb{R}^m$ с несимметричной нормой $\|x| := \sqrt{1 + \frac{|a|^2}{4}}\,|x| + \frac{1}{2}(x, a)$ уравнение эйконала эквивалентно уравнению: $|\nabla u|^2 + (a, \nabla u) = 1$, где $a \in \mathbb{R}^m$ – некоторый постоянный вектор. Последнее уравнение сводится заменой переменных к известному уравнению распространению фронта световой волны в анизотропной среде с постоянной скоростью v и постоянным вектором преломления $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{R}^m$: $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{u'_{x_k}}{n_k}\right)^2 + \frac{2}{c}(v, \nabla u) = 1$.

Через $\varrho(x, M)$ обозначим величину $\inf\limits_{y \in M} \|x - y\|$. Точка $y_0 \in M$ называется ближайшей точкой в M для точки x, если $\|x - y_0\| = \varrho(x, M)$. Множество ближайших для точки x обозначают через $Px = P_M x$. Точка $y_0 \in M$ называется локальным минимумом (для точки $x \in X$), если найдется окрестность $O(y_0)$, для которой эта точка ближайшая во множестве $M \cap O(y_0)$ к точке x, а величина $\varrho(x, M \cap O(y_0)) = \|x - y_0\|$ называется значением локального минимума функции-расстояния на множестве M в точке x. Ближайшая точка в множестве M для x является глобальным минимумом для x. В конечномерном пространстве (или бесконечном сепарабельном) число значений локальных минимумов не более, чем счетно. Часто это позволяет эти значения минимумов упорядочить по возрастанию и назвать точку локальным минимумом ранга n, если его значение стоит на n-ом месте. Такие точки x мы будем называть *ранжированными*, а остальные (у которых множество значений локальных минимумов имеет предельное значение) *неранжированными*. В случае, когда поверхность C^2-гладкая, а пространство имеет модуль выпуклости второго порядка, все точки не принадлежащие каустике (см стр. 269) являются ранжированными. В общей ситуации замыкание множества всех неранжированных точек мы будем добавлять к каустике (см стр. 269).

Определение 1. *Точка $x \in X \setminus M$ называется регулярной для замкнутого множества $M \subset X$, если все точки некоторой окрестности $O(x)$ являются точками единственности (т. е. для них существует единственная ближайшая в M). Точки, не являющиеся регулярными или принадлежащие замыканию* $\operatorname{int} M$, *будем называть особыми.*

Отметим, что для конечномерного пространства X в регулярной точке $x_0 \in X \setminus M$ выполняется свойство локальной строгой солнечности (см обзоры [7]–[9]), т. е. для любой точки $x \in O(x_0)$ существует (единственная ближайшая) y из M такая, что y будет являться ближайшей в M для всех точек из пересечения $O(x_0)$ и луча ℓ_y, выходящего из y и проходящего через x.

Отметим также, что множество всех регулярных точек (регулярное множество) является открытым, а множество всех особых точек (особое множество) точек является замкнутым. Непустое особое множество является замыканием точек неединственности (у которых не менее двух ближайших). Из результатов геометрической теории приближения известно, что для любого замкнутого множества M в строго выпуклом сепарабельном пространстве множество всех особых точек этого множества, не являющихся точками единственности, покрывается счетным набором липшицевых поверхностей и является связным и локально связным в случае выпуклых гиперповерхностей M. Если модуль выпуклости пространства X второго порядка, т. е. для некоторого числа $C > 0$ и произвольных чисел $\varepsilon \in [0, 2]$ верно неравенство: $\inf\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} \mid \|x\| = \|y\| = 1,\ \|x - y\| \geqslant \varepsilon\} \geqslant C\varepsilon^2$, а замкнутое множество M, представляет собой след гладкого многообразия класса C^2, то особое множество нигде не плотно в X.

Теорема 1. *Пусть X – строго выпуклое конечномерное пространство с непрерывно дифференцируемой нормой на $X \setminus \{0\}$, $M \subset X$ – непустое замкнутое множество, $\Omega \subset X$*

– некоторая область. Тогда функция $\varphi(x) = c \pm \varrho(x, M)$ является C^1-решением уравнения эйконала на множестве $\Omega \setminus M$ только тогда, когда множество всех особых точек множества M лежит в $X \setminus \Omega$.

Доказательство. Функция $\|\cdot - x_0\|$ непрерывно дифференцируема на $X \setminus \{x_0\}$. Поэтому функция $\varrho(\cdot, M)$ в регулярной точке $x_0 \in X \setminus M$ имеет производную, равную функционалу x_0^*, единичной нормы, для которого $x_0^*(x_0 - y_0) = \|x_0 - y_0\|$, где y_0 – единственная ближайшая для точки x_0 во множестве M. Учитывая, что функционал x_0^* непрерывно зависит от y_0, а y_0 непрерывно зависит от x_0, мы получим, что функция $\varrho(\cdot, M)$ непрерывно дифференцируема на регулярном множестве. Известно, что эта функция недифференцируема в точках неединственности (см [8]), а, следовательно, не является непрерывно дифференцируемой на замыкании множества точек неединственности, т. е. в точках особого множества. Отсюда вытекает утверждение теоремы.

Это утверждение показывает, что изучение *особых множеств* различных подмножеств X представляет *особый* интерес. И часто позволяет отсеивать лишние функции вида $c \pm \varrho(x, M)$ как претендентов на C^1-решение уравнения эйконала.

Условие непрерывной дифференцируемости решения эйконала может не продолжаться на границу области по непрерывности. Однако, при некоторых условиях на границу области всякое непрерывное дифференцируемое решения эйконала продолжается по непрерывности на замыкание области.

Теорема 2. *Пусть Ω – такая область в конечномерном пространстве X, что для произвольных точки $x \in \partial\Omega$ и числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что любые две точки из $O_\delta(x) \cap \Omega$ можно связать кривой $\gamma \subset \Omega$, длина которой $\leqslant \varepsilon$. Тогда всякое C^1-решение уравнения эйконала в области Ω продолжается как непрерывная функция на $\overline{\Omega}$.*

Доказательство. Пусть функция u является C^1-решением уравнения эйконала. Из условий теоремы вытекает, что для любых компакта $K \subset \partial\Omega$ и числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что в любой δ-окрестности произвольной точки $x \in K$ произвольные две точки $x_1, x_2 \in \Omega$ можно связать кривой γ длины $\leqslant \varepsilon$, лежащей в этой же окрестности. Поскольку $u(x_1) - u(x_2) = \int\limits_\gamma (\nabla u, dr)$, то $\|u(x_1) - u(x_2)\| \leqslant |\gamma| \leqslant \varepsilon$. Из произвольности выбора ε вытекает, что в точке x существует конечный предел функции u, который мы будем обозначать как $u(x)$. Возьмем произвольные точки $y_1, y_2 \in K : \|y_1 - y_2\| < \delta$. Найдутся точки $x_1, x_2 \in \Omega$, сколь угодно близкие соответственно к точкам y_1 и y_2, и которые можно связать кривой длины $< 3\varepsilon$. Отсюда $\|u(x_1) - u(x_2)\| \leqslant 3\varepsilon$, и, следовательно, $\|u(y_1) - u(y_2)\| \leqslant 3\varepsilon$. Таким образом функция u продолжается как непрерывная функция на K. Из произвольности выбора K вытекает утверждение теоремы.

Через $\mathbb{X}$ обозначим расширение пространства X добавлением бесконечной точки (окрестности такой точки определяются дополнениями замкнутых шаров из X). Бесконечную точку будем считать, особой для любых множеств $M \subset X$.

Теорема 3. *Пусть X – строго выпуклое конечномерное пространство, E – множество всех особых точек в $\mathbb{X} \setminus M$ множества M. Тогда E является гомотопией (ретракцией) $\mathbb{X} \setminus M$, а M является гомотопией (ретракцией) множества $\mathbb{X} \setminus E = X \setminus E$. Если M – гиперповерхность в X с замкнутым следом, то для любой компоненты связности D множества $X \setminus M$ множество всех особых точек из $\overline{D}$ является гомотопией (ретракцией) множества $\overline{D}$.*

Доказательство. Докажем 1-ое утверждение теоремы, построив соответствующую гомотопию $\varphi(x, \lambda)$. В особых точках a положим $\varphi(a, \lambda) = a$ для всех $\lambda \in [0, 1]$. Возьмем произвольную регулярную точку $x \in X \setminus M$. Для нее существует единственная ближайшая $y \in \partial M$. Пусть ℓ – открытый луч, начинающийся в y и проходящий через x. По условию регулярности найдется окрестность $O(x)$, состоящая из точек регулярности и поэтому для некоторого интервала (y, x'), содержащего точку x, все точки этого интервала являются регулярными точками (вытекает из теоремы Брауэра-Жордана), для которых y – единственная ближайшая в M. Отсюда следует, что найдется наибольший по вложению интервал $I = (y, a) \subset \ell$, состоящий их регулярных точек, имеющих в качестве ближайшей точку y. При этом $a \in \mathbb{X}$ является особой точкой. Если a – бесконечная точка, то положим $\varphi(x, \lambda) = y + \frac{x-y}{\lambda}$ $(\lambda \in (0, 1])$ и $\varphi(x, 0) = a$. Если a – конечная точка, то положим $\varphi(x, \lambda) = \lambda x + (1 - \lambda)a$ $(\lambda \in [0, 1])$. Нетрудно проверить, что φ искомая гомотопия.

Второе утверждение теоремы разбирается аналогично.

Следствие 1. *Для строго выпуклого конечномерного пространства X и замкнутого множества $M \subset X$ множество особых точек, находящихся в ограниченной компоненте связности $X \setminus M$, связно и непусто, и одноточечно только, если эта компонента – открытый шар.*

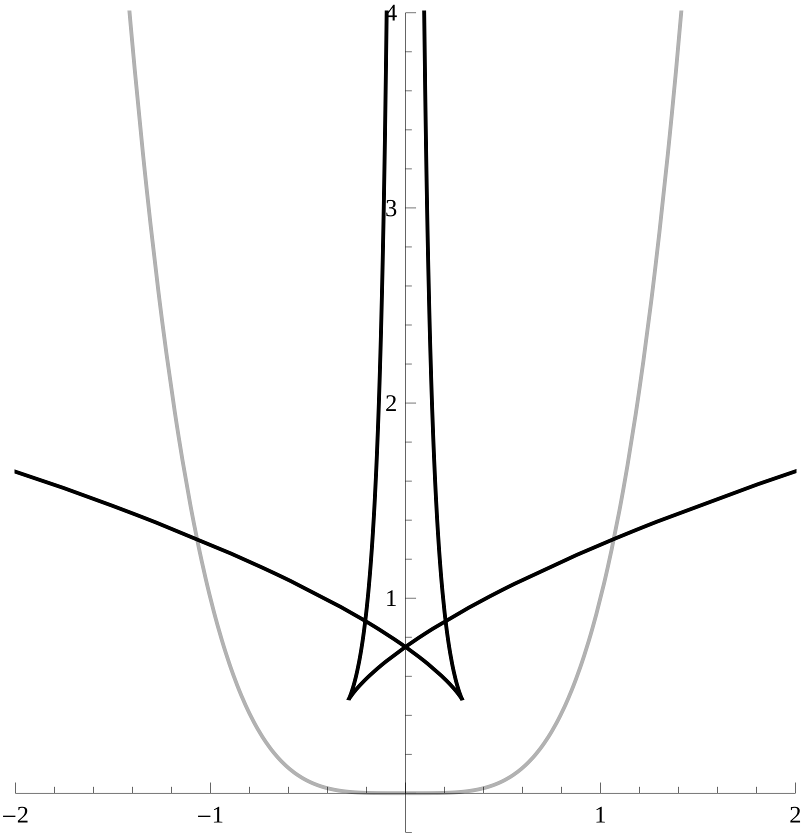
Гладким путем будем называть такое отображение $r : I \to X$ $(I \subset \mathbb{R}$ – промежуток), что $\|\dot{r}\| \neq 0$ на I. Если некоторый конец а промежутка I принадлежит этому промежутку, то точку $A = r(a)$ назовем концом пути r. Будем говорить, что гладкий путь $r : I \to X$ принадлежит классу H_0^α (является H_0^α -путем) при $\alpha \in (1, 2]$, если отображение $\dot{r}$ гёльдерово с показателем $\alpha - 1$ на внутренности промежутка I (т. е. на $\dot{I} = \operatorname{int} I$). Будем говорить, что путь r в конце $A = r(a)$ имеет гладкость C^1 (соответственно, H^α), если $r \in C^1(a)$ ($\dot{r}$ – гёльдерово с показателем $\alpha - 1$ в точке a). Далее будем рассматривать пути только трех типов. К первому типу отнесем простые пути $r : (a, b) \to X$, для которых $r(t) \to \infty$ при $t \to a(b)$. Такие пути будем называть неограниченными. Ко второму типу отнесем простые полуограниченные пути $r : [a, b) \to X$, для которых $r(t) \to \infty$ при $t \to (b)$. К третьему типу отнесем простые ограниченные пути $r : [a, b] \to X$.

Пусть γ – гладкая поверхность класса C^2 со следом M в конечномерном пространстве X. И пусть L – касательная плоскость к γ в точке $y_0 \in M$. Пусть для некоторого единичного вектора $\ell \nparallel L$ шар $B(y_0 + t\ell, t)$ $(t \geqslant 0)$ пространства X касается плоскости L. Величину $r \in \overline{\mathbb{R}}$, равную супремуму по всем числам $t \geqslant 0$, для которых точка y_0 является локальным минимумом функции-расстояния для точки $x_t = y_0 + t\ell$, назовем радиусом кривизны поверхности γ в точке y_0 по направлению вектора ℓ. При этом точку $x_r \in \mathbb{X}$ назовем центром кривизны (максимальной кривизны) поверхности γ в точке y_0 по направлению вектора ℓ. Нетрудно видеть, что в плоском случае это означает совпадение евклидовых кривизн γ и шара в точке y_0.

В геометрической оптике множество всех центров кривизны поверхности γ называют каустикой. В случае плоской кривой каустика – это эволюта.

В случае общих пространств под **расширенной каустикой** будем понимать замыкание объединения множества всех центров кривизны поверхности γ и множества всех неранжированных точек, для которых числовое множество значений локальных минимумов имеет предельную точку. Отметим, что в случае, когда поверхность γ гладкости C^2, а X – пространство с модулем выпуклости второго порядка, расширенная каустика является замыканием объединения множества всех центров кривизны поверхности γ (такое множество будем называть просто **каустикой**, и в случае евклидового пространства X совпадает с множеством всех центров кривизны γ.

На следующем ниже рисунке изображен график параболы $y = x^4$ и ее каустика.



Особую точку x множества M в двумерном пространстве X назовем вершиной, если существует ближайшая для x точка $y \in M$, для которой x является центром кривизны, т. е. $\varrho(x, M)$ – радиус кривизны в точке y. Узлом назовем особую точку x, не являющуюся вершиной и для которой количество ближайших больше двух. При этом число компонент связности множества ближайших элементов узла назовем его кратностью.

Следующие две теоремы приведем без доказательства.

Теорема 4. *Пусть X – двумерное пространство с модулем выпуклости второго порядка и со сферой гладкости H^α ($\alpha \in (1, 2]$). Рассмотрим C^2-многообразие на плоскости X с замкнутым следом M. Тогда особое множество E для множества M является замкнутым множеством, не пересекающимся с M. При этом*

1. *Множество неизолированных вершин E образует нигде не плотное в E подмножество, а изолированных вершин не более, чем счетно, и для каждой из них множество ее ближайших точек в M образует сферу.*

2. *Множество узлов – не более, чем счетное множество, нигде не плотное в E.*

3. *Дополнение множества всех вершин и узлов до E представляет собой не более, чем счетное множество следов простых H^α_0-путей за вычетом концов. При этом для ограниченных и полуограниченных путей их концы являются либо вершинами, либо узлами. Если конец является вершиной, то в этой точке путь гладкости C^1, если конец является узлом, то в нем гладкость H^α. В каждой точке $T = r(t)$ ($t \in I$) каждого пути $r(\cdot)$ промежутки $[Y_1, T)$ и $(T, Y_2]$ не пересекаются с особым множеством, где Y_1 и Y_2 – ближайшие к T для M.*

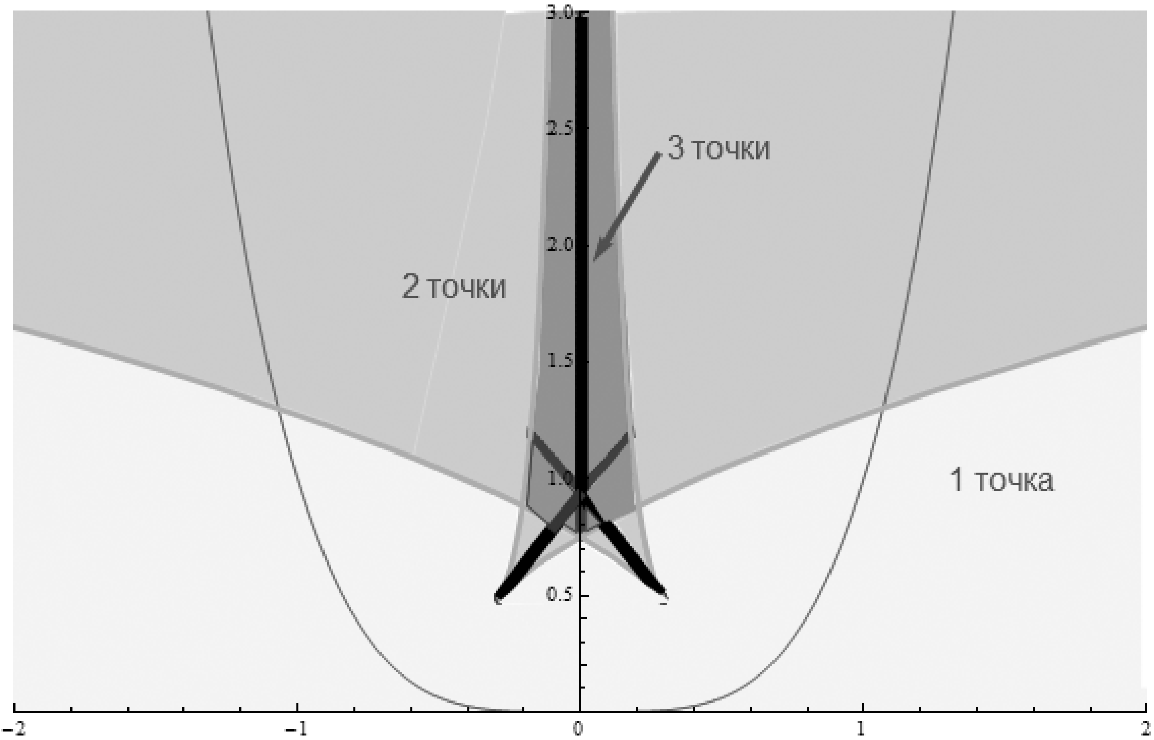
4. *Из каждого узла исходят гладкие пути (у которых узел является концом), число которых равно кратности узла.*

5. *Если число локальных максимумов кривизны многообразия конечно, то число вершин, узлов и соединяющих их кривых, составляющих особое множество, конечно.*

Определение 2. *Замыкание множества всех точек $x \in X$, для которых существует более одного локально минимума ранга n функции-расстояния до замкнутого множества $M \subset X$, называется особым множеством ранга n множества M.*

Теорема 5. *Пусть γ – поверхность класса C^1 с замкнутым следом M в конечномерном строго выпуклом пространстве X. Тогда в любой области Ω, состоящей из ранжированных точек и не содержащей точек каустики, число локальных минимумов для каждой точки $x \in \Omega$ одинаково. При этом множество всех точек пространства X, в которых число минимумов равно одному и тому же числу и все эти минимумы разных рангов, имеет границу, состоящую из точек части расширенной каустики и особых точек разных рангов. Множество всех точек пространства X, в которых число минимумов равно одному и тому же числу, имеет границу, состоящую только из точек части расширенной каустики.*

Следующий рисунок иллюстрирует предыдущую теорему для случая одномерной поверхности γ, задаваемую формулой $y = x^4$, в случае двумерного евклидова пространства X. На картинке изображена сама парабола, ее каустика и особое множество всех рангов. Видно, как каустика разделяет плоскость на куски постоянства числа минимумов функции-расстояния. На множестве, представляющем собой особое множество всех рангов, появляются локальные минимумы равных значений. На соответствующих кусках плоскости, выделенных разным тоном, указано количество точек-минимумов функции-расстояния (до параболы) для всех точек этих кусков.



Следующие далее теоремы имеют важное значение для полного описания класса всех C^1-решений уравнения эйконала на различных областях.

Теорема 6. *Пусть X – гладкое строго выпуклое конечномерное пространство, N – такая выпуклая оболочка замкнутого множества $M \subset X$, не совпадающая с X, что во внешности некоторой окрестности $O_r(N)$ все точки регулярны для M. Тогда $\partial N \subset M$.*

Доказательство. Предположим противное, что существует точка $x_0 \in \partial N \setminus M$. Построим гиперплоскость π, опорную к N в точке x_0. К этой гиперплоскости возьмем опорный к π в точке x_0 шар $B(y_0, R)$, лежащий с другой стороны гиперплоскости по сравнению с N, столь большого радиуса R, что $y_0 \in X \setminus O_r(N)$. Пусть z_0 – единственная ближайшая к y_0 в M точка, тогда из строгой выпуклости пространства следует неравенство $\|z_0 - y_0\| > \|x_0 - y_0\|$. Пусть ℓ – луч с началом в точке z_0, проходящий через точку y_0. Тогда часть луча ℓ после точки y_0 лежит в $X \setminus O_r(N)$, а, следовательно, состоит из регулярных точек. Поэтому для всех точек луча точка z_0 является ближайшей. Отсюда из гладкости пространства вытекает, что найдется открытое полупространство (объединение гомотетичных раздутий шара $B(y_0, \|y_0 - z_0\|)$ относительно точки z_0 с произвольным коэффициентом $k > 0$), содержащее точку x_0 и не пересекающееся с множеством M, чего не может быть. Теорема доказана.

Теорема 7. *Пусть X – гладкое конечномерное пространство. Тогда, если область $\Omega \subset X$ состоит из регулярных точек по отношению к ее границе, то $X \setminus \Omega$ выпукло.*

Доказательство. Для любой точки $x \in \Omega$ существует единственная ближайшая точка y из $\partial\Omega$. Пусть ℓ – открытый луч, с началом в точке y и проходящий через точку x. Тогда все точки $\Omega \bigcap \ell$ являются регулярными. Для каждой точки, принадлежащей той компоненте связности множества $\Omega \bigcap \ell$, для которой y является предельной, точка y остается ближайшей. Отсюда вытекает, что луч ℓ не пересекается с $\partial\Omega$, а, следовательно, полностью содержится в Ω. Из гладкости пространства X вытекает, что Ω содержит открытое полупространство, на границе которого находится точка y, а внутри – точка x. Из произвольности выбора точки x вытекает утверждение теоремы.

Следствие 2. *Пусть Ω – область в гладком конечномерном пространстве. Тогда условия $X \setminus \Omega$ невыпукло и множество всех особых точек E (по отношению к ее границе) в Ω непусто эквивалентны. При этом в строго выпуклом пространстве, если область Ω не ограничена, то бесконечность является предельной точкой E, и множество $E \bigcup \{\infty\}$ связно в $\mathbb{X}$, а, если область Ω ограничена, то множество E связно в X.*

Теорема 8. *Пусть X – конечномерное гладкое строго выпуклое пространство, A – объединение отрезков с концами во множестве E, представляющем собой множество всех особых точек множества M, равного замыканию следа локально простой гиперповерхности класса C^1 во всех точках $M \setminus E$. Тогда найдется выпуклое тело G, для которого $M \setminus \operatorname{int} A = \partial G \setminus \operatorname{int} A$. При этом в случае, когда $A \bigcap M$ нигде не плотно в M, найдется выпуклое тело G, которое содержит множество E и $M = \partial G$.*

Доказательство. Каждая точка x множества $M \setminus A$ является регулярной. Прямая, являющаяся нормалью к поверхности M, делится на два луча с началами в точке x. При этом один из них состоит из регулярных точек, а, следовательно, ближайшей для всех из них во множестве M является точка x. В силу гладкости пространства это означает, что в точке есть замкнутое опорное к M полупространство P_x в точке x, содержащее $M \setminus A$. Тогда искомое выпуклое тело G получается пересечением всех таких полупространств, т. е. $G = \bigcap\limits_{x \in M \setminus A} P_x$.

Пример. Требуется определить все C^1-гиперповерхности в $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$), для которых особое множество ее следа представляет собой окружность O радиуса R и прямую ℓ, перпендикулярную плоскости окружности и проходящей через ее центр. Применяя теоремы 8 и 3, можно показать, что след таких гиперповерхностей является границей тора, представляющего собой объединение шаров одного и того же радиуса $r < R$ с центрами из O.

Замечание 1. Для области $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus (O \cup \ell)$ опишем все допустимые значения решений уравнения эйконала $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ на $\partial\Omega$.

Рассмотрим сначала 1-й случай: когда часть особых точек (линий уровня функции u) лежит на ℓ. Любое такое решение $u(x)$ принимает постоянные значения на O, равные k. И на прямой ℓ имеет вид $\psi(x) = c \pm \varphi(x)$, где φ – некоторая выпуклая вверх неотрицательная функция на некотором (необязательно ограниченном) интервале $(a, b) \subset \ell$, равная нулю в конечных концах этого интервала и равная $-\varrho(x, (a, b))$ на $\ell \setminus (a, b)$. При этом $k = c \pm \inf\{\varphi(x) - \varrho(x, O) \mid x \in (a, b)\}$.

Рассмотрим 2-й случай: когда непустое особое множество содержится в окружности O. В этом случае особое множество представляет собой дугу γ окружности O, угловой меры $\leqslant \pi$. Пусть D – хорда этой дуги, P – ортопроектор дуги γ на D, а φ_0 – произвольная неотрицательная вогнутая функция на D. Определим функцию $\varphi_1(x) = \varphi_0(P^{-1}(x)) + |x - P(x)|$ $(x \in \gamma)$. Для всех точек $x \in \partial\Omega \setminus \gamma$ определим функцию $\varphi_2(x) = \inf\limits_{y\in\gamma}(\varphi_1(y) - |x - y|)$. Тогда искомая функция значений решения $u(x)$ на $\partial\Omega$ совпадает с функцией $c \pm \begin{cases} \varphi_1(x), x \in \gamma \\ \varphi_2(x), x \in O \setminus \gamma \end{cases}$.

Рассмотрим последний – 3-ий случай: когда особое множество пусто. Тогда решение на Ω имеет вид: $u(x) = c \pm (a, x)$, где $a \in \mathbb{R}^n : |a| = 1$. Отсюда легко определяются значения этой функции на $\partial\Omega$.

Отметим,что в последнем случае, если вектор a не лежит в пространстве, натянутом на $O \cup \ell$, то решение эйконала не определяется однозначно по своим значениям на $O \cup \ell$. В остальных же случаях решение определяется единственным образом по своим значениям на $O \cup \ell$.

Список литературы

1. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. Москва. Изд-во Наука. 1970.
2. *Брус Дж., Джиблин П.* Кривые и особенности. Геометрическое введение в теорию особенностей. Москва. Изд-во Мир. 1988.
3. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Том 3. Излучение, волны, кванты. Москва. Изд-во Мир. 1976.
4. *Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. Москва. Изд-во Наука. 1980.
5. *Арнольд В. И.* Особенности каустик и волновых фронтов. Москва. Изд-во Фазис. 1996.
6. *Кружков С. Н.* Обобщенные решения уравнений Гамильтона–Якоби типа эйконала. I. Постановка задач, теоремы существования, единственности и устойчивости, некоторые свойства решений // Математический сборник. 1975. Т. 98(140), № 3(11). С. 450-493.
7. *Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // Успехи математических наук. 2016. Т. 71, № 1(427). С. 3-84.
8. *Балаганский В. С., Власов Л. П.* Проблема выпуклости чебышевских множеств // Успехи математических наук. 1996. Т. 51, № 6(312). С. 125-188.
9. *Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и другие геометрические свойства солнц и чебышевских множеств // Фундаментальная и прикладная математика. 2014. Т. 63, № 4. С. 21-91.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 274–279

Наилучшие линейные методы приближения и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве Харди

М. Ш. Шабозов[1], Г. А. Юсупов[2] , Ф. Д. Давлатбеков[2]

[1] *Институт математики им А. Джураева АН РТ, Душанбе, Таджикистан*
[2] *Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан*

Аннотация. Построены наилучшие линейные методы приближения классов аналитических в единичном круге функций, усреднённые значения модулей непрерывности r-ых производных которых мажорируются заданной функцией. Полученные результаты обеспечивают возможность вычисления точных значений бернштейновских и колмогоровских n-поперечников на указанных классах функций. Для вычисления линейных и гельфандовских n-поперечников строятся наилучшие линейные методы приближения указанных классов функций.

1. Задача вычисления точных значений различных n-поперечников классов аналитических в круге функций и построения наилучших линейных методов приближения в пространствах Харди $H_q,\ q \geqslant 1$ рассматривалась во многих работах (см., например, [1–12] и приведённую там библиографию).

Целью настоящей работы является получение новых результатов, связанных с отысканием точных значений n-поперечников классов аналитических в круге функций, у которых усреднённые с весом модули гладкости граничных значений r-ых производных мажорируются заданной функцией Φ, удовлетворяющей на границе некоторым ограничениям. Указанные классы функций ранее изучались Н.Айнуллоевым [12] и являются в определённом смысле обобщением функциональных классов Л.В.Тайкова [6]. Здесь построен наилучший линейный метод приближения класса функций для вычисления гельфандовских и линейных n-поперечников в более общем пространстве Харди $H_{q,\rho}$ $(1 \leqslant q \leqslant \infty,$ $0 < \rho \leqslant 1,\ H_{q,1} \equiv H_q)$.

Приведём необходимые для дальнейшего определения и обозначения. Пусть X – банахово пространство, S – единичный шар в нём, $\mathfrak{M}$ – некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество в X, $L_n \subset X$ – n-мерное линейное подпространство, $L^n \subset X$ – подпространство коразмерности n, $\Lambda : X \to \Lambda_n$ – линейный непрерывный оператор, отображающий X в L_n.

Приближение фиксированного множества $\mathfrak{M} \subset X$ фиксированным подпространством L_n этого же пространства X определяется величиной

$$E(\mathfrak{M}, L_n)_X \stackrel{def}{=} \sup\Big\{\inf\Big\{\|f-\varphi\|_X :\ \varphi \in L_n\Big\} : f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Величина

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X \stackrel{def}{=} \inf\Big\{\sup\Big\{\ \|f-\Lambda(f)\|_X :\ f \in \mathfrak{M}\Big\} : \Lambda X \subset L_n\Big\} \tag{1}$$

характеризует наилучшее линейное приближение множества $\mathfrak{M}$ элементами подпространства $L_n \subset X$. Линейный оператор Λ^*, $\Lambda^* X \subset L_n$, если он существует, реализующий в (1)

© М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов , Ф. Д. Давлатбеков, 2016

точную нижнюю грань, т. е. такой, что

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X = \sup\Big\{ \|f - \Lambda^*(f)\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\},$$

является наилучшим для $\mathfrak{M}$ линейным методом приближения.

Величины

$$\begin{gathered} b_n(\mathfrak{M}; X) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : \ \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} : \ L_{n+1} \subset X\}, \\ d_n(\mathfrak{M}; X) = \inf\{\, E(\mathfrak{M}, L_n)_X : \ L_n \subset X\}, \\ d^n(\mathfrak{M}; X) = \inf\{\sup\{\|f\|_X : \ f \in \mathfrak{M} \cap L^n\} : \ L^n \subset X\}, \\ \delta_n(\mathfrak{M}; X) = \inf\{\mathscr{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X : \ L_n \subset X\} \end{gathered} \tag{2}$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, гельфандовским и линейным n-поперечниками.

2. Пусть $U_\rho := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < \rho\}$, где $0 < \rho \leqslant 1$, $U_1 = U$, $\mathcal{A}(U_\rho)$ – множество функций, аналитических в круге U_ρ. Для произвольных функции $f \in \mathcal{A}(U_\rho)$ при $0 < \rho \leqslant 1$ положим

$$M_q(f, \rho) = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right)^{1/q} < \infty, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. При $q = \infty$ дополнительно будем предполагать функцию $f \in \mathcal{A}(U)$ непрерывной в замкнутом круге $\overline{U} := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leqslant 1\}$.

Через H_q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ обозначим банахово пространство Харди, состоящее из функций $f \in \mathcal{A}(U)$, для которых

$$\|f\|_{H_q} = \lim_{\rho \to 1-0} M_q(f, \rho) < \infty, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty.$$

Известно, что норма функций $f \in H_q$ реализуется на её угловых граничных значениях, которые далее обозначим $F(t) := f(e^{it})$. При этом

$$\|f\|_{H_q} = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(e^{it})|^q dt \right)^{1/q} := \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |F(t)|^q dt \right)^{1/q} < \infty, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty.$$

Через $H_{q,\rho}$ ($1 \leqslant q \leqslant \infty$, $0 < \rho \leqslant 1$) будем обозначать пространство Харди аналитических в круге $|z| < \rho$ функций f, для которых $\|f(z)\|_{H_{q,\rho}} = \|f(\rho z)\|_{H_q} < \infty$.

Пусть $\mathscr{P}_n$ – множество алгебраических комплексных полиномов степени не выше n. Символом

$$E_{n-1}(f)_{H_q} = \inf\Big\{ \|f - p_{n-1}\|_{H_q} : \ p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1} \Big\}$$

обозначим наилучшее приближение функции $f \in H_q$. Производную r-го порядка функции f по переменному z обозначим $f^{(r)}(z) := d^r f(z)/dz^r$ ($r \in \mathbb{N}$, $f^{(0)} \equiv f$), а её граничные значения через $F^{(r)}(t)$. Далее, обозначим

$$\alpha_{k,r} = k(k-1) \ldots (k-r+1) = k!/(k-r)!, \quad k \geqslant r, \ k, r \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, в принятых обозначениях, если

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k$$

— разложение в степенной ряд функции f, то полагаем

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r}, \quad F^{(r)}(t) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) e^{i(k-r)t}.$$

Структурные свойства функции $f^{(r)} \in H_q$ охарактеризуем скоростью стремления к нулю модуля гладкости её граничных значений производной

$$\omega_2(F^{(r)}; 2t)_{H_q} := \sup\Big\{\|F^{(r)}(\cdot+\tau) - 2F^{(r)}(\cdot) + F^{(r)}(\cdot-\tau)\|_{H_q} :\ |\tau| \leqslant t\Big\}$$

при $t \to 0$, задавая эту скорость убывания к нулю через мажоранты некоторой усреднённой величины, содержащей $\omega_2(F^{(r)}; 2t)_{H_q}$.

Пусть $\Phi(x)\,(x \geqslant 0)$ – произвольная положительная неубывающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Для любого заданного значения параметра $\mu \geqslant 1/2$, через $W_q^{(r)}(\Phi, \mu)$ $(r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty)$ обозначим класс функций $f \in H_q$, для которых производная $f^{(r)} \in H_q$ её граничные значения $F^{(r)}$ удовлетворяют условию (см., [12, с.95])

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_2(F^{(r)}; 2t)_{H_q}\left(1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right)dt \leqslant \Phi(h), \quad h \in (0, \pi/2].$$

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$, $\mu \geqslant 1/2$ *и мажоранта* Φ *при любых* $h \in (0, \pi/2]$ *удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi\left(\pi/(2\mu(n-r))\right)} \geqslant \frac{\pi}{\pi - 2}\cdot\frac{1}{h}\int\limits_0^h (1 - \cos(n-r)t)_*\left(1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right)dt, \tag{3}$$

где

$$(1 - \cos t)_* := \Big\{1 - \cos t,\ \textit{если}\ \ 0 < t \leqslant \pi;\quad 2,\ \textit{если}\ \ t \geqslant \pi\Big\}.$$

Тогда при всех $1 \leqslant q \leqslant \infty$ *и* $0 < \rho \leqslant 1$ *имеют место равенства*

$$b_n\left(W_q^{(r)}(\Phi, \mu); H_{q,\rho}\right) = d_n\left(W_q^{(r)}(\Phi, \mu); H_{q,\rho}\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W_q^{(r)}(\Phi, \mu)\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi}{2(\pi - 2)}\cdot\frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \tag{4}$$

Для нахождения точных значений гельфандовского и линейного n-поперечников нам потребуется построение наилучшего линейного метода приближения функций класса $W_q^{(r)}(\Phi, \mu)$ в пространстве $H_{q,\rho}$. С этой целью для произвольной $f \in \mathcal{A}(U)$ запишем следующий линейный полиномиальный оператор

$$\Lambda_{n-1,r,\rho}(f; z) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f) z^k +$$

$$+ \sum_{k=r}^{n-1}\left\{1 + \frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\rho^{2(n-k)}\left[\gamma_{k,r}\left(1 - \left(\frac{k-r}{2n-k-r}\right)^2\right) - 1\right]\right\} c_k(f) z^k \tag{5}$$

степени $n - 1$, где

$$\gamma_{k,r} \overset{def}{=} \frac{2\mu(n-r)}{\pi - 2}\int\limits_0^{\pi/2\mu(n-r)}\Big(1 - \sin\mu(n-r)x\Big)\cos(k-r)x\,dx,\ \ k \geqslant r > 1,\ k, r \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2. *Пусть* f *– произвольная функция из класса* $W_q^{(r)}(\Phi, \mu)$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $\mu \geqslant 1/2$, $0 < \rho \leqslant 1$, n *– любое натуральное число большее* r. *Тогда справедливо неравенство*

$$\|f - \Lambda_{n-1,r,\rho}(f)\|_{H_{q,\rho}} \leqslant \frac{\pi}{2(\pi - 2)}\cdot\frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right). \tag{6}$$

Если мажорирующая функция Φ *при любом* $h \in (0, \pi/2]$ *удовлетворяет ограничению* (3), *то неравенство* (6) *неулучшаемо в том смысле, что существует функция* $f_0 \in W_q^{(r)}(\Phi, \mu)$, *обращающая его в равенство.*

Теорема 2 позволяет сформулировать следующее утверждение.

Теорема 3. *Если мажоранта* Φ *удовлетворяет ограничению* (3), *то при любых* $n, r \in \in \mathbb{N}$, $n > r$, $\mu \geqslant 1/2$, $0 < \rho \leqslant 1$ *и* $1 \leqslant q \leqslant \infty$ *справедливы равенства*

$$\beta_n \left(W_q^{(r)}(\Phi, \mu); H_{q,\rho}\right) = \mathscr{E}\left(W_q^{(r)}(\Phi, \mu); \Lambda_{n-1,r,\rho}\right)_{H_{q,\rho}} =$$

$$= \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \, \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right), \tag{7}$$

где $\beta_n(\cdot)$ – *любой из* n*-поперечников: Гельфанда* $d^n(\cdot)$, *линейный* $\delta_n(\cdot)$. *Полиномиальный оператор* $\Lambda_{n-1,r,\rho}(\cdot)$, *определённый равенством* (5), *является наилучшим линейным методом приближения класса* $W_q^{(r)}(\Phi, \mu)$ *в пространстве* $H_{q,\rho}$.

Экстремальная задача отыскания точных значений n-поперечников компактных множеств функций тесно связан с задачами оптимизационного содержания, таких как оптимальное восстановление и кодирование линейных функционалов по дискретной информации задаваемой, например, значениями функций и её производных в фиксированных точках, коэффициентами Фурье, коэффициентами Тейлора и т.п. В этом пункте мы рассмотрим задачи оптимального восстановления и кодирования в интерпретации Н.П.Корнейчука [14, с.375-384].

Пусть в нормированном функциональном пространстве X задан набор $\mathcal{M}_n \overset{def}{=} \{\mu_1, \mu_2, \ldots \ldots, \mu_n\}$ функционалов $\mu_j \in X^*$, $j = \overline{1, n}$, где X^* – пространство сопряжённое с X. Множество $\mathcal{M}_n$ можно рассматривать как метод кодирования, сопоставляющий элементу $f \in X$ числовой вектор

$$\mathcal{J}(f, \mathcal{M}_n) \overset{def}{=} \Big\{\mu_1(f), \mu_2(f), \ldots, \mu_n(f)\Big\}.$$

Пусть $\mathcal{P}_n \overset{def}{=} \Big\{p_k(z)\Big\}_{k=1}^n$ и $\Gamma_n \overset{def}{=} \Big\{\gamma_k\Big\}_{k=1}^n$ – соответственно, произвольные система линейно независимых функций из X и набор числовых коэффициентов. Задачу восстановления f по информации $\mathcal{J}$ решают, сопоставляя вектору $\mathcal{J}(f, \mathcal{M}_n)$ функцию

$$U\big(f; \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n, \Gamma_n, z\big) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \, \mu_k(f) \, p_k(z),$$

позволяющую наилучшим образом приспособиться к рассматриваемому классу $\mathfrak{M}$.

Величину

$$\mathcal{K}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n)_X = \inf\Big\{\sup\Big\{\|f - U\big(f; \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n, \Gamma_n\big)\| : \ f \in \mathfrak{M}\Big\} : \ \Gamma_n \in \mathbb{C}^n\Big\}$$

называют погрешностью восстановления на классе $\mathfrak{M}$ и полагают

$$\mathcal{K}_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\mathcal{K}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n)_X : \ \mathcal{M}_n, \mathcal{P}_n\Big\}$$

$$\Big(\text{или } \ \mathcal{K}'_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\mathcal{K}(\mathfrak{M}, \mathcal{M}'_n, \mathcal{P}_n)_X : \ \mathcal{M}'_n, \mathcal{P}_n\Big\}\Big)$$

где $\mathcal{M}'_n$ – набор заданных на X линейных ограниченных функционалов.

Метод восстановления $(\mathcal{M}_n^*, \mathcal{P}_n^*, \Gamma_n^*)$ $\big($или $\mathcal{M}_n^{*'}, \mathcal{P}_n^*, \Gamma_n^*\big)$, для которого

$$\mathcal{K}_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\Big\{\|f - U\big(f; \mathcal{M}_n^*, \mathcal{P}_n^*, \Gamma_n^*\big)\| : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}$$

$$\Big(\text{или } \ \mathcal{K}'_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\Big\{\|f - U\big(f; \mathcal{M}_n^{*'}, \mathcal{P}_n^*, \Gamma_n^*\big)\| : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}\Big),$$

называют оптимальным (или оптимальным линейным) методом восстановления функций из класса $\mathfrak{M}$. При этом справедливы соотношения [13]

$$\begin{aligned}\mathcal{K}'_n(\mathfrak{M},X)&=\delta_n(\mathfrak{M},X),\\ \mathcal{K}_n(\mathfrak{M},X)&\geqslant d_n(\mathfrak{M},X).\end{aligned}\tag{8}$$

Если $\mathfrak{M}=\widetilde{\mathfrak{M}}+L$, где $\widetilde{\mathfrak{M}}$ – компакт, L – конечномерное подпространство, то в (8) имеет место знак равенство.

Параллельно с $\mathcal{K}(\mathfrak{M},\mathcal{M}_n,\mathcal{P}_n)_X$ рассматривают также величину

$$\gamma(\mathfrak{M},\mathcal{M}_n)_X\overset{def}{=}\sup\Big\{\|f_1-f_2\|:\ f_1,f_2\in\mathfrak{M},\ \mathcal{J}(f_1,\mathcal{M}_n)=\mathcal{J}(f_2,\mathcal{M}_n)\Big\},$$

которую интерпретируют как погрешность метода кодирования на классе $\mathfrak{M}$ с помощью фиксированного набора функционалов $\mathcal{M}_n$ [13]. Полагая при этом

$$\gamma^n(\mathfrak{M},X)=\inf\Big\{\gamma(\mathfrak{M},\mathcal{M}_n)_X:\ \mathcal{M}_n\Big\},$$

получают

$$\gamma^n(\mathfrak{M},X)\leqslant 2\mathcal{K}'_n(\mathfrak{M},X).$$

Если множество $\mathfrak{M}$ центрально-симметрично и выпукло, то

$$\gamma^n(\mathfrak{M},X)=2\mathcal{K}'_n(\mathfrak{M},X).$$

Результат, полученный в теореме 3, обеспечивает возможность сформулировать следующее утверждение в приведённых выше обозначениях.

Теорема 4. *Пусть $n,r\in\mathbb{N}$, $n>r$; $\mu\geqslant 1/2$, $0<\rho\leqslant 1$ и $1\leqslant q\leqslant\infty$ и мажоранта Φ удовлетворяет ограничению* (3). *Тогда оптимальным линейным методом восстановления $\left(\mathcal{M}_n^{*'},\mathcal{P}_n^*,\Gamma_n^*\right)$ функций f из класса $W_q^{(r)}(\Phi,\mu)$ в пространстве $H_{q,\rho}$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, $0<\rho\leqslant 1$ является линейный метод $\Lambda_{n-1,r,\rho}(f,z)$, определённый равенством* (5), *а наилучший метод кодирования определяется набором функционалов*

$$\mu_k(f)=c_k(f)=\frac{f^{(k)}(0)}{k!},\quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

При этом

$$\gamma^n\left(W_q^{(r)}(\Phi,\mu);H_{q,\rho}\right)=2\mathcal{K}_n\left(W_q^{(r)}(\Phi,\mu),H_{q,\rho}\right)=$$

$$=2\mathcal{K}'_n\left(W_q^{(r)}(\Phi,\mu),H_{q,\rho}\right)=\frac{\pi\rho^n}{(\pi-2)\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right).$$

Список литературы

1. *Бабенко К.И.* О наилучших приближениях одного класса аналитических функций. Известия АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22. С. 631-640.
2. *Двейрин М.З.*, *Чебаненко И.В.* О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций // В кн.: Теория отображений и приближение функций. – Киев: Наукова думка. 1983. С. 62-73.
3. *Pinkus A.* n-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag, 1985. 252 p.
4. *Шабозов М.Ш.*, *Лангаршоев М.Р.* О наилучших линейных методах и значениях поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // ДАН России. 2013. Т. 450, № 5. С. 518-521.
5. *Тайков Л.В.* О наилучших линейных методах приближения функций классов B^r и H^r // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, № 4(112). С. 183-189.
6. *Тайков. Л.В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1977. Т. 2. С. 285-294.
7. *Фарков Ю.А.* О наилучшем линейном приближении голоморфных функций // Фундамент. и прикл. матем. 2014. Т. 19, № 5. С. 185-212.

8. *Вакарчук С.Б.* Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки. 1995. Т. 57, № 1. С. 30-39.
9. *Вакарчук С.Б.* О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1999. Т. 65, № 2. С. 186-193.
10. *Вакарчук С.Б.*, *Забутная В.И.* О наилучших линейных методах приближения функций классов Л.В.Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q \geqslant 1$, $0 < \rho \leqslant 1$ // Матем. заметки. 2009. Т. 85, № 3. С. 323-329.
11. *Вакарчук С.Б.*, *Шабозов М.Ш.* О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Матем. сборник. 2010. Т. 201, № 8. С. 3-22.
12. *Айнуллоев Н.* Поперечники классов аналитических функций в единичном круге // В кн.: Геометрические вопросы теории функций и множеств. Калинин. 1986. С. 91-101.
13. *Корнейчук Н.П.* Поперечники в L_p классов непрерывных и дифференцируемых функций и оптимальные методы кодирования и восстановлений функций и их производных // Известия АН СССР. Серия матем. 1981. Т. 45, № 2. С. 266-290.
14. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука. 1987. 424 с.

Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 280–282

Оптимальная кубатурная формула Маркова для классов функций, задаваемых модулями непрерывности

А. А. Шабозова

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан

Аннотация. В работе рассматривается задача минимизации погрешности кубатурных формул на некоторых классах функций двух переменных, задаваемых модулями непрерывности. Для кубатурных формул типа Маркова с фиксированными узлами на границе прямоугольной области и решётчатым расположением узлов даётся решение экстремальной задачи отыскании наилучших кубатурных формул типа Маркова на указанных классах функций.

Напомним постановку общей экстремальной задачи для функций двух переменных. Рассмотрим для функций $f(x,y)$, заданных и интегрируемых в смысле Римана на прямоугольнике $Q=\{a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$ кубатурную формулу

$$\iint\limits_{(Q)} f(x,y)dxdy=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}p_{ki}f(x_k,y_i)+R_{mn}(f), \tag{1}$$

определяемую вектором $(X,Y;P)$ узлов

$$X=\{x_k:\ a\leqslant x_1<\ldots<x_{m-1}<x_m\leqslant b\},$$
$$Y=\{y_i:\ c\leqslant y_1<\ldots<y_{n-1}<y_n\leqslant d\}$$

и коэффициентов $P=\{p_{k,i}\}_{k,i=1}^{m,n}$, $R_{mn}(f):=R_{mn}(f;X,Y;P)$ – погрешность формулы на функции $f(x,y)$. Для краткости иногда точки прямоугольника Q будем обозначить через $M:=M(x,y)$, а узлы $M_{ki}=M(x_k,y_i)$. Множество всех векторов узлов и коэффициентов, для которых формула (1) имеет смысл, обозначим через $\mathcal{A}$. Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций $\{f(x,y)\}$, заданных и определённых в прямоугольнике Q, то положим

$$R_{mn}=(\mathfrak{M};X,Y;P)=\sup\Big\{|R_{mn}(f;X,Y;P)|:\ f\in\mathfrak{M}\Big\}.$$

Требуется найти величину [1]

$$\mathcal{E}_{mn}(\mathfrak{M})=\inf\Big\{R_{mn}(\mathfrak{M};X,Y;P):\ (X,Y;P)\in\mathcal{A}\Big\} \tag{2}$$

и указать вектор $(X^*,Y^*;P^*)$ $(X^*=\{x_k^*\},Y^*=\{y_i^*\};P^*=\{p_{ki}^*\})$ из множества $\mathcal{A}$, на котором достигается точная нижняя грань, то есть выполняется равенство

$$\mathcal{E}_{mn}(\mathfrak{M})=R_{mn}(\mathfrak{M};X^*,Y^*;P^*).$$

Кубатурная формула (1) с узлами (x_k^*,y_i^*) и коэффициентами p_{ki}^* даёт наименьшую на всём классе $\mathfrak{M}$ погрешность среди формул, задаваемых множеством $\mathcal{A}$ векторов $(X,Y;P)$, и в этом смысле является *наилучшей или* оптимальной для класса $\mathfrak{M}$.

Введём в рассмотрение следующие классы функций:

© А. А. Шабозова, 2016

$H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ – класс определённых на Q функций $f(x,y)$, которые для любых двух точек $(x',y'),(x'',y'')\in Q$ удовлетворяют условию

$$|f(x',y')-f(x'',y'')|\leqslant\omega_1(|x'-x''|)+\omega_2(|y'-y''|),$$

где $\omega_1(t),\omega_2(\tau)$ – заданные модули непрерывности, то есть неубывающие полуаддитивные на отрезках $0\leqslant t\leqslant b-a$ и $0\leqslant\tau\leqslant d-c$ функции, в нуле равные нулю;

$H^{\omega}_{\rho_p}(Q)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ – класс функций $f(x,y)$, определённых на Q, и таких, которые для любых точек $M'(x',y'),M''(x'',y'')$ из Q удовлетворяют условию

$$|f(M')-f(M'')|\leqslant\omega(\rho_p(M',M'')),$$

где $\omega(\delta)$ – заданный на отрезке $0\leqslant\delta\leqslant\rho_p(M'(a,c),M''(b,d))$ модуль непрерывности, а под $\rho_p(M',M'')$ будем понимать l_p-расстояние между точками $M'(x',y')$ и $M''(x'',y'')$ из Q:

$\rho_p(M',M'')=\sqrt{(x'-x'')^p+(y'-y'')^p}$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$.

Из результата Н.П.Корнейчука [2], доказанного для функций многих переменных, в частности, для функций двух переменных вытекает следующая

Теорема K [1]. *Среди кубатурных формул вида* (1) *наилучшей для классов функций* $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ *и* $H^{\omega}_{\rho_2}(Q)$ *является формула средних прямоугольников*

$$\iint\limits_{(Q)}f(x,y)dxdy=4h_1q_1\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}f(a+(2k-1)h_1;c+(2i-1)q_1)+R_{mn}(f),$$

где $h_1=(b-a)/(2m)$, $q_1=(d-c)/(2n)$. *При этом*

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega_1,\omega_2}(Q))=4mn\left(q_1\int\limits_0^{h_1}\omega_1(t)dt+h_1\int\limits_0^{q_1}\omega_2(\tau)d\tau\right),$$

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega}_{\rho_2}(Q))=4mn\int\limits_0^{q_1}\int\limits_0^{h_1}\omega(\sqrt{t^2+\tau^2}\,)dtd\tau.$$

В настоящей работе дано точное решение сформулированной выше задачи (2) для кубатурной формулы типа Маркова следующего вида:

$$\iint\limits_{(Q)}f(x,y)dxdy=\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}p_{ki}f(x_k,y_i)+R_{mn}(f),\tag{3}$$

определяемой вектором $(X,Y;P)$ узлов

$$X=\{x_k:\ a=x_0<x_1<\ldots<x_{m-1}<x_m=b\},$$

$$Y=\{y_i:\ c=y_0<y_1<\ldots<y_{n-1}<y_n=d\}$$

и коэффициентов $P=\{p_{k,i}\}_{k,i=0}^{m,n}$ на классе функций $H^{\omega}_{\rho_p}(Q)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$. Заметим, что кубатурная формула (3), в отличие от формулы (1), в качестве узлов, помимо внутренних точек решётки $M_{k,i}:=M(x_k,y_i)$, $k=\overline{1,m-1}$; $i=\overline{1,n-1}$, содержит как угловые точки $M_{0,0}=M(a,c)$, $M_{0,n}=M(a,d)$, $M_{m,0}=M(b,c)$, $M_{m,n}=M(b,d)$, так и все граничные точки

$$\begin{aligned}&M_{k,0}:=M(x_k,c),\ M_{k,n}:=M(x_k,d),\quad k=\overline{1,m-1},\\&M_{0,i}:=M(a,y_i),\ M_{m,i}:=M(b,y_i),\quad i=\overline{1,n-1}.\end{aligned}\tag{4}$$

Таким образом, мы изучаем задачу отыскания наилучшей кубатурной формулы вида (3), когда заранее зафиксированы в качестве узлов координаты углов прямоугольника Q, а граничные узлы (4), внутренние узлы решётки и коэффициенты p_{ki} $(k=\overline{0,m},\ i=\overline{0,n})$ следует выбрать оптимальным образом.

Основной результат работы содержится в следующем утверждении.

Теорема. *Среди всех кубатурных формул вида* (1) *наилучшей для классов* $H^{\omega}_{\rho_p}(Q)$ *является формула трапеций*

$$\iint\limits_{(Q)} f(x,y)dxdy = \sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} p^{*}_{ki} f(a+kh, c+iq) + R_{mn}(f), \tag{5}$$

где $h=(b-a)/m$, $q=(d-c)/n$ *и наилучшие коэффициенты* p^{*}_{ki} *имеют вид*:

$$\begin{cases} p^{*}_{oo}=p^{*}_{mo}=p^{*}_{on}=p^{*}_{mn}=hq/4; \\ p^{*}_{oi}=p^{*}_{mi}=hq/2 \quad i=1,2,\dots,n-1; \\ p^{*}_{ko}=p^{*}_{kn}=hq/2 \quad k=1,2,\dots,m-1; \\ p^{*}_{ki}=hq, \quad k=1,2,\dots,m-1,\ i=1,2,\dots,n-1. \end{cases}$$

При этом точная оценка погрешности (2) *наилучшей формулы* (5) *на классе функций* $H^{\omega}_{\rho_p}(Q)$ *равна*

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{\omega}_{\rho_p}(Q)) = 4mn\int\limits_{0}^{h/2}\int\limits_{0}^{q/2}\omega(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\,)dtd\tau,\ 1\leqslant p\leqslant\infty.$$

В частности, при $p=1$ *имеем*:

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{\omega}_{\rho_p}(Q)) = 4mn\int\limits_{0}^{h/2}\int\limits_{0}^{q/2}\omega(t+\tau)dtd\tau :=$$

$$= \begin{cases} \int\limits_{0}^{q/2} t\omega(t)dt + \dfrac{q}{2}\int\limits_{q/2}^{h/2}\omega(t)dt + \int\limits_{h/2}^{q/2+h/2}\left(\dfrac{q}{2}+\dfrac{h}{2}-t\right)\omega(t)dt, & h>q; \\ \int\limits_{0}^{q/2} t\omega(t)dt + \dfrac{h}{2}\int\limits_{h/2}^{q/2}\omega(t)dt + \int\limits_{q/2}^{q/2+h/2}\left(\dfrac{q}{2}+\dfrac{h}{2}-t\right)\omega(t)dt, & h<q; \\ \int\limits_{0}^{h/2} t\omega(t)dt + \int\limits_{h/2}^{h}(h-t)\omega(t)dt, & h=q, \end{cases}$$

а при $p=\infty$:

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{\omega}_{\rho,\infty}(Q)) = 4mn\int\limits_{0}^{h/2}\int\limits_{0}^{q/2}\max\{\omega(t),\omega(\tau)\}dtd\tau.$$

Отметим, что вышеприведённая теорема является распространением результата теоремы 1 работы [3], полученного для квадратурной формулы типа Маркова на случай кубатурной формулы указанного типа. В случае $p=2$ теорема ранее доказана в работе [4].

Список литературы

1. *Никольский С.М.* Квадратурные формулы. – М.: Наука. 1988. 256 с.
2. *Корнейчук Н.П.* Наилучшие кубатурные формулы для классов функций многих переменных // Матем. заметки. 1968. Т. 3, № 5. С. 565–576.
3. *Шабозов М.Ш.*, *Шабозов А.А.* Наилучшая квадратурная формула типа Маркова для классов функций, задаваемых модулями непрерывности // Вестник СПбГУ. 2014. Сер. 1. Вып. 1. С. 81-89.
4. *Шабозов М.Ш.* Об одной оптимальной кубатурной формуле для классов функций, задаваемых модулями непрерывности // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21, № 3. С. 91–105.

ТРУДЫ

МЕЖДУНАРОДНОЙ ЛЕТНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ШКОЛЫ-КОНФЕРЕНЦИИ С. Б. СТЕЧКИНА
ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

(Таджикистан, Душанбе, 15 – 25 августа 2016 года)

Редакторы: *М. Ш. Шабозов, А. Г. Бабенко, М. В. Дейкалова*
Оригинал-макет подготовлен *Г. А. Юсуповым*

ISBN 978-99975-917-5-3

Сдано в печать 20.07.2016.
Подписано в печать 21.07.2016.
Формат 70×108/8. Бумага офсетная.
Тираж 800 экз. Заказ № 57.

Полиграфия ООО «Офсет»
734025, ул. А.Дониш, 32.