ВАЗОРАТИ МАОРИФ ВА ИЛМИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН

ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ ХУҶАНД БА НОМИ АКАДЕМИК БОБОҶОН ҒАФУРОВ
ХУДЖАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА БАБАДЖАНА ГАФУРОВА

---

# НОМАИ ДОНИШГОҲ

## МУАММОҲОИ МУОСИРИ МАТЕМАТИКА ВА ТАЪЛИМИ ОН

**Маводҳои конференсияи байналхалқӣ,
бахшида ба 20-солагии Конститутсияи Ҷумҳурии Тоҷикистон
ва 60-солагии олимони математика
А. Мӯҳсинов, А.Б. Нозимов, С. Байзаев,
Д.М. Осимова, Қ. Тухлиев**

# УЧЁНЫЕ ЗАПИСКИ

## СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ЕЁ ПРЕПОДАВАНИЯ

**Материалы международной научной конференции,
посвященной 20-летию Конституции Республики Таджикистан
и 60-летию ученых математиков
А. Мухсинова, А.Б. Назимова, С. Байзаева,
Д. Осимовой, К. Тухлиева**

# № 2 (29) ч.1

**ХУҶАНД – 2014**

ББК 86.39
Н 34
УДК 511+512+519.4, 517.956, 517.927, 004

Маҷалла аз соли 1948 чоп мешавад.
Журнал издаётся с 1948 года.

Материалы международной научной конференции «*Современные проблемы математики и её преподавания*» посвященной 20-летию Конституции Республики Таджикистан и 60-летию ученых математиков А. Мухсинова, А.Б. Назимова, С. Байзаева, Д. Осимовой, К. Тухлиева (Худжанд, 28- 29 июня 2014 г.)

В спецвыпуске включены материалы, принятие оргкомитетом для участия в международной научной конференции «Современные проблемы математики и её преподавания» посвященной 20-летию конституции Республики Таджикистан и 60-летию ученых математиков А. Мухсинова, А.Б. Назимова, С. Байзаева, Д. Осимовой, К. Тухлиева (Худжанд, 28 – 29 июня 2014г.). Тематика докладов охватывает широкий спектр проблем качественного исследования математического анализа, дифференциальных уравнений, алгебры, теории чисел и методики преподавания математики и информатики.

Ба истиқболи 20-солагии қабули
Сарқонуни (Конститутсияи)
Ҷумҳурии Тоҷикистон

## Сарқонун – кафили демократия, ҳуқуқ ва озодиҳои инсон ва шаҳрванд

Конститутсия ҳамчун Қонуни асосии давлат асосҳои сиёсӣ, иҷтимоӣ, иқтисодии давлат, сохтори давлат ва системаи мақомоти ҳокимияти давлатӣ, шохаҳои ҳокимияти сиёсӣ-қонунбарор, иҷроия ва судӣ, тарзу услуби ташкил ва фаъолияти онҳо, ҳуқуқ, озодӣ ва ӯҳдадориҳои шарҳвандонро муайян менамояд.

Барои қабули Сарқонун (Конситутсия) қоида ва тартиботи махсус мавҷуд аст. Сарқонунро асосан мақомоти олии давлатӣ ва қонунгузор (Маҷлиси Олӣ, Шӯрои Олӣ, Парламент, Думаи давлатӣ) ё мақомоти махсуси қонунбарор, ки барои чунин мақсад таъсис дода мешавад (Маҷлиси муассисони Маҷлиси Миллӣ, Конвент ва ғайра) қабул мекунад.

Сарқонун ҳамчунин ба тариқи раъйпурсии умумихалқӣ низ қабул карда мешавад.

Барои қабули Сарқонун ва ё даровардани тағйироту иловаҳо ба он зарур аст, ки ба тарафдории он аксарияти вакилон (аз се ду ҳиссаи онҳо) ё аксарияти аҳолии дар раъйпурсӣ иштирок намуда, овоз диҳад.

Сарқонун ҳамчун Қонуни асосии давлат маҳсули ҷомеаи сармоядорӣ (капитализм) ва давлати бурҷуазӣ мебошад. Бо вуҷуди он, ки дар давлатҳои ғуломдорӣ ва феодалӣ низ қонунҳо ва меъёрҳои ҳуқуқӣ мавҷуд буданд – масалан қонуни шоҳи Бобулистон Хаммурапӣ (1792-1750 пеш аз мелод, ки аз 282 модда иборат буд, Эломияи Куруши Кабир оид ба озодии виҷдон, соли 539 пеш аз милод, Хартияи бузурги озодиҳои шоҳи Англия Ионни Безамин, соли 1215, иборат аз 63 модда, Ёсои Бузурги Чингизхон, маҷмӯи Қонунҳои Темур ва ғайра, аммо Конститутсия ҳамчун Қонуни асосии давлат вуҷуд надошт.

Пайдоиши Конститутсия ҳамчун қонуни асосии давлат ба давраи ба сари қудрат омадани синфи бурҷуазия, саҳеҳтараш даврони инқилобҳои бурҷуазӣ дар Аврупои Ғарбӣ мансуб аст. Аввалин Конститутсияҳо соли 1787 дар ИМА ва соли 1791 дар Фаронса қабул шуда буданд.

Дар Ҷумҳурии Тоҷикистон аз замони ташкилёбии он ҳамчун Ҷумҳурии Худмухтори (Автономии) Шӯравии Сотсиалистӣ то Эъломияи соҳибистиқлолии он панҷ маротиба Конститутсия қабул карда шудааст, ки онҳо ба солҳои 1929,1931,1937,1978,1994 рост меоянд.

Пас аз соҳибистиқлол шудани Ҷумҳурии Тоҷикистон зарурияти қабули Конститутсияи нав ба миён омад. Зеро баъди барҳам хӯрдани ИҶШС ба ҷои собиқ ҷумҳуриҳои иттифоқӣ давлатҳои нави соҳибистиқлол пайдо шуда, як фазои нави сиёсию иҷтимоӣ-иқтисодӣ ба миён омад. Акнун ҳар як миллат соҳиби истиқлолияти миллӣ, соҳиби сарнавишти худ гардид. Истиқлолияти давлатиро бояд пеш аз ҳама дар қонуни асосии кишвар инъикос намуда, онро ба ҷаҳониён эълон намудан зарур буд.

Мусаллам аст, ки эҷод ва таҳияву қабули конститутсия барои ҳар як миллату давлати соҳибистиқлол муҳимтарин падида ва дастоварди бузург ба ҳисоб меравад. Зеро хираду заковат, анъанаву истеъдоди давлатдорӣ, ҳисси худогоҳиву худшиносии ҳар як миллат маҳз дар Қонуни асосии давлати ӯ инъикос меёбад. Дар Сарқонуни имрӯз амалкунандаи Тоҷикистон ақлу заковат, хираду дониши ҳазорсолаи ниёгони пуршарафи мо, таҷриба, суннатҳои давлатдорӣ, ғояҳои олии башардӯстӣ, ватанпарастии халқи тоҷик, орзуву омоли созандаву бунёдкоронаи он таҷассум ёфтааст.

**Конститутсия** — шиносномаи Ҷумҳурии соҳибистиқлоли Тоҷикистон моро ҳамчун давлати соҳибихтиёр, демократӣ, ҳуқуқбунёд, дунявӣ, ягона ва иҷтимоӣ эълом доштааст.

Моддаи 1-ӯми Сарқонун, ки моддаи асосӣ ба ҳисоб меравад, шакли давлатдорӣ, моҳият ва мазмуни сохти давлатдории Тоҷикистонро инъикос намудааст.

**Соҳибихтиёрӣ** — ин соҳиб будан ба сарнавишти худ ва вобаста набудан аз давлатҳои дигар, соҳиб будан ба марзу буми (ҳудуди) ягонаи дахлнопазир ва ҳифзшаванда ва ба аҳолие, ки ҳамчун миллат шинохта ва эътироф гардидааст, соҳиб будан ба сиёсати мустақили дохилӣ ва хориҷӣ аст. Омили дигари соҳибихтиёрӣ ин мавҷуд будани тамоми рукнҳои давлат: мақомоти олии қонунгузор, иҷроия ва суд аст.

Давлати **демократӣ** эълон шудани Тоҷикистон чунин маънӣ дорад, ки дар ин давлат хамаи масъалаҳои давлатдорӣ бо роҳи демократӣ ҳал карда мешавад. Аз ҷумла қабули конститутсия бо роҳи раъйпурсӣ, интихоби парламент ва дигар шохаҳои ҳокимият.

**Давлати ҳуқуқбунёд** чунин маънӣ дорад, ки тамоми ҳуқуқ, озодиҳо ва масъулияти шаҳрвандон қонунан таъмин карда шуда, тавассути он аз ҷониби давлат ҳифз карда мешавад. Ҳуқуқбунёд будани давлати мо – ин волоияти қонун, эҳтиром ва иҷроиши он аз ҷониби ҳамаи шаҳрвандон – аз Президент ва дигар мансабдорони олӣ сар карда то шаҳрвандони оддӣ мебошад.

**Дунявӣ** эълон шудани давлати Тоҷикистон чунин маънӣ дорад, ки ҳар як шахс соҳиби ирода ва эътиқоди озод ва шахсӣ буда, ирода ва эътиқоди шахси дигар дахлнопазир аст. Дар Тоҷикистон дин аз давлат ҷудо буда, интихоби дин ё мазҳаб озодона аст. Ҳеҷ як ғоя, ҷаҳонбинӣ, идеология, аз ҷумла идеологияи динӣ, ё ягон ҳизби сиёсӣ зӯран ба гардани мардум набояд бор карда шавад. Яъне асоси давлатдорӣ, сиёсӣ ва идеологияи мо дунявӣ, васеъ буда, тамоми арзишҳои маънавӣ, фарҳангӣ, ғоявӣ, сиёсӣ, ҳуқуқии миллӣ ва арзишҳои беҳтарини тамаддуни ҷаҳонро дар бар мегирад.

Давлати **ягона** чунин маънӣ дорад, ки тамоми марзу буми Тоҷикистон, ҳудуд, воҳидҳои маъмурии он ягона, якпорча аст, давлат тақсимнашаванда аст, мо ҳама якҷоя, ягонаем. Вилоятҳо, шаҳрҳо, ноҳияҳо ва дигар воҳидҳои маъмурӣ қонунҳои алоҳидаи худро надоранд. Тамоми Тоҷикистон аз як марказ, тавассути Сарқонун ва дигар қонунҳои соҳавии умумидавлатӣ идора карда мешавад.

Давлати **иҷтимоӣ** чунин маъно дорад, ки давлати мо пушту паноҳ ва ғамхори мардум, мардумпарвар аст. Иҷтимоиёт як мақсад дорад, ки мардум бо ҷои кор, музди меҳнат, манзил, муассисаҳои табобатӣ, мактаб ва дар пиронсолӣ бо нафақа таъмин бошанд.

Дар маркази сиёсати иҷтимоии давлат баланд бардоштани сатҳи зиндагӣ, некӯаҳволии халқ, ғамхорӣ дар халқи мардум қарор дорад.

Ҳуқуқу озодиҳои инсон чун анъана дар илми ҳуқушиносӣ ба 3 гурӯҳ тақсим мешаванд: 1) шахсӣ; 2) сиёсӣ; 3) иқтисодӣ, маишӣ, маданӣ.

Ба **ҳуқуқу озодиҳои шахсӣ** — ҳуқуқ ба зиндагӣ, ба озодӣ, маҳалли зист ва муҳоҷират, ба озодии виҷдон, эътиқод сухан ва андешию афкор, баҳимояи судии ҳуқуқҳои худ, ба ҳимояи ҳуқуқӣ, ба кафолатҳои мудофиавӣ ҳангоми ба суд кашидан ва ғайраҳо.

**Ҳуқуқу озодиҳои сиёсӣ** — ҳуқуқи муттаҳид шудан ба иттиҳодияҳои эҷодӣ, ҳизб-ҳои сиёсӣ, созмонҳои ҷамъиятӣ, ҳуқуқи шикат варзидан дар гирдиҳамоӣ, намоишҳо, роҳпаймоии осоишта, ҳуқуқи иштирок дар корҳои идора кардани давлат, интихоб кардан, интихоб шудан.

**Ҳуқуқҳои иқтисодӣ, маишӣ ва маданӣ** — озодии соҳибкорӣ, моликияти хусусӣ доштан, ҳуқуқи меҳнат кардан, ҳуқуқ ба истироҳат, ба корпартоӣ, ба ҳимояи оила, ба таъминоти иҷтимоӣ, ба манзил, ба ҳифзи саломатӣ, ба таҳсил, ба ширкат дар ҳаёти фарҳангӣ, озодии эҷод намудан ва ғайра мебошад.

Хулоса, Сарқонуни Ҷумҳурии Тоҷикистон гарав ва кафили ҳуқуқу озодиҳо ва масъулияти инсон, шаҳрванд, қутбнамои бунёди ҷомеаи воқеан демократӣ, ҳуқуқбунёд, дунявӣ, ягона, иҷтимоӣ, мутамаддин ва мутараққӣ мебошад.

**Бобокалонов Абдуҷалил**
**профессори кафедраи Таърихи умумии**
**ДДХ ба номи академик Бобоҷон Ғафуров**

**Шавкат Шарифов**
**номзади илмҳои таърих,**
**дотсенти донишгоҳ**

## Мухсинов Абдулкосим

***доктор физико-математических наук, профессор, Отличник народного образования Республики Таджикистан***

Во все века и времена в цивилизованный мир человечества, на историческую арену вступают такие личности, которые глубиной и проникновенностью своей мысли, мудростью миросозерцания, благородством, гуманностью намерений и слова, уровнем интеллекта и совершенством культуры находят место в глубинах сердец современников и потомков. Одним из них является требовательный и продуктивный ученый, заведующий кафедрой математического анализа Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова, доктор физико-математических наук, профессор Абдулкосим Мухсинов.

Абдулкосим Мухсинов родился в древнем Истаравшане, в семье учителя.

В 1971 году безграничное пристрастие к математике привело его на факультет механики и математики Таджикского государственного университета имени В.И. Ленина (в настоящее время: Национальный университет Таджикистана). В течение пяти лет учебы у известных математиков республики Джураева, Л.Г. Михайлова, Э.М. Мухаммадиева, Н. Р. Раджабова, З. Усмонова, Д.И. Исмоилова и других он усвоил азы науки преподавания и воспитания. Полностью осознавая их значимость и важность, он с беспредельным интересом ознакомился с тонкостями современной математической науки, совершенствовал свои знания, и в его душе зародилась любовь к ведению научно-исследовательских работ. Так, Абдулкосим Мухсинов в период учебы в университете был ленинским стипендиатом. После завершения учебы в университете и получения диплома с отличием, как талантливый и перспективный молодой человек, он был рекомендован на работу в отдел уравнений математической физики Института математики АН Таджикистана. Начав свою трудовую деятельность в данном институте как старший лаборант, он достиг уровня старшего научного сотрудника. В 1988 году под руководством известного ученого, академика Л.Г. Михайлова он успешно защитил кандидатскую диссертацию на тему «Построение решений в виде двойных степенных рядов некоторых сингулярных дифференциальных уравнений эллиптического типа» и получил ученую степень кандидата физико-математических наук. 24 февраля 2010 года устод Мухсинов А. успешно защитил свою докторскую диссертацию на тему «Исследования многообразий решений и краевых задач для некоторых многомерных вырождающихся (сингулярных) уравнений в частных производных эллиптического типа» и стал доктором физико-математических наук. В настоящее время в Согдийской области он является единственным доктором в области математических наук. Свои научные достижения Абдулкосим Мухсинов представил на нескольких международных конференциях по современным проблемам математики в городах Душанбе (1986, 1999, 2000, 2003, 2005, 2008, 2011, 2013), Тбилиси (1990, 1992), Алма-Аты (1995), Ташкент (1997), Бишкек (1999, 2003, 2012), Москва (1988, 2011) и заслужил их высокой оценки; Мухсинов А. сформировался как настоящий ученый и ведущий специалист по математическому анализу, теории функций и уравнениям математической физики.

С сентября месяца 1993 года, перейдя в Худжандский филиал Научного центра Академии наук Таджикистана, Мухсинов А. первоначально, как совместитель, приступил к работе на факультете математики ХГУ имени академика Б. Гафурова. Позже полностью перешел на работу в качестве доцента кафедры математического анализа. С 2001 до 2008 года он занимал должность заведующего кафедрой дифференциальных уравнений. С ноября месяца 2010 до мая месяца 2012 года он занимал должность проректора по воспитательной работе ХГУ имени академика Бободжона Гафурова. С сентября месяца 2012 года заведует кафедрой математического анализа.

Лекционные и практические занятия профессора Абдулкосим Мухсинова, имея глубокую научную основу, опираясь на последние достижения математической науки и инновационные методы преподавания, всегда проходят интересно и с огромной пользой для будущих специалистов. Как гуманист, как истинный и талантливый педагог, он с особой любовью преподает студентам основы наук. Профессор Мухсинов А. сведущ в сложных вопросах технологии, знаком с современными средствами обучения, о чем свидетельствуют проводимые им занятия.

Коллективом кафедры математического анализа, руководимой им, на должном уровне организован учебный процесс, основанный на кредитной системе обучения. Для студентов на кафедре созданы благоприятные условия, они обеспечены всем необходимым учебно-методическим комплексом.

Долгие годы Абулкасим Мухсинов принимал непосредственное и активное участие в качестве преподавателя в деятельности республиканской и областной летней математической, физической и химической школы, за что был награжден почетным званием «Отличника народного образования» (1990 г.). Как заместитель декана математического факультета по научной работе, он уделяет серьезное внимание научно-исследовательской работе профессорско-преподавательского состава и студенчества. Одновременно с тем, что профессор Мухсинов А. считается одаренным и талантливым учёным, он является и замечательным педагогом, способным передать глубокие свои знания и опыт научно-исследовательской и преподавательской деятельности подрастающему поколению. Следствием чего являются значительные успехи его воспитанников. Так, его ученики Назаров Муртазо (в 2000 г.), Дилшод Музафаров (в 2003 г.), Мирзобобоев Муродулло (в 2005-2006 гг.) и Баротов Достон (в 2012-2013 гг.) стали победителями заключительного этапа научной олимпиады студентов высших учебных заведений Республики Таджикистан.

Профессор Мухсинов А. возглавляет деятельность научного семинара, в работе которого принимают участие не только ученые, преподаватели и молодые соискатели математического факультета ХГУ, но и преподаватели, аспиранты и молодые соискатели других факультетов университета, а также других университетов и институтов Согдийской области. В настоящее время под руководством профессора Мухсинова А. завершил и готовит к защите свою кандидатскую диссертацию соискатель Охунов Н. Аспиранты Садриддинов А. и Бобоев Э., стажеры Рахимов М. и Набиев Р. ведут научно-исследовательскую работу по темам, предложенным Мухсиновым А.

Перу этого продуктивного учёного принадлежат более 100 научных и научно-методических статей. Большая часть из них опубликована в республиканских и зарубежных журналах.

Ныне Абдулкосим Мухсинов находится на пике своего творческого совершенства. Мы, коллеги, желая глубокоуважаемому другу, отмечающему в эти дни свой шестидесятилетний юбилей, крепкого здоровья, семейного благополучия, новых творческих успехов, покорения новых высот науки, да и всех остальных жизненных благ, обращаемся к слову Гафиза:

Да сохранит тебя молитвою, раскрыв ладони, ангел,
Да защитят творения твои как Бог, так и архангел.

**К. Бобохонов, А. Олимов, М. Муллоджонов, В. Шарипов.**

## Назимов Акбар Багадурович

***доктор физико-математических наук, профессор, академик Международной академии наук экологии и безопасности жизнедеятельности***

Трудовую деятельность Акбара Багадуровича Назимова можно разбить на два периода – до февраля 2003 года и после, когда он переехал на работу из Таджикистана в Россию.

Акбар Назимов родился 13 января 1954 г. в городе Ленинабаде (ныне город Худжанд) в семье рабочего. Его родители, отец – Назимов Мирзобаходур и мать – Бобоходжаева Онахон, родили и воспитали семерых детей, которым создали все условия, чтобы они получили прекрасное образование. Учился Акбар в средней школе №5 города Ленинабада. Любовь к математике ему привили Кориева Мамлакатхон, Собитов Джумабой и Каримов Рахимджон – школьные преподаватели математики.

В 1971 г. поступил на механико-математический факультет Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, где учился два первых курса. Ему читали лекции такие известные ученые, как академик Колмогоров Андрей Николаевич (по математической логике), профессор Стечкин Сергей Борисович (по математическому анализу), профессор Головин Олег Николаевич (по высшей алгебре), профессор Пономарев Владимир Иванович (по аналитической геометрии и по линейной алгебре). Посещал и лекции академика Александрова Павла Сергеевича, который преподавал в параллельном потоке.

В 1973 году перевелся на механико-математический факультет Таджикского государственного университета (г. Душанбе). Он посещал лекции акад. А.Д. Джураева, член-корр. АН РТ Э.М. Мухамадиева, В.Я. Стеценко, проф. Д.И. Исмоилова, доц. Б.И. Имомназарова, Г.Б. Бобоева, Д.З. Коенова , Л.К. Темирбаевой, В.Х. Тошбоева, Н.Н. Юхононова и многих других. Курсовые работы и дипломный проект выполнил под руководством Мухамадиева Эргашбоя Мирзоевича.

В 1976 году после успешного окончания учебы был направлен на работу в Математический институт Академии Наук Республики Таджикистан. Работал в отделе прикладной математики. В этом отделе работали С.Д. Джумаев и молодые энтузиасты М.Г. Юмагулов (ныне д.ф.-м.н., проф.), А. Икромов, А. Бахтоваршоев, Т. Хусейнов (все ныне кандидаты наук). В 1979 – 1983 гг. учился в заочной аспирантуре под руководством В.А. Морозова, докт. физ.-мат. наук, проф. МГУ им. М.В. Ломоносова, и С.Д. Джумаева, докт. физ.-мат. наук, проф. ТГРН. Кандидатскую диссертацию «Исследование метода регуляризации сдвигом и его приложения» защитил 13 февраля 1987 года в диссертационном совете при МГУ им. М.В. Ломоносова.

В 1989 году переехал в город Ленинабад. Начал работу доцентом кафедры математического анализа в Ленинабадском гос. пед. институте (зав. каф. – к.ф.-м.н., доц. М. Турсунов). Работал рядом с блестящими педагогами, такими как А.С. Содиков, Т.С. Собиров, Р.Т. Хасанов, К.С. Самадов, Д.Л. Латипов, М.Х. Комилов, Б.Т. Толбоев, Г. Гаймназаров, М.П. Арабов, А. Файзуллоев, Я. Дадоджонов, А. Рашидов, К. Тухлиев, К. Бобохонов и др. Усилиями Акбара Багадуровича была создана кафедра информатики и вычислительной математики, он стал первым заведующим этой кафедры. В 1991 г. Ленинабадский государственный педагогический институт был преобразован в Худжандский государственный университет. Вновь образованной кафедрой дифференциальных уравнений и функционального анализа заведовал А. Назимов. В 1993 г. его избрали деканом математического факультета. Им был организован научный семинар по математике. Участниками этого семинара помимо преподавателей и студентов Хаджандского госуниверситета были и преподаватели других вузов города. В

1995 – 1996 гг. являлся проректором по международным связям.

По инициативе Акбара Багадуровича с 1989 по 1991 г. была организована «Летняя школа по математике, физике, химии и информатике» для одаренных школьников Ленинабадской области. Впоследствии многие ученики этой школы поступили в ХГУ и учились по специальности математика, информатика, физика. В работе летней школы принимали активное участие Мухсинов Ёдгор, Арабов Махмуджон, Рашидов Абдували, Ахруллоев Вайдулло, Усмонов Гафурджон Хасанович (ныне ректор Худжандского госуниверситета).

В 1998 – 1999 гг работал зам. директора по учебе и науке в ХФТУТ. Самобытным коллективом этого филиала руководил прекрасный ученый, педагог и организатор А.Т. Максудов. Университет и его филиал отправляли своих студентов на зарубежные командировки для прохождения технической практики и принимали зарубежных студентов для прохождения аналогичной практики в производственных предприятиях области. Такой обмен с зарубежными государствами был организован блестящим математиком, ректором названного университета профессором П.А. Пулатовым.

С 1999 г по февраль 2003 г. работал в ХГУ зав. каф. дифференциальных уравнений. В 2002 г. ХГУ отмечал свой 70-летний юбилей. К этой дате готовились особо. Намечалось проведение различных учебных, научных и других мероприятий. Одной из самых важных задач являлась реорганизация книжной библиотеки университета в Фундаментальную электронную библиотеку. Этот ответственный участок был поручен А.Б. Назимову, с которым он справился блестяще.

В феврале 2003 г. для завершения работы над докторской диссертацией Акбар Багадурович Назимов переехал в Российскую Федерацию. Был принят на работу в Вологодский государственный технический университет в должности доцента кафедры высшей математики. Прекрасный коллектив кафедры принял А.Б. Назимова в свои ряды и создал возможность для плодотворной педагогической деятельности и ведения научно-исследовательской работы. Он прекрасно выполняет совместную работу с преподавателями кафедры. Им в соавторстве со многими преподавателями кафедры – А.А. Аваевым, А.Ю. Беляниной, А.П. Быстроумовой, В.А. Быстроумовым, С.В. Ивановой, О.Л. Крюковой, Н.О. Менуховой, О.И. Микрюковой, М.Д. Раджабовым, Т.А. Рожиной, И.В. Семеновой, Н.В. Степановой, Л.Ю. Чекулаевой написаны и изданы многочисленные учебные пособия и методические указания. Совместно с профессором В.С. Шульманом проводит студенческий научный кружок «Решение нестандартных задач по математике». Двое из участников этого кружка стали победителями Всероссийских студенческих олимпиад по математике и лауреатами премии Президента России.

Одновременно с педагогической работой А.Б. Назимов продолжил свою научную деятельность. На основе результатов исследований по теории регуляризации сдвигом и ее приложений в решении сингулярных интегральных уравнений Гильберта нейтрального типа первого и второго рода и периодической задачи для систем дифференциальных уравнений в 2013 г. защитил докторскую диссертацию в МГУ им. М.В. Ломоносова.

А.Б. Назимовым самостоятельно и совместно с соавторами опубликовано более 120 научных, учебных и методических работ, из них 4 монографии, 2 учебника и 15 учебных пособий. Его учебник по дифференциальным уравнениям рекомендован Министерством образования Республики Таджикистан в качестве учебника для студентов математических специальностей республики.

Возраст 60 лет для ученого – это только начало мудрой части его жизни. Пожелаем Юбиляру здоровья и больших творческих успехов в подготовке молодых кадров.

**Горбунов В.А., доктор физико-математических наук, профессор.**
**Муллоджанов М., доцент, Шарипов В., доцент.**

## Байзаев Саттор

***доктор физико-математических наук, профессор, Отличник народного образования Республики Таджикистан***

С Саттором Байзаевым я познакомился во время обучения на механико-математическом факультете Таджикского госуниверситета им. В.И. Ленина. Знакомство наше состоялось на научном семинаре, который был организован и активно функционировал под руководством Э.М. Мухамадиева (тогда еще молодого кандидата наук, а ныне – д.ф.-м.н., профессора, члена-корреспондента АН РТ). Курс, на котором обучался Саттор, был, насколько я понимаю, самым сильным за многие годы (по крайней мере, в некоторой окрестности своего года выпуска). Ряд выпускников этого курса впоследствии стали известными учеными-математиками; достаточно упомянуть (наряду с Байзаевым С.) и других нынешних юбиляров – Мухсинова А. и Назимова А. И на этом сильном курсе Саттор, безусловно, был одним из лучших студентов.

После окончания университета мы много лет работали вместе в Математическом институте АН Таджикской ССР. Это было замечательное время, когда благодаря старшим товарищам мы стремились достичь каких-либо вершин в науке. Именно те годы можно назвать годами начала моей настоящей дружбы с Саттором и с рядом его однокурсников: с уже упомянутыми Мухсиновым А. и Назимовым А., а также с Замоновым М., Икромовым А. Жизнь разбросала нас по разным странам и городам, на какое-то время теряли друг друга из виду. Но в последние годы мы постепенно стали восстанавливать наши связи. Более того, с сентября 2011 г. мы с Саттором снова работаем в одной организации – в Башкирском государственном университете.

Приведу некоторые биографические сведения о Байзаеве Сатторе. Он родился 3 апреля 1954 г. в городе Истаравшане в семье рабочего. В 1971 г. после окончания средней школы поступил на механико-математический факультет Таджикского государственного университета. В школьные и студенческие годы принимал активное участие в республиканских и всесоюзных олимпиадах и был награжден медалями и дипломами. После окончания университета с отличием в 1976 г. был направлен на работу в Математический институт Академии наук Таджикистана, где работал в должностях старшего лаборанта (1976 – 1980 гг), младшего научного сотрудника (1980 – 1984 гг.) и старшего научного сотрудника (1984 – 1989 гг.). Одновременно преподавал в Таджикском государственном университете. В 1989 – 1992 гг. работал в Таджикском государственном университете в должности доцента кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений, в 1993 – 1995 гг. работал в Худжандском государственном университет в должности доцента кафедры дифференциальных уравнений и функционального анализа. В 1995 – 2011 гг. работал в ТГУ права, бизнеса и политики, вначале в должности доцента, затем профессора и заведующего кафедрой высшей математики и информатики. С сентября 2011 г. работает в Сибайском институте (филиале) Башкирского государственного университета в должности профессора, заведующего кафедрой прикладной математики и информационных технологий.

В годы работы в Математическом институте АН Таджикистана Саттор проводил исследования по проблемам дифференциальных уравнений эллиптического типа. По итогам полученных результатов в 1983 г. защитил кандидатскую диссертацию. В 1984 г. Байзаев С. за цикл научных работ по квазилинейным эллиптическим уравнениям был награжден дипломом и премией Академии наук Таджикистана среди молодых ученых.

Байзаев С. имеет тесные связи с известными учеными Таджикистана, России (г. Москва, Санкт-Петербург, Новосибирск, Уфа и др.), Германии, Казахстана. Проходил научные стажировки и побывал в командировках в крупных научных центрах этих стран. На основе результатов исследований по теории ограниченных решений эллиптических систем на плоскости в 1999 г. защитил докторскую диссертацию в Новосибирском государственном университете. Результаты, полученные в этом направлении, включены в ежегодный отчет АН СССР (1986 г) как важнейшие. Они получили высокую оценку известных ученых СНГ. Перу Байзаева С. принадлежит свыше 110 научных и научно-методических работ, монография и учебные пособия. Большинство из работ опубликованы в престижных изданиях России, США, Германии и других государств. Его научные труды посвящены в основном теории ограниченных и периодических решений эллиптических систем уравнений, теории устойчивости, теории матриц, вычислительной математике и имеют многочисленные применения в гидро- и аэродинамике, в задачах устойчивости нелинейных систем регулирования и управления. Он принимал и продолжает активно принимать участие и выступать с докладами на многих крупных всесоюзных и международных конференциях.

В 1990 г. решением Президиума АН СССР ему присвоено ученое звание старшего научного сотрудника. Принимал активное участие в организации и проведении республиканских олимпиад и летних школ. С 1991 г. – Отличник народного образования РТ. Является членом совета по защите диссертаций. Под научным руководством С. Байзаева защищены кандидатские диссертации, выполнены дипломные и курсовые проекты, результаты которых опубликованы в виде статей и нашли применение на практике.

**Юмагулов М.Г. – доктор физико-математических наук, профессор.**

## Асимова Дильбар Мухамедовна

***кандидат физико-математических наук, доцент, Отличник народного образования Республики Таджикистан***

Асимова Дильбар Мухамедовна (Осимова Дилбар Муҳаммадовна) родилась 5.04.1954 в городе Ленинабаде ( ныне Худжанд).

После окончания средней школы № 53 города Душанбе поступила в Таджикский Государственный университет имени В.И. Ленина на механико –математический факультет на отделение прикладная математика.

В 1976 году успешно защитила дипломную работу под руководством кандидата физико-математических наук Алиева Боймурода и с отличием окончила Таджикский Государственный университет имени В.И. Ленина и ей была присвоена квалификация математик, математик-вычислитель. В этом же году Асимова Дильбар, как молодой специалист была оставлена на работу в качестве ассистента кафедры прикладной математики, а в 1977 году была переведена на кафедру механики и вычислительных методов, где проработала сначала ассистентом, а затем старшим преподавателем и доцентом этой кафедры до 1993 года.

В 1979 году поступила в аспирантуру при Таджикском госуниверситете и вела научную работу под руководством доктора физико –математических наук, профессора Стеценко Владислава Яковлевича на тему «Двусторонние монотонные методы решения операторных уравнений и оценка погрешности».

Асимова Дильбар 7 июня 1983 года на Учёном Совете ТашГУ успешно защитила кандидатскую диссертацию по сцециальности 01.01.01 и решением этого Совета ей была присуждена учёная степень кандидата физико-математических наук.

После защиты кандидатской диссертации Асимова Д.М. продолжила свою педагогическую деятельность в качестве доцента на кафедре механики и вычислительных методов в Таджикском госуниверситете. В 1993 году была переведена на работу в Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова в качестве доцента кафедры информатики и вычислительной математики факультета математики.

С ноября месяца 2003 года до февраля месяца 2009 года была на должности декана факультета Кибернетики ХГУ имени академика Б. Гафурова и одновременно работала доцентом кафедры технология защиты информации на этом факультете.

В течении педагогической деятельности Асимова Д.М. вела и ведет лекции, практические и лабораторные занятия по основным предметам кафедры, такие как информатика, методы вычислений , вычислительная математика, основы алгоритма и языки программирования. Занятия проводит на высоком методическом и теоретическом уровне. Асимова Д.М. руководит научно-методическим кружком студентов, руководит дипломными и курсовыми работами студентов. Её ученики успешно работают в самых различных отраслях республики , а также за её пределами.

Асимова Д.М. педагогическую деятельность успешно сочетает с научно-исследовательской работой по проблеме «Операторные уравнения в функциональных пространствах», а также она исследует математический подход к решению проблемы обеспечения безопасности информации. Она являлась членом Учёного совета ХГУ и является членом Учёного совета факультета кибернетики.

Она имеет более 25 опубликованных научных работ, является редактором и рецензентом нескольких научных трудов, а также является автором учебных пособий. Результаты научных исследований были опубликованы в научных журналах , а также докладывались на научных конференциях в городах Воронеж, Рига, Иркутск, Ташкент, Душанбе. Асимова Д. была участницей Большой Всесоюзной математической школы в городе Воронеж, где выступила с результатами научной работы.

Она также активно принимала и принимает участие в общественной жизни факультета и университета. Она являлась председателем женсовета механико -математического факультета и членом женсовета ТГУ и ХГУ. Она отличник народного образования.

Асимова Д.М. скромна, отзывчива, с чувством большой ответственности относится к поручениям, пользуется большим авторитетом среди преподавателей и студентов.

У Асимовой Дильбар двое сыновей, одна дочь и восемь внуков. Муж Асимовой Дильбар также является кандидатом физико-математических наук.

Асимова Дильбар является дочерью академика Мухаммада Осими и продолжает вносить свой вклад для процветания науки и образования Таджикистана.

**Юсупов Х. – к.э.н., зав. кафедрой технологии защиты информации**

## Тухлиев Камаридин

***кандидат физико-математических наук, доцент, Отличник народного образования Республики Таджикистан, Лауреат премии академика Б.Гафурова в области естественных наук***

В эти лучезарные весенние дни 2014 года отметил свой 60-летний юбилей благородный человек, неутомимый труженик, известный учёный, доцент, заведующий кафедрой информатики и вычислительной математики Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова К. Тухлиев. Окинем широким взглядом полнокровную, наполненную стремлением к познанию, служением Отечества жизнь этого истинного педагога и перспективного учёного.

К. Тухлиев родился 1 марта 1954 года в редкостном, диковинном своей первозданной красотой горном селении Бураген Шахристанского района Согдийской области Республики Таджикистан. После окончания в 1970 году средней школы №10 Истаравшанского района он сдал свои документы на физико-математический факультет Ленинабадского государственного педагогического института им. С.М. Кирова (ныне Худжандский государственный университет им. академика Б. Гафурова) и удостоился высокого звания студента. Успешно окончив институт (1975 г.), он свою трудовую деятельность, наполненную надеждой и благими намерениями, начинает на кафедре алгебры и теории чисел. С ноября 1975 года по декабрь 1976 года служил в рядах Советской Армии. С декабря 1976 по декабрь 1978 года был стажёром-исследователем кафедры математического анализа и теории функций Таджикского государственного университета им. В.И. Ленина.

В 1978 году поступил в очную аспирантуру ТГУ им. В.И. Ленина и был прикомандирован в Днепропетровский аграрный университет. В 1983 году в Институте прикладной математики и механики АН УССР, в городе Донецке, под руководством доктора физико-математических наук, профессора М.Ф. Тимана успешно защитил кандидатскую диссертацию на тему «Аппроксимативные свойства некоторых систем сходимости». В дальнейшем, продолжив свою трудовую деятельность в ХГУ им. академика Б. Гафурова, в разные годы занимает должности преподавателя, старшего преподавателя, доцента кафедры алгебры и информатики, заместителя декана по воспитательной работе, заместителя декана по научно-исследовательской работе студентов, заведующего кафедрой информатики и вычислительной математики.

К. Тухлиев считается одним из продуктивных учёных университета. Он является автором более 125 научно-методических статей, учебников и методических пособий. Его научные работы были опубликованы в материалах Международных конференций, посвященных 85-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (Воронеж, 1993 г.), 70-летию со дня рождения А.Ф. Тимана (Днепропетровск, 1990 г.), 90-летию академика АН РФ Г.Е. Кудрявцева (Москва. 2013), 60-летию академика АН РТ М.Ш. Шабозова и 80-летию академика А.Д. Джураева (Душанбе, 2012 г.), 80-летию профессора Б. Толбаева (Бишкек, 2013), а также в материалах Международной конференции, посвященной проблемам «Теории приближений и задачам вычислительной математики» (Днепропетровск, 1993 г.). В 2009 году в издательстве «Ирфон» вышла его научная монография «Приближение функций по периодическим мультипликативным системам и системам типа Хаара».

Вначале 1991 г. с целью подготовки высококвалифицированных специалистов по информатике, по инициативе доктора физ.-мат. наук, профессора Назимова Акбара Багадуровича, была организована кафедра информатики и вычислительной математики. В сентябре 1991 г. возглавив кафедру, К. Тухлиев с первых дней приложил максимум усилий, направленных на дело подготовки высококвалифицированных молодых специалистов. Он горд тем, что впервые в республике приступили к успешной и плодотворной разработке и изданию цикла учебников и учебных пособий по информатике именно на этой кафедре. Так, за издание ряда трудов, посвященных изучению современной информатики, в 2004 году Тухлиев К. и Муллоджанов М. первыми в университете удостоились премии Хукумата Согдийской области имени академика Б. Гафурова в отрасли естественных наук. В 2003 году он (в соавторстве) издал на государственном языке весьма ценную книгу – «Информатика и информационная технология». Издание этой книги сыграло значительную роль в деле повышения информационной культуры молодого поколения. В 2008-2010 гг. Тухлиев К. (в соавторстве) издал учебники по «Информационной технологии» для 7-10 классов. Результатом большой ответственности, требовательности и организаторских способностей доцента Тухлиева К. было то, что кафедра к сегодняшнему дню издала 40 наименований книг и учебных пособий по информатике, в том числе 6 учебников по решению Коллегии Министерства образования и науки Республики Таджикистан. Этот показатель является одним из лучших в республике.

В настоящее время, обобщив результаты своей научно-исследовательской работы, готовит представить к защите свою докторскую диссертацию при содействии научного консультанта, одного из известных учёных республики, академика АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Мирганда Шабозовича Шабозова. В 2013 году Тухлиев К. в пределах отечественных и зарубежных научных изданиях, рецензируемых ВАК Российской Федерации, опубликовал 18 статей. Это является лучшим показателем по университету. Так, решением Ученого совета университета за №1 от 30 января 2014 года К. Тухлиев был удостоен высокого звания «Ученого 2013 года» в сфере естественных наук.

Велик вклад К. Тухлиева в дело подготовки молодых кадров, в том числе остепененных. Используя свои личные связи, Тухлиев К. направляет трех молодых преподавателей университета – Зарифа Шарипова, Дилшода Музафарова и Зафара Тухлиева – для ведения научно-исследовательской работы в один из авторитетных в мире научных центров – в Международный центр ядерных исследований города Дубны Российской Федерации. Двое из них – Зариф Шарипов в 2010 г. и Дилшод Музафаров в 2011 г. – успешно защитили свои кандидатские диссертации. Их диссертации получили высокую оценку признанных ученых данного Центра. Таким образом, в Центре они повысили авторитет не только университета, но и всего дорогого нам Таджикистана. Это был первым успехом его воспитанников за пределами страны в отрасли точных наук в годы Независимости. Учитывая научные интересы молодых преподавателей – Ш. Хамдамова, Ф. Мирпоччоева, Дж. Бекназарова – он оказал содействие их учёбе в аспирантуре под руководством акалемика М.Ш. Шабозова, а М. Файзиев завершает диссертацию под руководством доктора физико-математических наук, профессора Д.Х. Сафарова. В результате Ш. Хамдамов, Ф. Юсуфова и С. Раджабова успешно защитили кандидатские диссертации, а Ф. Мирпоччоев прошёл предзащиту. В ближайшие годы кафедра, деятельность которой возглавляет талантливый учёный и надежный покровитель молодых специалистов К. Тухлиев, превратиться в источник остепенённых кадров факультета. Словом, К. Тухлиев в период заведования кафедрой смог объединить её членов в одно целое и направить их педагогическую деятельность на подготовку высококвалифицированных молодых кадров. Как говорят математики, К. Тухлиев человек многопараметрный. По каждому параметру он выбирает оптимальное направление и движется вперед.

Мы от имени коллег, сотрудников и учеников сердечно поздравляем Камаридина Тухлиева с юбилеем, желаем ему крепкого здоровья, семейного счастья и новых успехов в его научно-педагогической деятельности.

**К. Бобохонов, М. Муллоджанов, Ш. Хамдамов, В. Шарипов**

# Математический анализ

УДК 517.512

## Inequality of Nikolsky and Bernshteins's type classification within $H_p(-\infty,\infty)$

Gaimnazarov G.

**(Gulistan State University, Uzbekistan)**

Let $H_p = H_p(-\infty,\infty)$ is a space of analytical in the upper semi plane functions $f(z) = f(x+iy)$, $y > 0$ meeting the condition

$$T_p\left(f;y\right) = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(x+iy\right)^p dx \right| \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 0 < p < \infty$$

$$T_\infty\left(f;y\right) = \sup_x \left| f\left(x+iy\right) \right| < \infty\ , \quad p = \infty\ , \qquad -\infty \le x \le \infty.$$

Let $L_p(-\infty,\infty)$ means a space of all measured on $(-\infty,\infty)$ functions for which

$$\left\| f(x) \right\|_{L_p} = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty, \ \ 0 < p < \infty \tag{A}$$

and when $p = \infty$

$$\left\| f(x) \right\|_{L_\infty} = \sup_{-\infty < x < \infty} \left| f(x) \right| < \infty.$$

Clearly, if $p \ge 1$, the set $L_p$ is space with the norm defined by (A). If $0 < p < 1$, the formula (A) does not define a norm since the triangle inequality is not satisfied. However, in this case $L_p$ is a linear metric space.

For the entire functions of the degree $\le \sigma$ within the space $L_p\left(-\infty;\infty\right)$ an inequality (see [1], p.150)

$$\left\| Q_\sigma\left(x\right) \right\|_{L_p} \leqslant C\sigma^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left\| Q_\sigma\left(x\right) \right\|_{L_p} \ \ 1 \le p \le q \le \infty \tag{1}$$

is known as Nikolsky's inequality, (see [1], p.137-138) also an inequality

$$\left\| Q_\sigma^{(k)}\left(x\right) \right\|_{L_p} < M\sigma^k \left\| Q_\sigma\left(x\right) \right\|_{L_p}\ , \qquad k = 1,2,3,...; \qquad 1 \le p \le \infty\ , \qquad M - const \tag{2}$$

is known as Bernshtein's inequality.

Let's underline, that an analog of an inequality (2) when $0 < p < 1$ is calculated by the author [2] for natural numbers $k = 1,2,3,\ldots$ , while for the fractional number $k > 0$ if $0 < p < 1$ in [3]. Some properties of the function $f(x) \in L_p(-\infty,\infty)$ possessing derivatives of a fraction order were investigated by us in works [4] and [5].

The aim of the work is to receive an analog of an inequality (1), (2) and an analog of one inequality of Hardy-Littlewoods [6] within the spaces $H_p(-\infty, \infty)$.

**Theorem 1.** If $f\,(x+iy) \in H_p\,(-\infty;\infty)$, $0 < p \le \infty$, then an inequality occurs:

$$T_1\,(f;y) \leqslant C\,(p)\,(y-y_0)^{1-\frac{1}{p}}\,T_p\,(f;y_0)\,, \quad 0<p<1, C\,(p) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{4}{2-p}, y > y_0 \ge 0 \tag{3}$$

$$T_q\,(f;y) \le C\,(p,q)\,(y-y_0)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\,T_p\,(f;y_0)\,,\ 0<p<q, C\,(p) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{4q}{2q-p}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4}$$

Let's mark that the constant $0 < C(p) < 2$ $0 < p < q < \infty$ and if $q = \infty$, then $C(p,q) = (\pi)^{\frac{1}{p}}$.

**Theorem 2.** If $f\,(x+iy) \in H_p\,(-\infty;\infty)$, $0 < p < \infty$ and there is a derivative of the order $k$, then an inequality:

$$T_p\left(f^{(k)};y\right) \leqslant C\,(p,k)\,(y-y_0)^{-k}\,T_p\,(f;y_0)\,, \qquad y > y_0 > 0 \quad k = 1,2,3,... \tag{5}$$

occurs, when $p \ge 1$ constant $(p,k)$ doesn't depend on $p$. Further $(p,k)$ means a constant, depending on $p, k$.

**Theorem 3.** If function $f\,(z) \in H_p$, $f'\,(z) \in H_p\,(-\infty;\infty)$, then when $y > y_0 > 0$ an inequality

$$\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f'\,(z)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C\frac{\omega\,(y-y_0)_{L_p}}{y-y_0} \quad z = x+iy, \quad 1 \le p \le \infty \tag{6}$$

where $\omega\,(\delta; f)_{Lp}$ – is a module of continuity (see [1], p. 174-180) of the boundary function $f\,(x)$ in $L_p\,(-\infty;\infty)$, i.e.

$$\omega\,(\delta;f)_{L_p} = \sup_{u \leqslant \delta} \|f\,(x+u) - f\,(x)\|_{L_p}\,.$$

From theorem 2 and 3 the following stems:

***Corollary fact 1.*** If the condition

$$T_p(f:y_0) = 0(y_0^{-\alpha}), \qquad \alpha > 0,$$

is fulfilled, then

$$T_p(f^{(k)};y) = 0(y_0^{-k-\alpha}), \quad k = 1,2,....; \quad y > 2, \quad y_0 > 0.$$

This is an analog of one result of Hardy and Littlewoods [6], calculated for periodical functions in the class $H_p(-\pi,\pi)$.

***Corollary fact 2.*** If the boundary function $f(x) \in L_p(-\infty,\infty)$ meets the condition

$$\omega(t;f)_{lp} = 0(t^{\alpha}), \qquad 0 < \alpha < 1,$$

then

1) $\|f'(z)\|_{H_p} = O\left(y_1^{\alpha-1}\right)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $y > y_1 > 0$;

2) $\|f'(z)\|_{H_p} = O\left(y_1^{\alpha-1}\right)$, $\frac{1}{2} < p < 1$, $\alpha < 1 - \frac{1}{p}$, $y > y_0$.

Inequality (3) and (4) are at Nikolsky's type classification (see (1)). Inequality (5) is of Bernstein's type classification (see (2)).

Inverse inequality to inequality (6) for integral functions of the degree $\le \sigma$ within the space $L_p(-\infty,\infty)$ gives us lemma 2 in [7].

**References**

1. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения// М.: Наука, 1969. -480 с.
2. Гаймназаров Г. Некоторые неравенства в пространствах $L_p(-\infty,\infty), 0 < p < 1$// Докл. АН Тадж ССР, 1985. –Т. 28. - №12. –с. 685-687.
3. Гаймназаров Г., Гаимназаров О.Г. О некоторых неравенствах для функций имеющих производную дробного порядка// Доклады АН Респ.Узбекистан, 2011, №2, с.16-21.
4. Гаймназаров Г. О модулях гладкости дробного порядка функций, заданных на всей вещественной оси. // Докл. АН Тадж ССР, 1981. –Т. 24. - №3. –с.148-149.
5. G. Gaimnazarov, H. Narjigitov and O. G. Gaimnazarov// On some properties of function associated with derivative of fractional order in space of $L_p(-\infty,\infty)$. Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS) Volume 76, Number 2, 2013, pp 319-336.
6. Hardy G.H., Littlewood J. E . Some properties of conjugate functions//j. reine and angew. Moth 1931, v167. p. 405-423.
7. Гаймназаров Г. Теоремы Джексона в пространствах $H_p(-\infty,\infty)$ и приближение функций из класса $L_p(-\infty,\infty)$ средними Чезаро и Гаусса-Вейерштрасса, ДАН Тадж.Респ. 1990, том XXXIII. -№12. -с.791-794.

УДК 517.5

# О приближение функций в пространстве Бергмана

Айдармамадов А.Г.

**(Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан)**

Работа посвящена изучению аппроксимативных свойств аналитических в единичном круге функций

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,\ z = \rho e^{it},\ 0 \le \rho < 1$$

в весовом пространстве Бергмана $B_{q,\gamma}$, $1 \le q \le \infty$ с конечной нормой [1]

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi}\iint_{|z|<1} \gamma(|z|)|f(z)|^q d\sigma\right)^{1/q} < \infty, 1 \le q \le \infty, \tag{1}$$

где $\gamma(|z|)$ – положительная весовая функция, $d\sigma$ – элемент площади и интеграл понимается в смысле Лебега. Очевидно, что норму (1) также можно записать в виде

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho)|f(\rho e^{it})|^q d\rho dt\right)^{1/q} = \left(\int_0^1 \rho\gamma(\rho) M_q^q(f,\rho) d\rho\right)^{1/q} < \infty,$$

где

$$M_q(f,\rho) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt\right)^{1/q},\quad 1 \le q \le \infty.$$

Величину

$$\omega_2(f, 2\delta)_{Bq,\gamma} = \sup_{|h|\le\delta} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho)|f(\rho e^{i(t+h)}) - 2f(\rho e^{it}) + f(\rho e^{i(t-h)})|^q d\rho dt\right)^{1/q}$$

назовем интегральным модулем гладкости в пространстве $B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$.

Пусть $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, через

$$\mathcal{P}_n = \left\{ p_n(z) : \ p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right\}$$

обозначим множество алгебраических комплексных полиномов степени $\leq n$.

Величину

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} = \inf \Big\{ \|f - p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma}} : \ p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1} \Big\}$$

назовем наилучшим приближением функции $f(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$, множеством $\mathcal{P}_{n-1}$. Для $r \in \mathbb{N}$ обычную производную $r$-го порядка функции $f(z)$ обозначим $f^{(r)}(z) = d^r f / dz^r$ ($f^{(0)}(z) \stackrel{def}{=} f(z)$), а через $f_a^{(r)}(z) = \partial^r f(\rho e^{it}) / \partial t^r$ обозначим производную $r$-го порядка по аргументу, причём $f_a'(z) = f'(z) zi$ и $f_a^{(r)}(z) = \{ f_a^{(r-1)}(z) \}_a'$ для $r \geq 2$. Имеет место следующее общее утверждение.

**Теорема 1.** *Для произвольной функции* $f(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$ *и* $0 \leq u \leq \pi/2n$, $n \in \mathbb{N}$ *имеет место неравенство*

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} \leq \frac{\pi}{2u(\pi - 2)} \int_0^u \omega_2(f; 2\tau)_{B_{q,\gamma}} \left\{ 1 + \left[ \left( \frac{\pi}{2un} \right)^2 - 1 \right] \sin \frac{\pi}{2u} \tau \right\} d\tau, \tag{2}$$

*которое обращается в равенство для функции* $f_0(z) = az^n \in B_{q,\gamma}$, $a \in \mathbb{C}$.

Сформулированная теорема является обобщением одного результата Н. Айнуллоева [2], полученного в пространстве Харди $H_q$, $1 \leq q \leq \infty$ на случай пространства Бергмана $B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$.

Полагая $\pi/(2nu) = \mu$ $(1/2 \leq \mu < \infty)$, неравенство (2) перепишем в виде

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} \leq \frac{\mu n}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2nu)} \omega_2(f, 2t)_{B_{q,\gamma}} \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \mu n t \right\} dt. \tag{3}$$

Воспользовавшись неравенствами [3]

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} \leq n^{-r} E_n(f_a^{(r)})_{B_{q,\gamma}},$$

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} \leq \alpha_{n,r} E_n(z^r f^{(r)})_{B_{q,\gamma}},$$

где $\alpha_{n,r} = n(n-1) \cdots (n-r+1)$; $n \geq r$; $n, r \in \mathbb{N}$, а также неравенством (3) сформулируем следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Для любой функции* $f(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$, *у которой производные* $f_a^{(r)}(z), z^r f^{(r)}(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$, *при любых* $n, r \in \mathbb{N}$, $r < n$ *и* $\mu \geq 1/2$ *имеют место неравенства*

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} \leq \frac{\mu}{(\pi - 2) n^{r-1}} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega_2(f_a^{(r)}; 2t)_{B_{q,\gamma}} \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \mu n t \right\} dt, \tag{4}$$

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} \leq \frac{\mu n}{(\pi - 2) \alpha_{n,r}} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega_2(z^r f^{(r)}; 2t)_{B_{q,\gamma}} \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \mu n t \right\} dt. \tag{5}$$

Неравенство (4) и (5) обращаются в равенство для экстремальной функции $f_0(z) = az^n \in B_{q,\gamma}$, $a \in \mathbb{C}$, $1 \le q \le \infty$.

Пусть $\Phi(u)$, $u \ge 0$ – произвольная возрастающая функция такая, что $\lim\limits_{u\to 0}\Phi(u) = 0$. Для любых $r \in \mathbb{N}$, $1 \le q \le \infty$, $\mu \ge 1/2$ и $t \in \mathbb{R}_+$ вводим в рассмотрение следующих класс функций:

$$W^{(r)}_{q,\gamma,a}(\Phi;\mu) =$$

$$= \left\{ f(z) \in B^{(r)}_{q,\gamma,a} : \ \frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega_2(f^{(r)}_a; 2\tau)_{B_{q,\gamma}} \left[1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi\tau}{2t}\right] d\tau \le \Phi(t) \right\}.$$

$$W^{(r)}_{q,\gamma}(\Phi;\mu) =$$

$$= \left\{ f(z) \in B^{(r)}_{q,\gamma} : \ \frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega_2(z^r f^{(r)}; 2\tau)_{B_{q,\gamma}} \left[1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi\tau}{2t}\right] d\tau \le \Phi(t) \right\}.$$

Положим еще

$$(1 - \cos m\theta)_* = \Big\{(1 - \cos m\theta), \text{ если } \ 0 \le m\theta \le \pi; \ 2, \text{ если } m\theta \ge \pi\Big\}.$$

Пусть $S = \{g : \|g\| \le 1\}$ – единичный шар в $B_{q,\gamma}$; $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество из $B_{q,\gamma}$; $\Lambda_n \subset B_{q,\gamma}$ – произвольное $n$-мерное подпространство. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}; B_{q,\gamma}) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0; \ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset B_{q,\gamma}\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}; B_{q,\gamma}) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - g\| : g \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_n \subset B_{q,\gamma}\right\}$$

называют соответственно бернштейновским и колмогоровским $n$-поперечниками. Указанные поперечники удовлетворяют неравенства [4]:

$$b_n(\mathfrak{M}; B_{q,\gamma}) \le d_n(\mathfrak{M}; B_{q,\gamma}).$$

**Теорема 3.** *Если для любого $n \in \mathbb{N}$, $\mu \ge 1/2$ и произвольного $t \in \mathbb{R}_+$ функция $\Phi(u)$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\pi}{\pi - 2}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right) \cdot \frac{1}{t}\int\limits_0^t (1 - \cos n\theta)_* \left[1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi\tau}{2t}\right] d\tau \le \Phi(t), \tag{6}$$

*то для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$b_n\Big(W^{(r)}_{q,\gamma,a}(\Phi;\mu); B_{q,\gamma}\Big) = d_n\Big(W^{(r)}_{q,\gamma,a}(\Phi;\mu); B_{q,\gamma}\Big) =$$

$$= E_n\Big(W^{(r)}_{q,\gamma,a}(\Phi;\mu)\Big)_{B_{q,\gamma}} = \frac{\pi}{2(\pi - 2)} \cdot \frac{1}{n^r}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right),$$

$$b_n\Big(W^{(r)}_{q,\gamma}(\Phi;\mu); B_{q,\gamma}\Big) = d_n\Big(W^{(r)}_{q,\gamma}(\Phi;\mu); B_{q,\gamma}\Big) =$$

$$= E_n\Big(W^{(r)}_{q,\gamma}(\Phi;\mu)\Big)_{B_{q,\gamma}} = \frac{\pi}{2(\pi - 2)} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right).$$

*Множество мажорант, удовлетворяющих условию (6), не пусто.*

**Литература**

1. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $\mathcal{B}_{2,\gamma}$. – Докл. РАН, 2007, т.412, №4, с. 466-469.
2. Айнуллоев Н. – Геометрические вопросы теории функций и множеств. Сб. научных трудов; – Калининский госуниверситет, 1986, с. 91-101.
3. Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. Наилучшее приближение некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и тех. наук, 2009, №3(136), с. 7-23.
4. Тихомиров В.М. – Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во МГУ, 1976, 304 с.

УДК 517.968

## Алгоритмическая сложность приближенного решения граничных интегральных уравнений с гармоническими коэффициентами при логарифмической сингулярности

Азизов М.

**(Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни)**

Пусть $V, E$ и $K$ – линейные нормированные пространства. Причем $V$ вложено в $E$ с константой вложения единица. Кроме того, предполагается, что существует линейный непрерывной оператор $T$, ставящий в соответствие каждому элементу $k \in K$ оператор $T_k \in L(E)$, где $L(E)$ - нормированное пространство линейных ограниченных операторов из $E$ и $E$.

Пусть еще множество $K_0 \subset K$ таково, что для любого $k \in K_0$ резольвента оператора $T_k$ ограничена, то есть $(I - T_k)^{-1} \in L(E)$. Тогда при фиксированном множестве $V_0 \subset V$ через $X_0 = K_0 \times V_0$ будем обозначать класс операторных уравнений второго рода

$$u - T_k u = f,\ k \in K_0,\ f \in V_0. \tag{1}$$

Оператор $S:\ X_0 \longrightarrow E$, определяемый соотношением

$$S\left(k, f\right) = \left(I - T_k\right)^{-1} f$$

называется оператором решения для уравнений (1). При этом множество

$$S\left(X_0\right) := \left\{u : u \in E,\ u = \left(I - T_k\right)^{-1} f,\ k \in K_0,\ f \in V_0\right\}$$

состоит из решений уравнений (1) из класса $X_0$

Под способом задания информации об уравнениях (1) понимается совокупность $N = (N_1, N_2)$ двух произвольных наборов $N_1$ $N_2$ линейных непрерывных функционалов

$$\begin{array}{c} N_1 k = \left(\lambda_1\left(k\right), \lambda_2\left(k\right), \ldots, \lambda_{n_1}\left(k\right)\right), \lambda_i \in K^*,\ i = 1, 2, \ldots, n \\ N_2 f = \left(\sigma_1\left(f\right), \sigma_2\left(f\right), \ldots, \sigma_{n_1}\left(f\right)\right), \sigma_i \in V^*,\ j = 1, 2, \ldots, n, \end{array} \tag{2}$$

Положим $\mathrm{card}(N) = n_1 + n_2$

Под алгоритмом $\varphi$ приближенного решения уравнения (1) по информации (2) понимается произвольное непрерывное отображение $(n_1 + n_2)$ - мерного пространства $R^{n_1+n_2}$ в $E$, при котором каждому информационному вектору $N(k,f) = (N_1 k, N_2 f)$ в качестве приближенного решения (1) ставится элемент $\varphi(N(k,f)) \in E$ Погрешность алгоритма $\varphi$ на классе $X_0$ называется величина

$$e(X_0,\varphi) = \sup_{(k,f)\in X_0} \|S(k,f) - \varphi(N(k,f))\|_E$$

При фиксированном способе задания информации $N$ через $\Phi(N)$ будем обозначать множество всех алгоритмов, использующих в качестве информации значения функционалов входящих в совокупность $N = (N_1, N_2)$

Рассмотрим следующие нормированные пространства функций одной и двух переменных:

$$\Gamma^\rho = \left\{ f : f \in L_2,\ \|f\|_\rho := \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho^{-2|m|} \cdot \hat{f}^2(m) \right)^{\dfrac{1}{2}} < \infty \right\},$$

$$T^\rho = \left\{ k : k \in L_2(Q),\|k\|_{2,\rho} := \left( \sum_{l,m=-\infty}^{\infty} \rho^{-2|l|} \cdot \rho^{-2|m|} \cdot \hat{k}^2(l,m) \right)^{\dfrac{1}{2}} < \infty \right\},$$

где $h > 0$, а $ch(\cdot)$ - гиперболический косинус, а $\hat{f}(m)$ и $\hat{k}(lm)$ – коэффициенты Фурье функции $f(t)$ и $k(t\tau)$ по тригонометрическим системам одной и двух переменных, отвечающие гармоникам о номерами $m$ и $(lm)$ соответственно. Известно (см.,[1,с.186]), что пространства $\Gamma^\rho$ и $T^\rho$ состоят из $2\pi$ – периодических функций одной и двух переменных, являющимися по каждой переменной следами гармонических в единичном круга $\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ функций по окружности радиуса

$$\rho\left\{(x,y) : x^2 + y^2 = \rho^2\right\}$$

В рамках введенных нами обозначений положим

$$E = L_2,\ V = \Gamma^\rho,\ K == T^\rho.$$

Кроме того, оператор $T$, ставящий в соответствие каждому элементу $k \in T^\rho$ оператор $T_k \in L(L_2)$, определим в виде

$$T_k g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} k(t,\tau)\, g(\tau)\, d\tau,$$

и рассмотрим множество

$$K_\rho = K_\rho(\alpha) = \left\{ k : k \in T^\rho, \|k\|_{2,h} \leqslant \alpha_1, \left\|(I - T_k)^{-1}\right\|_{L_2 \to L_2} \leqslant \alpha_2 \right\}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$$

Тогда класс

$$X^\rho = X^\rho(\alpha) = K_\rho(\alpha) \times B_{\Gamma^\rho}$$

состоит из интегральных уравнений Фредгольма второго рода (1) с ядрами $k(t\tau)$ из множества $K_\rho$ и свободными членами $f(t)$ из единичного шара $B_{\Gamma^\rho}$ пространства $\Gamma^\rho$ с центром в нуле. Работа посвящена получению точных порядковых оценок информационной сложности приближенного решения слабо сингулярных интегральных уравнений вида

$$z(t) = Hz(t) + f(t) := \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{-a(t,\tau)}{\pi} \cdot ln \left| 2\sin\frac{t-\tau}{2} \right| + \frac{b(t,\tau)}{2\pi} \right) z(\tau)\, d\tau + f(t) \quad (3)$$

с периодическими гармоническими коэффициентами $a(t,\tau)\, b(t,\tau)$, и свободными членами $f(t)$ конечной гладкости. Такие уравнения относятся к типу операторных уравнений второго рода со сглаживающими операторами.

Пусть $X$ – гильбертово пространство, а

$$Y_0 = X \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots \supset Y_v \supset \ldots$$

– шкала банаховых пространств, вложенных друг в друга с константой вложения единица. Будем называть $H$ сглаживающим оператором порядка $q$, если для любого

$$v = 0, 1, 2, \ldots, H \in L(Y_v, Y_{v+q})$$

Из одного результата Г. Вайнико и Ю. Саранена следует, что при $ab \in T^{\rho}$ интегральный оператор $H$ из уравнения (1) является сглаживающим оператором порядка 1 по отношению к шкале соболевских пространств $W_2^v$.

Положим:

$$\Phi_L(N) = \{\varphi : \varphi \in \Phi(N), const(\varphi) \leqslant L\}$$

Рассматривая алгоритмы из $\Phi_L(N)$ естественно полагать, что

$$card(N) \leq L$$

.

В противном случае алгоритмы из $\Phi_L(N)$ не используют всю информацию, представленную компонентами вектора (2). Величина

$$E_L(X_0) = \inf_{N:card(N)\leqslant L} \inf_{\varphi\in\Phi_L(N)} e(X_0, \varphi)$$

является минимальной погрешностью, которую можно гарантировать при приближенном решении уравнений из класса $X_0$ с помощью всевозможных алгоритмов, требующих для своей реализации выполнения не более чем $L$ элементарных арифметических операции над значениями функционалов, определяющих различные способы задания информации.

Под $\varepsilon$ – сложностью (алгоритмической сложностью) задачи приближенного решения уравнений из класса $X_0$ понимается величина

$$comp(\varepsilon, X_0) = \inf\{L : E_L(X_0) \leqslant \varepsilon\}$$

равная минимальному числу элементарных операций, необходимых для достижения точности $\varepsilon$ на классе $X_0$.

Обозначим через $\psi^{\rho,r}$ класс однозначно разрешимых слабо – сингулярных интегральных уравнений (3) с коэффициентами $a(t,\tau)\, b(t,\tau)$ соответственно из шаров $\alpha B_{\Gamma^\rho}$, $\beta B_{\Gamma^\rho}$ пространства $\Gamma^\rho$ с радиусами $\alpha$,$\beta$ и свободными членами $f(t)$ из шара $\eta B_{W_2^r}$ соболевского пространства $W_2^v$ с радиусом $\eta$.

Для слабо – сингулярных интегральных уравнений вопрос об $\varepsilon$ – сложности (алгоритмической сложности) их приближенного решения был в 1989 году поставлен Г.М. Вайникко. В случае аналитических коэффициентов точные оценки $\varepsilon$ – сложности таких уравнений были получены в работе [2].

Для построения алгоритма $\varphi^r_{n,M}$ который является оптимальным по порядку для класса $\psi^{\rho,r}$ в смысле сложности, используются результаты работы [3] о скорости сходимости аппроксимационно-итеративных методов для уравнений со сглаживающими операторами. При алгоритме $\varphi^r_{m,\,M}$ приближенного решения уравнений (3), (4) определяем после $3r$ итераций по формулам

$$z_0 = 0,\; z_k = z_{k-1} + (I - S_m H_n S_m)^{-1} (H_n S_{M^{z_{k-1}}} - z_{k-1} + S_L f)$$

$$k = 1, 2, \dots 3r$$

Центральным результатом исследований является

**Теорема**

$$comp\,(\varepsilon, \psi^{\rho,r}) \asymp \varepsilon^{-}\frac{1}{r}$$

СЗИ $N_{n,L}$ *и алгоритм* $\varphi^r_{m,\,M}$ *реализуют оптимальный порядок сложности на классе* $\psi^{\rho,r}$при

$$L \asymp \varepsilon^{-\frac{1}{r}},\quad M \asymp \varepsilon^{-\frac{1}{(r+1)}},\quad n \asymp \log\frac{1}{\varepsilon}/\left|\log\rho\right|,\quad m \asymp \varepsilon^{-\frac{1}{3r}}$$

**Литература**


1. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1976. -304 с.
2. Азизов М. Точный порядок информационной сложности слабо сингулярных интегральных уравнений с периодическими аналитическими коэффициентами. - Мат. заметки. т.62, вып.5, 1997, с.643-656.
3. Азизов М. Об оптимальной скорости сходимости проекционно-итеративного метода и некоторых его обобщений на классе уравнений со сглаживающими ядрами. – Укр. матем. журн. т.48, №11, 1996, с. 1448-1456.


УДК 517.5

## О восстановлении решения краевых задач сплайнами первого порядка по усреднённым значениям граничных функций

Азизов М., Пулодов М.П.

**(ТГПУ им. С. Айни, Душанбе, Таджикистан)**

В данной заметке рассмотрим конкретное применение сплайнов первого порядка дефекта 1 к следующей краевой задачи математической физики: требуется найти бигармоническую в области $D = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 = \rho^2 < 1\}$ функцию $u(\rho,t)$, $0 \le \rho < 1$, $0 \le t \le 2\pi$, удовлетворяющую уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)^2 u(\rho,t) = 0, \tag{1}$$

для которой

$$u(\rho,t)\Big|_{\rho=1} = g(t), \quad \frac{\partial u(\rho,t)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1} = 0. \tag{2}$$

Известно [1, с.398], что решение задачи (1) – (2) существует и задаётся формулой

$$u(\rho,t) := u(g;\rho,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{K}_\rho(t-u)g(u)du,$$

где ядро $\mathcal{K}_\rho(t)$ имеет вид

$$\mathcal{K}_\rho(t) = \frac{(1-\rho^2)(1-\rho\cos t)}{2(1-2\rho\cos t+\rho^2)}, \quad 0 \le \rho < 1.$$

Непосредственным вычислением коэффициентов Фурье для ядра $\mathcal{K}_\rho(t)$ получаем следующее разложение в ряд Фурье [2]

$$\mathcal{K}_\rho(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}(1-\rho^2)k\right)\rho^k\cos kt =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos kt + \frac{1}{2}(1-\rho^2)\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^k\cos kt.$$

Рассмотрим следующий метод восстановления решения $u(g;\rho,t)$ краевой задачи (1) – (2). Через $H^1$ обозначим класс функций $f(t)$, удовлетворяющих условию

$$|f(t') - f(t'')| \le |t' - t''|.$$

Пусть $t_i = i\pi/n$, $\tau_i = t_i - \pi/(2n)$ $(i = 0, \pm1, \pm2, \dots)$ и $S(t) = S(f,t)$ – периодический сплайн порядка 1 дефекта 1 по разбиению $\{t_i\}$, однозначно определяемый по функции $f(t) \in C[0,2\pi]$ условием

$$S(f,\tau_i) = \frac{n}{\pi}\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\tau)d\tau, \ i = 1,2,\dots,2n. \tag{3}$$

Свёртку $u(g;\rho,t) := u(g;\rho,t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathcal{K}_\rho(t-\tau)g(\tau)d\tau$, являющееся решением краевой задачи (1) – (2) с учётом (3), поставим в соответствие функцию

$$S_1(u(g;\rho,\cdot);t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{K}_\rho(t-\tau)S(g,\tau)d\tau. \tag{4}$$

Рассмотрим задачу вычисления точной верхней грани величины

$$\sup\Big\{\Big|u(g;\rho,t) - S_1(u(g;\rho,\cdot);t)\Big| : \ g \in H^1\Big\}. \tag{5}$$

Нам понадобится следующая

**Лемма [3].** *Пусть* $f \in H^1$, $\delta(t) = f(t) - S(f,t)$,

$$\delta_1(u) = \int_0^t \delta(u)du = \int_0^t [f(u) - S(f,u)]du.$$

*Тогда для любых* $t,\tau \in [0,\pi]$ *выполняется неравенство*

$$\Big|\delta_1(t+\tau) - \delta_1(t)\Big| \le \mu(\tau) := \begin{cases} \dfrac{\tau}{4}\left(\dfrac{2\pi}{n} - \tau\right), & 0 < \tau \le \dfrac{\pi}{n}, \\ \dfrac{\pi^2}{4n^2}, & \dfrac{\pi}{n} \le \tau \le \pi. \end{cases} \tag{6}$$

*Существует функция* $f_0 \in H^1$ *для которой при некотором* $t$ *в (6) имеет место знак равенство при всех* $\tau$ *из* $[0,\pi]$.

Заметим, что величина (5) не зависит от $t$, так, что не нарушая общности, можно считать $t = 0$. Поэтому имеем

$$u(g;\rho,0) - S_1(u(g;\rho,\cdot);0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{K}_\rho(\tau)[g(\tau) - S(g,\tau)]d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathcal{K}'_\rho(t)\delta_1(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \mathcal{K}'_\rho(t)\delta_1(t)dt.$$

В силу леммы, для $g \in H^1$ имеем:

$$\left|\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathcal{K}'_\rho(t)\delta_1(t)dt\right| \le \left|\int_0^{\pi/2} \mathcal{K}'_\rho(t)\mu(2t)dt\right|,$$

$$\left|\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \mathcal{K}'_\rho(t)\delta_1(t)dt\right| \le \left|\int_{\pi/2}^{\pi} \mathcal{K}'_\rho(t)\mu(2\pi - 2t)dt\right|.$$

Введя обозначения

$$\lambda(t) = \{\mu(2t),\ 0 < t \le \pi/2;\quad \mu(2\pi - 2t),\ \pi/2 \le \tau \le \pi\}$$

будем иметь

$$\Big|u(g;\rho,0) - S_1(u(g;\rho,\cdot);0)\Big| \le$$

$$\le \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathcal{K}'_\rho(t)\lambda(t)dt\right| = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Big[\mathcal{K}'_\rho(t) - C_0\Big]\lambda'(t)dt\right|. \tag{7}$$

Вычисляя интеграл в правой части (7), получаем

$$\Big|u(g;\rho,0) - S_1(u(g;\rho,\cdot);0)\Big| \le$$

$$\le \frac{8}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\rho^{2\nu+1}}{(2\nu+1)^2}\sin^2\left(\frac{2\nu+1}{4n}\pi\right) + \frac{4}{\pi}(1-\rho^2)\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\rho^{2\nu+1}}{2\nu+1}\sin^2\left(\frac{2\nu+1}{4n}\pi\right). \tag{8}$$

Легко подсчитать, что знак равенство в (8) имеет место, если $g(t)$ является интегралом от sgnsint. Таким образом справедлива следующая

**Теорема.** *Для восстановления решения краевой задачи (1) – (2) методом (4) при всех значениях $t$ имеет место точная оценка*

$$\sup\Big\{\Big|u(g;\rho,t) - S_1(u(g;\rho,\cdot);t)\Big| :\ g \in H^1\Big\} =$$

$$= \frac{8}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\rho^{2\nu+1}}{(2\nu+1)^2}\sin^2\left(\frac{2\nu+1}{4n}\pi\right) + \frac{4}{\pi}(1-\rho^2)\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\rho^{2\nu+1}}{2\nu+1}\sin^2\left(\frac{2\nu+1}{4n}\pi\right). \tag{9}$$

Отметим, что если сплайн $S(f,t)$ определить не условием (3), а условиями

$$S(f;\tau) = g(\tau_i),\ i = 1, 2, \ldots, 2n,$$

то точная оценка погрешности величины (5) на классе $H^1$ равно

$$\sup\Big\{\Big|u(g;\rho,t) - S_1(u(g;\rho,\cdot);t)\Big| :\ g \in H^1\Big\} =$$

$$= \frac{\pi}{4n} + \frac{2}{\pi n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\rho^{2n(2\nu+1)}}{(2\nu+1)^2} + \frac{1}{\pi}(1-\rho^2)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\rho^{2n(2\nu+1)}}{2\nu+1}. \qquad (10)$$

Используя очевидные равенства

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\rho^{2n(2\nu+1)}}{2\nu+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho^{2n}}{1-\rho^{2n}} - \rho^{2n}, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\rho^{2n(2\nu+1)}}{(2\nu+1)^2} = \frac{n}{\rho^{2n}}\int_0^{\rho}\ln\frac{1+r^{2n}}{1-r^{2n}}dr$$

запишем соотношение (10) в виде

$$\sup\Big\{\Big|u(g;\rho,t) - S_1(u(g;\rho,\cdot);t)\Big| : \ g \in H^1\Big\} =$$

$$= \frac{\pi}{4n} + \frac{2}{\pi\rho^{2n}}\int_0^{\rho}\ln\frac{1+r^{2n}}{1-r^{2n}}dr + \frac{1}{\pi}(1-\rho^2)\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho^{2n}}{1-\rho^{2n}} - \rho^{2n}\right).$$

Правые части равенств (9) и (10) в пределе при $\rho \to 1$ стремятся к $\pi/2n$, но при $\rho \to 0$ имеют разные предельные значения, а именно, соотношение (9) стремится к нулю, а (10) стремится к значению $\pi/4n$.

### Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1978.
2. Шабозов М.Ш. Наилучшее и наилучшее одностороннее приближения ядро бигармонического уравнения и оптимальное восстановление значений операторов. – Укр. мат. журнал, 1995, т.47, №11.
3. Корнейчук Н.П. О приближении свёрток периодических функций // Вопросы анализа и приближения. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1989, с.76-80.

УДК 517.927

## О решение характеристического сингулярного интегрального уравнения соответствующим краевой задаче Газемана с заданными главными частями, нагруженными свободными членами и с дополнительными условиями

Акбаров Р., Тураев К.

**(Кулябский государственный университет им. А. Рудаки)**

**1. Постановка задачи.** Пусть $L$ -простой замкнутый контур, делящий плоскость $C$ на внутреннюю область $D^+$ и внешнюю $D^-$. На $L$ рассматривается обобщенное интегральное уравнение вида [1-2]

$$a(t)\varphi\left[\alpha(t)\right] + b(t)\varphi(t) + \frac{a(t)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\alpha(t)} - \frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} = c(t) + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\theta_k(t) \qquad (1)$$

где $\alpha(t)$ функция точек контура, отображающая $L$ в самого себя с сохранением направления обхода; $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $\theta_k(t)$ – заданные функции класса $H_\mu(L)$ причем интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши. Уравнение (1) будем называть характеристическим.

$\alpha_k$ – некоторые неизвестные комплексные постоянные остающиеся произвольными, либо подлежащие определению, так же как искомая функция $\varphi(t)$. Дополнительно, требуется определить постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ так, чтобы (1) имело многообразие решений, из которых затем выбираются решения, удовлетворяющие дополнительными условиями

$$\int\limits_L h_j(t)\varphi(t)dt = q_j, \quad j = 1, 2, ..., m, \tag{2}$$

где $h_j(t)$ – задаваемые комплексные линейно независимые функции, а $q_j$– заданные комплексные постоянные. Постановку задач дополним следующим: Соответствующая задача Газемана для уравнения (1) имеет в конечном числе точки
$F = \{F_1, F_2, ...., F_n\}$ области и $D^+$ и $D^-$ изолированные особенности, в окрестности которых заданы $H_\mu(L)$ непрерывные функции $\xi^\nu(z)(v = 1, 2, ..., n)$ Обозначим через $f_+(z)$ и $f_-(z)$ сумму всех заданных главных частей искомой функции $\Phi(z)$ аналитических соответственно в $D^+\backslash F_+$ и $D^-\backslash F_-$ области. Решение уравнения (1) с дополнительными условиями (2) ищется в классе функции удовлетворяющей условию Гельдера, так чтобы для соответствующей задачи Газемана разность $\Phi^\pm(z) - f_\pm(z)$ были аналитическими функциями в $D^\pm$соответственно.

**2.** С помощью кусочно-аналитической функции, представленной интегралом типа Коши с учетом заданных главных частей

$$\Phi\left(z\right) = f\left(z\right) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi\left(\tau\right)d\tau}{\tau - z} \tag{3}$$

плотностью, которого является искомое решение уравнения (1) и аналогом формул Сахоцкого [1]

$$\left[\Phi^+\left(t\right) - f_+\left(t\right)\right] + \left[\Phi^-\left(t\right) - f_-\left(t\right)\right] = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi\left(\tau\right)d\tau}{\tau - t} = S_\varphi, \tag{4}$$

характеристическое сингулярное интегральное уравнения (х.с.и.у.) (1) приводится к задаче Газемана с заданными главными частями

$$\Phi^+\left[\alpha(t)\right] - f_+(t) = G(t)\left[\Phi^-(t) - f_-(t)\right] + q_1(t) \tag{5}$$

где $G(t) = \dfrac{b(t)}{a(t)}, \quad q_1(t) = \dfrac{c(t) + \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\theta_k(t)}{2a(t)}$ причем $G(t) \neq 0$ всюду на $L$. Индекс коэффициента $G(t)$ задачи (5) примем за индекс интегрального уравнения (1). Решив краевую задачу (5), по формуле (4) найдем решение уравнение (1). Х.с.и.у. и краевая задача (5) с учетом заданных главных частей равносильны.

Из краевого условия задачи (5) вытекает, что предельные значения суммы всех заданных главных частей, т.е

$$f(z) = \begin{cases} f_+(t), & z \in D^+ \\ f_-(t), & z \in D^- \end{cases}$$

при $q_1(t) \equiv 0$ удовлетворяют однородную задачи (5).

Для нахождения общего решения задачи (5) пользуемся решением неоднородной задачи Газемана, выраженной формулами [1]

$$\Phi^+(z) - f_+(z) = \frac{\chi^+(z)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\rho\left[\beta(\tau)d\tau\right]}{\tau - z} - \chi^-(z)f_-(z) - \chi^+\left(z\right)P_\kappa(z), z \in D^+, \tag{7}$$

$$\Phi^{-}(z)-f_{-}(z)=\frac{\chi^{-}(z)}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\rho(\tau)\,d\tau}{\tau-z}-\chi^{-}(z)\,f_{+}(z),z\in D^{-}\quad ,$$

где

$$\chi^{+}(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\sigma\left[\beta(\tau)\right]}{\tau-z}\right\},\quad z\in D^{+}\ , \tag{8}$$

$$\chi^{-}(z)=z^{\kappa}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\sigma(\tau)\,d\tau}{\tau-z}\right\},\quad z\in D^{-}$$

$\sigma(t)$–решение интегрального уравнения

$$(\mathrm{K}\sigma)(t)=Ln\left[t^{-\kappa}\frac{b(t)}{a(t)}\right],$$

$P_{\kappa}(z)$–произвольный полином степени $\kappa$
$\beta(t)-$ обратное к отображению$\alpha(t)$ т.е. $\beta\left[\alpha(t)\right]\equiv t$
$\rho(t)-$ решение интегрального уравнения

$$(k_{\rho})(t)=P_{\kappa}\left[\alpha(t)\right]+\frac{1}{\chi^{+}\left[\alpha(t)\right]}\left\{c(t)+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{k}Q_{k}(t)\right\}-$$
$$-\left\{f_{+}(t)-f_{-}\left[\alpha(t)\right]\right\}-\left\{\frac{f_{+}\left[\alpha(t)\right]}{\chi^{+}\left[\alpha(t)\right]}-\frac{f_{-}(t)}{\chi^{-}(t)}\right\} \tag{10}$$

Вычисляя предельные значение $\Phi^{\pm}(t)-f_{\pm}(t)$ из (7), подставляя в (4), при $\kappa\geq 0$ получим:

$$\varphi(t)=\left[\Phi^{+}(t)-f_{+}(t)\right]-\left[\Phi^{-}(t)-f_{-}(t)\right]=\frac{1}{2}\chi^{+}(t)\,P_{\kappa}\cdot\left[\beta(t)\right]-\frac{1}{2}\chi^{-}(t)+$$
$$+\frac{\chi^{+}(t)}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{P_{x}\left[\beta(\tau)\right]d\tau}{\tau-t}-\frac{\chi^{-}(t)}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{P_{x}(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int\limits_{L}R^{*}(t\tau)\left\{P_{\kappa}(\tau)+\frac{c(t)+\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_{k}\theta_{k}(\tau)}{\chi^{+}\left[\alpha(t)\right]}\right\}d\tau-$$
$$-\int\limits_{L}R^{*}(t\tau)\left\{f_{+}(\tau)+f_{-}\left[\alpha(\tau)\right]+\frac{f_{+}\left[\alpha(\tau)\right]}{\chi^{+}\left[\alpha(\tau)\right]}-\frac{f_{-}(\tau)}{\chi^{+}(\tau)}\right\}d\tau+\frac{\left\{c\left[\beta(t)\right]+\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_{k}\theta_{k}\left[\beta(t)\right]\right.}{2}+$$
$$+\frac{\chi^{-}(t)}{2\chi^{+}\left[\alpha(t)\right]}+\frac{\chi^{+}(t)}{2\pi i}\cdot\int\limits_{L}\frac{1}{\chi^{+}(\tau)}\left\{c\left[\beta(\tau)\right]+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{k}\theta_{k}\left[\beta(\tau)\right]\right\}\frac{d\tau}{\tau-t}-$$
$$-\frac{\chi^{-}(t)}{2\pi\, i}\int\limits_{L}\frac{1}{\chi^{+}\left[\alpha(\tau)\right]}\left\{c(\tau)+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{k}\theta_{k}(\tau)\right\}\frac{d\tau}{\tau-t}+f^{*}(t) \tag{11}$$

где $R^{*}(t)$ и $f^{*}(t)$ вполне определенные функции, который выражаются через заданные главные части, каноническая функция [1]. Если $\kappa<0$, то нужно положить $P_{\kappa}(t)\equiv 0$ и единственное решение существует тогда и только тогда, когда выполняются $\kappa+1$ условия разрешимости:

$$\alpha_0 - \int_L \left\{ f_+(\tau) - f_-[\alpha(\tau)] + \frac{f_+[\alpha(\tau)]}{\chi^+[\alpha(\tau)]} - \frac{f_-(\tau)}{\chi^+(\tau)} \right\} g_k(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_L \left\{ \frac{c(\tau)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \theta_k(\tau) \right\} g_k(\tau)\, d\tau, \quad (k = 0, 1, ..., \ |\kappa|), \quad (12)$$

где

$$g_k(\tau) = \frac{1}{\chi^+[\alpha(\tau)]} \left\{ \int_L R(\tau, t)\, \tau^k d\tau \right\}, \alpha_0 = -f(\infty).$$

Резюмируя, получим следующее утверждение:

**Теорема.** *Неоднородное характеристическое интегральное уравнение (1) соответствующее задаче Газемана с заданными главными частями (5) при* $\kappa \geqslant 0$ имеет $\kappa + 1$ *линейно-независимое решение, которое дается формулой (11). Если* $\kappa < 0$ *то единственное решение существует тогда и только тогда, когда выполняются* $\kappa + 1$*условий разрешимости (12). При их выполнений, общее решение даётся той же формулой (11), где следует положить* $P_\kappa(t) \equiv 0$.

*3. Теперь, потребуем, чтобы* $\varphi(t)$ *представленней формулой (11) удовлетворял дополнительными условиями (2). Подставляя (11) в (2) получим линейные алгебраические системы вида*

$$\sum_{k=1}^{\kappa} \alpha_{jk} c_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} \alpha_k q_j, \quad j = 1, 2, ..., m, \quad (13)$$

$\alpha_{jk}, \beta_{jk}$ *- вполне определенные функции.*

Исследование системы (13) проводится известными методами, которое здесь неприводим.

## Литература


1. Акбаров Р. Краевые задачи теории аналитических функции с заданными главными частями и им соответствующие особые интегральные уравнения. Душанбе: Дониш, 2005, 245с.
2. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: 1977. 448с.


УДК 517.5

# Значения квазипоперечников некоторых классов периодических функций двух переменных в $L_2$

Акобиршоев М.О.

**(Технологический университет Таджикистана, Душанбе)**

Рассмотрим задачу нахождения точных значений квазипоперечников для классов дифференцируемых периодических функций двух переменных в гильбертовом пространстве $L_2(Q)$, $Q = \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ с нормой

$$\|f\|_{L_2(Q)} = \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} |f(x,y)|^2 dxdy \right\}^{1/2} < \infty.$$

Напомним необходимые понятия и определения, нужные нам в дальнейшем (см. напр. [1-5]). Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ – линейные нормированные пространства функций одной переменной, а

$$U_m = span\{u_0(x), u_1(x), ..., u_m(x)\}, \quad V_n = span\{v_0(y), v_1(y), ..., v_n(y)\}$$

– их конечномерные подпространства, $U_m \subset X, V_n \subset Y$. Выражение вида

$$g_{m,n}(x,y) = \sum_{\nu=0}^{m} u_\nu(x) \cdot \psi_\nu(y) + \sum_{\mu=0}^{n} v_\mu(y) \cdot \varphi_\mu(x),$$

где $\{\varphi_\mu(x)\}_{\mu=0}^{n}$ и $\{\psi_\nu(y)\}_{\nu=0}^{m}$ –наборы произвольных функций из пространств $X$ и $Y$, назовём обобщенным полиномом, порожденным подпространствами $U_m$ и $V_n$. Указанные обобщенные полиномы образуют подпространство

$$G(U_m, V_n) \stackrel{def}{=} U_m \otimes Y + V_n \otimes X,$$

где операции «$\otimes$» и «$+$» обозначают соответсвенно операции декартова произведения и прямой суммы множеств. Обозначим

$$\mathcal{E}(f; G(U_m, V_n))_Z \stackrel{def}{=} \inf\{\|f - g_{m,n}(f)\|_Z : \ g_{m,n}(f) \in G(U_m, V_n)\}, \tag{1}$$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z \stackrel{def}{=} \sup\{\mathcal{E}(f; G(U_m, V_n))_Z : \ f \in \mathfrak{M}\}.$$

Величина (1) характеризует наилучшее приближение элемента $f \in \mathfrak{M}$ множеством $G(U_m, V_n)$, а $\mathcal{E}(\mathfrak{M}, G(U_m, V_n))_Z$ – отклонение множества $\mathfrak{M}$ от подпространства $G(U_m, V_n)$ в нормированном пространстве $(Z, \|\cdot\|_Z)$.

Для центрально-симметричного множества $\mathfrak{M} \subset Z$ величину

$$d_{m,n}(\mathfrak{M}, Z) = \inf\{\mathcal{E}(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z : \ U_m \subset X, V_n \subset Y\} \tag{2}$$

называют квазипоперечником множества $\mathfrak{M}$ по Колмогорову $[1-4]$.

Пусть $\mathscr{L}$ – линейный оператор, действующий на функцию $f \in \mathfrak{M}$, образ которого принадлежит множеству $G(U_m, V_n)$.

Положим

$$e(\mathfrak{M}, \mathscr{L})_Z = \sup\{\|f - \mathscr{L}(f)\|_Z : \ f \in \mathfrak{M}\},$$

$$e(\mathfrak{M}, G(U_m, V_n))_Z = \inf\{e(\mathfrak{M}, \mathscr{L})_Z : \ \mathscr{L}(f) \in G(U_m, V_n)\}.$$

Следуя [5], величину

$$d'_{m,n}(\mathfrak{M}, Z) = \inf\{e(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z : \ U_m \subset X, V_n \subset Y\} \tag{3}$$

назовем линейным квазипоперечником множества $\mathfrak{M}$ в пространстве $Z$. Непосредственно из приведённых определений следуют неравенства

$$e(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z \geq \mathcal{E}(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z,$$

$$d'_{m,n}(\mathfrak{M}, Z) \geq d_{m,n}(\mathfrak{M}, Z).$$

В задачах (2) и (3) наибольший интерес представляет отыскание экстремальных подпространств $U_m^0 \subset X, V_n^0 \subset Y$, для которых выполняется равенство

$$\mathcal{E}\left(\mathfrak{M}, G(U_m^0, V_n^0)\right)_Z = e\left(\mathfrak{M}, G(U_m^0, V_n^0)\right)_Z = d'_{m,n}(\mathfrak{M}, Z) = d_{m,n}(\mathfrak{M}, Z).$$

Далее всюду полагаем $X = Y = L_2[0, 2\pi]$ – пространство суммируемых с квадратом $2\pi$-периодических функций $f(x)$ на отрезке $[0, 2\pi], Z = L_2(Q)$.

В этой работе для некоторых центрально-симметричных множеств периодических функций $\mathfrak{M} \subset L_2(Q)$ вычисляются величины

$$d_{m,n}(\mathfrak{M}, L_2(Q)) = \inf\left\{\mathcal{E}\left(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n)\right)_{L_2(Q)} :\ U_m, V_n \subset L_2[0, 2\pi]\right\},$$

$$d'_{m,n}(\mathfrak{M}, L_2(Q)) = \inf\left\{e(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_{L_2(Q)} :\ U_m, V_n \subset L_2[0, 2\pi]\right\}.$$

В работе [3] доказано, что если

$$U^*_{2m-1} = span\left\{(\cos jx)_{j=0}^{m-1}, (\sin jx)_{j=1}^{m-1}\right\},\ V^*_{2n-1} = span\left\{(\cos ly)_{l=0}^{n-1}, (\sin ly)_{l=1}^{n-1}\right\}$$

– подпространства тригонометрических полиномов порядка $2m-1$ по переменной $x$ и $2n-1$ по переменной $y$, то

$$\mathcal{E}(f; G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1}))_{L_2(Q)} = \left\{\sum_{|j|\geq m}\sum_{|l|\geq n} |c_{jl}(f)|^2\right\}^{1/2}, \tag{4}$$

где

$$c_{jl}(f) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{(Q)} f(x, y)e^{-i(jx+ly)}dxdy$$

– коэффициенты Фурье формального разложения $f(x, y)$ в виде двойного ряда Фурье

$$f(x, y) \sim \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{jl}(f)e^{i(jx+ly)}. \tag{5}$$

В частности, из (4) и (5) следует, что если $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$, то

$$\mathcal{E}(f; G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1}))_{L_2(Q)} = \mathcal{E}(\varphi, U^*_{2m-1})_{L_2[0,2\pi]}\mathcal{E}(\psi, V^*_{2n-1})_{L_2[0,2\pi]}, \tag{6}$$

где

$$\mathcal{E}(g, G_{2p-1})_{L_2[0,2\pi]} = \inf\left\{\|g - T_p(g)\|_{L_2[0,2\pi]} : T_p(g) \in G_{2p-1}\right\}$$

– величина наилучшего среднеквадратического приближения функции $g(x)$ тригонометрическими полиномами $G_{2p-1} = span\left\{(\cos jx)_{j=0}^{p-1}, (\sin jx)_{j=0}^{p-1}\right\}$ порядка $2p-1$ в пространстве $L_2[0, 2\pi]$. Для произвольной функции $f(x, y) \in L_2(Q)$ определим смешанный модуль непрерывности равенством

$$\omega_{k,p}(f; t, \tau)_{L_2(Q)} = \sup\left\{\|\Delta^{k,p}_{u,v}f(x, y)\|_{L_2(Q)} :\ |u| \leq t, |v| \leq \tau\right\}, \tag{7}$$

где

$$\Delta^{k,p}_{u,v}f(x, y) = \sum_{\nu=0}^{k}\sum_{\mu=0}^{p}(-1)^{\nu+\mu}\begin{pmatrix} k \\ \nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ \mu \end{pmatrix} f(x + \nu u, y + \mu v).$$

Используя равенство Парсеваля, величину (7) можно записать в следующем виде

$$\omega^2_{k,p}(f; t, \tau)_{L_2(Q)} =$$

$$= 2^{k+p}\sup\left\{\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}|c_{jl}(f)|^2(1 - \cos ju)^k(1 - \cos lv)^p :\ |u| \leq t, |v| \leq \tau\right\}. \tag{8}$$

В частности, для функции $f_0(x,y)=\cos mx\cos ny$ из (8) имеем:

$$\omega^2_{k,p}(f_0;t,\tau)_{L_2(Q)}=2^{k+p}(1-\cos mt)^k(1-\cos n\tau)^p.$$

Понимая под $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, обозначим через $C^{(r,s)}(Q),\ r,s\in\mathbb{N}$ – множество функций $f(x,y)$, имеющих в квадрате $Q$ непрерывные частные производные $f^{(\nu,\mu)}(x,y)=\partial^{\mu+\nu}f/\partial x^\nu\partial y^\mu,\ \nu\le r,\mu\le s$, а через $L_2^{(r,s)}(Q),\ r,s\in\mathbb{N}$ – множество функций $f(x,y)\in C^{(r-1,s-1)}(Q),\ r,s\ge 1$, у которых частные производные $f^{(r,\mu)}(x,y),\ \mu=\overline{0,s-1}$, $f^{(\nu,s)}(x,y),\ \nu=\overline{0,r-1}$ существуют, кусочно-непрерывны, допускают перемену порядка дифференцирования и $f^{(r,s)}(x,y)\in L_2(Q)$. Легко проверить, что для произвольной функции $f(x,y)\in L_2^{(r,s)}(Q)$ выполняется неравенство

$$\mathcal{E}(f;G(U^*_{2m-1},V^*_{2n-1}))_{L_2(Q)}\le m^{-r}n^{-s}\mathcal{E}(f^{(r,s)};G(U^*_{2m-1},V^*_{2n-1}))_{L_2(Q)},$$

которое является точным в том смысле, что для функции

$$f_0(x,y)=\cos mx\cos ny\in L_2^{(r,s)}(Q),\ r,s\in\mathbb{N}$$

обращается в равенство. С нашей точки зрения, определённый интерес представляет изучение экстремальной характеристики

$$\mathcal{K}(\varphi;h,\eta)\stackrel{def}{=}\mathcal{K}_{m,n,r,s,k,p,q}(\varphi;h,\eta)=$$

$$=\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)}\frac{2^{(k+p)/2}\mathcal{E}(f;G(U^*_{2m-1},V^*_{2n-1}))_{L_2(Q)}}{\left(\int_0^h\int_0^\eta\omega^q_{k,p}(f^{(r,s)};t,\tau)\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}},$$

где $m,n,k,p\in\mathbb{N},\ r,s\in\mathbb{Z}_+,\ q\in\mathbb{R}_+\backslash\{0\},\ 0<h\le\pi/m,\ 0<\eta\le\pi/n,\ \varphi(t,\tau)$ – неотрицательная суммируемая на $[0,h]\times[0,\eta]$ функция, не эквивалентная нулю. Имеет место следующее общее утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть $m,n,k,p\in\mathbb{N},\ r,s\in\mathbb{Z}_+,\ 0<q\le 2,\ 0<h\le\pi/n,\ 0<\eta\le\pi/n,\ \varphi(t,\tau)$ – неотрицательная измеримая суммируемая в прямоугольнике $[0,h]\times[0,\eta]$ функция, не эквивалентная нулю. Тогда справедливы неравенства*

$$\{A_{k,p}(\varphi)\}^{-1}\le\mathcal{K}(\varphi;h,\eta)\le\Big\{\inf_{\substack{k\le\nu<\infty\\ p\le\mu<\infty}}A_{\nu,\mu}(\varphi)\Big\}^{-1},$$

*где*

$$A_{\nu,\mu}(\varphi)\stackrel{def}{=}A_{\nu,\mu}(\varphi;r,s,q,k,p)=$$

$$=\left(\nu^{rq}\mu^{sq}\int_0^h\int_0^\eta(1-\cos\nu t)^{kq/2}(1-\cos\mu\tau)^{pq/2}\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}.$$

**Следствие.** *Пусть выполняются все условия теоремы 1 и $\varphi(t,\tau)\equiv g(t)\psi(\tau)$, причём функции $g(t)$ и $\psi(\tau)$ соответственно на отрезках $[0,h]$ и $[0,\eta]$ являются неотрицательными и дифференцируемыми. Если при некоторых $r,s\in\mathbb{N}$ и любых $t\in(0,h)$ и $\tau\in(0,\eta)$ выполнены дифференциальные неравенства*

$$(rq-1)g(t)-tg'(t)\ge 0,\quad (sq-1)\psi(\tau)-\tau\psi'(\tau)\ge 0,$$

*то имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)}\frac{2^{k+p}m^r n^s\mathcal{E}(f;G(U^*_{2m-1},V^*_{2n-1}))_{L_2(Q)}}{\left(\int_0^h\int_0^\eta\omega^q_{k,p}(f^{(r,s)};t,\tau)g(t)\psi(\tau)dtd\tau\right)^{1/q}}=$$

$$=\left(\int_0^h\int_0^\eta\left(\sin\frac{mt}{2}\right)^{kq}\left(\sin\frac{n\tau}{2}\right)^{pq}g(t)\psi(\tau)dtd\tau\right)^{1/q}. \qquad (9)$$

*Существует функция $f_0\in L_2^{(r,s)}(Q)$, для которой верхняя грань в соотношении (9) достигается.*

Пусть $\Phi_j(u)$ $(j=1,2)$ – произвольные непрерывные возрастающие при $u\geq 0$ функции, причём $\Phi_j(0)=0$ $(j=1,2)$. Через $W^{(r,s)}_{k,p,q}(\Phi_{1,2})\overset{def}{=}W^{(r,s)}_q(\Phi_{1,2};\omega_{k,p};h,\eta)$ обозначим множество функций $f(x,y)\in L_2^{(r,s)}(Q)$, которые при любых $k,p,r,s\in\mathbb{N}$, $0<q\leq 2$ и произвольных $h,\eta\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяют условию

$$\int_0^h\int_0^\eta\omega^q_{k,p}(f^{(r,s)};t,\tau)dtd\tau\leq\Phi_1^q(h)\Phi_2^q(\eta).$$

Далее воспользуемся обозначением

$$(\sin t)^{\alpha q}_*\overset{def}{=}\Big\{(\sin t)^{\alpha q},\ \text{если}\ \ 0<t\leq\pi/2;\ \ 1,\ \text{если}\ \ t>\pi/2\Big\}.$$

Результат следствия, в частности при $g(t)=\psi(\tau)\equiv 1$, позволяет при выполнении некоторых ограничений относительно мажорант $\Phi_j(u)$ $(j=1,2)$ сформулировать следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Пусть при всех $\mu\in\mathbb{R}_+$, $k,p\in\mathbb{N}$, $0<u\leq\pi$, $0<q\leq 2$ функции $\Phi_j(u)$ $(j=1,2)$ удовлетворяют условиям*

$$\Phi_1^q(u)\int_0^{\mu\pi}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{kq}_*dt\leq\Phi_1^q(\mu u)\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{kq}dt,$$

$$\Phi_2^q(u)\int_0^{\mu\pi}\left(\sin\frac{\tau}{2}\right)^{pq}_*d\tau\leq\Phi_2^q(\mu u)\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{\tau}{2}\right)^{pq}dt.$$

*Тогда при любых $m,n,k,p,r,s\in\mathbb{N}$, $0<q\leq 2$ и $h,\eta\in\mathbb{R}_+$ справедливы равенства*

$$d_{2m-1,2n-1}\Big(W^{(r,s)}_{k,p,q}(\Phi_{1,2});L_2(Q)\Big)=d'_{2m-1,2n-1}\Big(W^{(r,s)}_{k,p,q}(\Phi_{1,2});L_2(Q)\Big)=$$

$$=2^{-(m+n)-2/q}\,m^{-r+1/q}\,n^{-s+1/q}\left(\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin^{kq}t\sin^{pq}\tau dtd\tau\right)^{1/q}\Phi_1\left(\frac{\pi}{m}\right)\Phi_2\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

## Литература


1. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О точных значениях квазипоперечников некоторых функциональных классов // Укр. мат. журнал, 1996, т.48, №3, с.301-308.
2. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. Квазипоперечники и оптимизация методов смешанной аппроксимации многомерных сингулярных интегралов с ядрами типа Гильберта // Укр. мат. журн., 1996, т.48, №6, с.753-770.

3. Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. Квазипоперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных // ДАН России, 2005, т.404, №4, с.460-464.
4. Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. О точных значениях квазипоперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных // Укр. мат. журнал, 2009, т.61, №6, с.855-864.
5. Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. Точные значения квазипоперечников некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных //Analysis Mathematica, 2009, т.35, с. 61-72.

УДК 517.5

## Наилучшее среднеквадратическое приближение целыми функциями экспоненциального типа и точные значения средних $\nu$-поперечников некоторых классов функций на прямой

Вакарчук С.Б.

**(Днепропетровский университет имени Альфреда Нобеля)**

**1.** Начало исследованиям, связанным с аппроксимацией функций, заданных на всей вещественной оси, было положено в работах С.Н.Бернштейна. Средством приближения при этом служило подпространство целых функций конечного экспоненциального типа. В дальнейшем исследования в указанном направлении были продолжены в работах Н.И.Ахиезера, С.М.Никольского, А.Ф.Тимана, В.Ю.Попова, А.И.Степанца и других.

Несомненный интерес, с нашей точки зрения, представляет тот факт, что многие окончательные в том или ином смысле результаты, полученные в случае полиномиальной аппроксимации $2\pi$-периодических функций, нашли свое отражение и в случае приближения целыми функциями конечного экспоненциального типа на всей вещественной оси. Сравнительный анализ таких результатов, связанных с решением экстремальных задач теории аппроксимации функций, можно найти, например, в работах [1] - [2].

Данное сообщение посвящено распространению некоторых результатов из работы [3] на случай аппроксимации в среднем целыми функциями конечного экспоненциального типа на прямой $\mathbb{R} := \{x : -\infty < x < \infty\}$. Напомним необходимые понятия и определения. Пусть $L_2(\mathbb{R})$ — пространство всех вещественных измеримых на $\mathbb{R}$ функций $f$, квадрат модуля которых интегрируем по Лебегу на любом конечном промежутке, а норма $\|f\| := \|f\|_{L_2(\mathbb{R})} = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx\right\}^{1/2} < \infty$. Под $L_2^r(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, понимаем класс функций $f \in L_2(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ $(f^{(0)} \equiv f)$ локально абсолютно непрерывны, а производные $r$-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R})$. Символом $\mathbb{B}_{\sigma,2}$, $0 < \sigma < \infty$, обозначим сужение на $\mathbb{R}$ множества всех целых функций экспоненциального типа $\sigma$, принадлежащих пространству $L_2(\mathbb{R})$. Величину $\mathcal{A}_\sigma(f) := \inf\{\|f-g\| : g \in \mathbb{B}_{\sigma,2}\}$, где $f \in L_2(\mathbb{R})$, $0 < \sigma < \infty$, называют наилучшим приближением функции $f$ элементами подпространства $\mathbb{B}_{\sigma,2}$ в метрике пространства $L_2(\mathbb{R})$. Для класса $\mathfrak{M} \subset L_2(\mathbb{R})$ полагаем $\mathcal{A}_\sigma(\mathfrak{M}) := \sup\{\mathcal{A}_\sigma(f) : f \in \mathfrak{M}\}$.

При решении некоторых задач теории аппроксимации функций действительного переменного часто используют различные модификации классического определения модуля непрерывности, когда вместо оператора сдвига $T_h f(x) := f(x+h)$ применяют различные усредняющие операторы. Один из таких подходов основан на использовании функции Стеклова $S_h$, где $h > 0$ [4]. Для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ запишем функцию Стеклова $S_h(f,x) := \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(\tau)d\tau$, полагая при этом $S_{h,j}(f) := S_h(S_{h,j-1}(f))$, где $j \in \mathbb{N}$ и $S_{h,0}(f) \equiv f$.

Обозначив через $\mathbb{I}$ единичный оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, определим специальные конечные разности первого и высших порядков в точке $x$ с шагом $h$: $\widetilde{\Delta}_h^1(f,x) := S_h(f,x) - f(x) = (S_h - \mathbb{I})(f,x)$; $\widetilde{\Delta}_h^k(f,x) := \widetilde{\Delta}_h^1(\widetilde{\Delta}_h^{k-1}(f),x) = (S_h - \mathbb{I})^k(f,x) = \sum\limits_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}S_{h,j}(f,x)$, где $k = 2,3,\ldots$. Используя указанные обозначения, рассмотрим специальный модуль непрерывности $k$-го порядка для функции $f \in L_2(\mathbb{R})$

$$\widetilde{\Omega}_k(f,t) := \sup\left\{\left\|\widetilde{\Delta}_h^k(f)\right\| : 0 < h \leqslant t\right\}. \tag{1}$$

Обозначая через $\mathcal{F}(f)$ преобразование Фурье функции $f \in L_2(\mathbb{R})$, для $\widetilde{\Omega}_k(f)$ имеем

$$\widetilde{\Omega}_k(f,t) = \sup\left\{2\int_0^\infty |\mathcal{F}(f,\tau)|^2(1-\mathrm{sinc}(h\tau))^{2k}d\tau : 0 < h \leqslant t\right\}^{1/2}, \tag{2}$$

где $\mathrm{sinc}(x) := \{\sin(x)/x$, если $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $1$, если $x = 0\}$.

**2.** В работе [5] для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ рассматривалась следующая характеристика гладкости:

$$\Omega_m(f,t) := \left\{\frac{1}{t^m}\int_0^t \ldots \int_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m(f)\|^2 dh_1 \ldots dh_m\right\}^{1/2}, \tag{3}$$

где $m \in \mathbb{N}; 0 < t < \infty; \overline{h} := (h_1,\ldots,h_m); \Delta_{\overline{h}}^m := \Delta_{h_1}^1 \circ \ldots \circ \Delta_{h_m}^1; \Delta_{h_j}^1(f,t) := f(t+h_j) - f(t), j = \overline{1,m}$, для которой справедливо представление

$$\Omega_m(f,t) = 2^{(m+1)/2}\left\{\int_0^\infty |\mathcal{F}(f,\tau)|^2(1-\mathrm{sinc}(t\tau))^m d\tau\right\}^{1/2}. \tag{4}$$

Из формул (2) и (4) при $m := 2k$ получаем следующее соотношение между характеристиками гладкости (1) и (3) для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$:

$$\Omega_{2k}(f,t) = 2^k\|\widetilde{\Delta}_t^k(f)\| \leqslant 2^k\widetilde{\Omega}_k(f,t). \tag{5}$$

Известно, что если функция $f$ и ее производная первого порядка $f^{(1)}$ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$ и $f$ является локально абсолютно непрерывной, то преобразование Фурье функции $f^{(1)}$ выражается через преобразование Фурье функции $f$ по формуле $\mathcal{F}(f^{(1)},x) = ix\mathcal{F}(f,x)$. В случае, когда функция $f \in L_2^r(\mathbb{R})$, где $r \in \mathbb{N}$ и $r \geqslant 2$, согласно [6] (см. теорему 3 из §4 главы V) все ее промежуточные производные $f^{(r-\nu)}$, $\nu \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant \nu \leqslant r-1$, также будут функциями локально абсолютно непрерывными и принадлежащими пространству $L_2(\mathbb{R})$. При этом

$$\mathcal{F}(f^{(r-\mu)},x) = (ix)^{(r-\mu)}\mathcal{F}(f,x), \tag{6}$$

где $\mu = 0,\ldots,r-1$. В связи с указанным определенный интерес представляет изучение на классе $L_2^r(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$ и $r \geqslant 2$, не только поведения $\mathcal{A}_\sigma(f)$, но и поведения величин $\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\nu)})$ — наилучших приближений подпространством $\mathbb{B}_{\sigma,2}$ промежуточных производных $f^{(r-\nu)}$, где $\nu \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant \nu \leqslant r-1$.

**Теорема 1.** Пусть $0 < \sigma < \infty$; $k \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $\mu = 0,\ldots,r$. Тогда для произвольного числа $0 < t \leqslant 3\pi/4$ справедливо равенство

$$\sup\left\{\sigma^\mu\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})/\widetilde{\Omega}_k(f^{(r)},t/\sigma) : f \in L_2^r(\mathbb{R})\right\} = (1-\mathrm{sinc}(t))^{-k}, \tag{7}$$

где $L_2^0(\mathbb{R}) \equiv L_2(\mathbb{R})$; при $r = 0$ верхняя грань в соотношении (7) вычисляется по всем функциям $f \in L_2(\mathbb{R})$, которые не эквивалентны нулю.

**Доказательство.** Из теоремы 1, полученной автором в работе [5], следует, что для произвольной функции $f \in L_2^r(\mathbb{R})$ имеет место неравенство

$$\mathcal{A}_\sigma(f) \leqslant \{2(1-\operatorname{sinc}(t))\}^{-m/2} \cdot \sigma^{-r}\Omega_m(f^{(r)}, t/\sigma),$$

где $m \in \mathbb{N}$ и $0 < t \leqslant 3\pi/4$. Полагая $m := 2k$ и используя неравенство (5), отсюда получаем

$$\mathcal{A}_\sigma(f) \leqslant (1-\operatorname{sinc}(t))^{-k} \cdot \sigma^{-r}\widetilde{\Omega}_k(f^{(r)}, t/\sigma). \tag{8}$$

В случае $r = 0$ из формулы (8) имеем

$$\mathcal{A}_\sigma(f) \leqslant (1-\operatorname{sinc}(t))^{-k}\widetilde{\Omega}_k(f, t/\sigma).$$

Заменяя в данном неравенстве функцию $f \in L_2^r(\mathbb{R}), r \in \mathbb{N}$, ее производной $r$-го порядка $f^{(r)} \in L_2(\mathbb{R})$, запишем

$$\mathcal{A}_\sigma(f^{(r)}) \leqslant (1-\operatorname{sinc}(t))^{-k}\widetilde{\Omega}_k(f^{(r)}, t/\sigma). \tag{9}$$

Далее воспользуемся неравенством [7]

$$\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)}) \leqslant \mathcal{A}_\sigma^{1-\mu/r}(f^{(r)})\mathcal{A}_\sigma^{\mu/r}(f). \tag{10}$$

Подставляя в правую часть соотношения (10) вместо $\mathcal{A}_\sigma(f^{(r)})$ и $\mathcal{A}_\sigma(f)$ соответствующие оценки сверху этих величин, полученные в неравенствах (8) и (9) соответственно, имеем

$$\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)}) \leqslant (1-\operatorname{sinc}(t))^{-k} \cdot \sigma^{-\mu}\widetilde{\Omega}_k(f^{(r)}, t/\sigma).$$

Отсюда следует оценка сверху

$$\sup\left\{\sigma^\mu\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})/\widetilde{\Omega}_k(f^{(r)}, t/\sigma) : f \in L_2^r(\mathbb{R})\right\} \leqslant (1-\operatorname{sinc}(t))^{-k}. \tag{11}$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики, записанной в левой части неравенства (11), рассмотрим, как и в работах [1], [5], [7], целую функцию $q_\varepsilon(x) := \sqrt{2/\pi}\Big(\lambda_{\sigma+\varepsilon}(x) - \lambda_\sigma(x)\Big)$ экспоненциального типа $\sigma+\varepsilon$, где $0 < \varepsilon < \sigma_* := \min(\sigma, 1)$ — произвольное число. Здесь $\lambda_a(x) := \Big\{a\operatorname{sinc}(ax)$, если $x \neq 0$; $a$, если $x = 0\Big\}$, $a > 0$. Для функции $q_\varepsilon$ получаем

$$\mathcal{F}(q_\varepsilon, x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma < |x| < \sigma+\varepsilon; \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если } |x| = \sigma+\varepsilon \text{ или } |x| = \sigma; \\ 0, & \text{если } |x| > \sigma+\varepsilon \text{ или } |x| < \sigma. \end{cases} \tag{12}$$

В силу формулы Парсеваля-順 順

Обозначим через $t_*$ величину аргумента функции $\operatorname{sinc}(t)$, при котором она достигает на интервале $(0,\infty)$ своего наименьшего значения. Очевидно, что $t_*$ является наименьшим положительным корнем уравнения $t = \operatorname{tg}(t)$ $\quad (4,49 < t_* < 4,51)$. При этом функция $\operatorname{sinc}(t)$ монотонно убывает на интервале $(0,t_*)$. Пусть $t \in (0,t_*)$ — произвольное число. Полагая

$$(t_*/t-1)_{[0]} := \min\{t_*/t-1;1\}, \tag{14}$$

обозначим $\widetilde{\sigma}(t) := \sigma_*\,(t_*/t-1)_{[0]}$. Выбирая произвольным образом $\varepsilon$ из интервала $(0,\widetilde{\sigma}(t))$ и используя определения величин $\sigma_* := \min(\sigma,1)$ и (14), получаем

$$t\,(1+\varepsilon/\sigma) < t\,(1+\widetilde{\sigma}(t)/\sigma) = t\left(1+\sigma_*\,(t_*/t-1)_{[0]}\,/\sigma\right) \leqslant t_*. \tag{15}$$

Используя формулы (2) и (12), а также учитывая поведение функции $\operatorname{sinc}(t)$ на интервале $(0,t_*)$ и соотношение (15), запишем

$$\widetilde{\Omega}_k(q_\varepsilon^{(r)},t/\sigma) = \sup\left\{2\int_\sigma^{\sigma+\varepsilon}\tau^{2r}\left(1-\operatorname{sinc}(h\tau)\right)^{2k}d\tau : 0<h\leqslant t/\sigma\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2\varepsilon}(\sigma+\varepsilon)^r\left(1-\operatorname{sinc}(t(1+\varepsilon/\sigma))\right)^k. \tag{16}$$

Полагаем

$$\Xi_{r,k,t}\,(\varepsilon/\sigma) := (1+\varepsilon/\sigma)^r\left(1-\operatorname{sinc}(t(1+\varepsilon/\sigma))\right)^k. \tag{17}$$

Рассматривая величину (17), как функцию от $\varepsilon \in (0,\widetilde{\sigma}(t))$ при фиксированных значениях параметров $r,k,t$ и $\sigma$, нетрудно убедиться в том, что она является монотонно возрастающей. При этом $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0}\Xi_{r,k,t}\,(\varepsilon/\sigma) = \Xi_{r,k,t}(0)$. Используя формулы (13) и (16)-(17), запишем $\sigma^\mu\mathcal{A}_\sigma(q_\varepsilon^{(r-\mu)})/$
$\widetilde{\Omega}_k(q_\varepsilon^{(r)},t/\sigma) \geqslant 1/\Xi_{r,k,t}(\varepsilon/\sigma)$. Поскольку $q_\varepsilon \in L_2^r(\mathbb{R})$, то отсюда имеем

$$\sup\left\{\sigma^\mu\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})/\widetilde{\Omega}_k(f^{(r)},t/\sigma) : f\in L_2^r(\mathbb{R})\right\} \geqslant \left\{\Xi_{r,k,t}(\varepsilon/\sigma)\right\}^{-1}. \tag{18}$$

Левая часть неравенства (18) не зависит от $\varepsilon \in (0,\widetilde{\sigma}(t))$. Вычисляя верхнюю грань по $\varepsilon$ от его правой части, получаем

$$\sup\left\{\sigma^\mu\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})/\widetilde{\Omega}_k(f^{(r)},t/\sigma) : f\in L_2^r(\mathbb{R})\right\} \geqslant \left\{\Xi_{r,k,t}(0)\right\}^{-1} = \left(1-\operatorname{sinc}(t)\right)^{-k}.$$

Сопоставляя данное неравенство с оценкой сверху (11) его левой части, получаем требуемое соотношение (7). Теорема 1 доказана.

**3.** Непрерывную неубывающую на полусегменте $[0,\infty)$ функцию $\Phi$ такую, что $\Phi(0) = 0$, назовем мажорантой. Символом $\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi)$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $k\in\mathbb{N}$, обозначим класс функций $f\in L_2^r(\mathbb{R})$, для каждой из которых при любом $t\in(0,\infty)$ справедливо неравенство $\widetilde{\Omega}_k(f^{(r)},t) \leqslant \Phi(t)$. Полагаем $(1-\operatorname{sinc}(t))_* := \{1-\operatorname{sinc}(t)$, если $0\leqslant t\leqslant t_*$; $1-\operatorname{sinc}(t_*)$, если $t\geqslant t_*\}$.

**Теорема 2.** Пусть мажоранта $\Phi$ для любого $\sigma > \nu\pi$, где $\nu$ — произвольное фиксированное положительное число, удовлетворяет условию

$$\Phi(t)/\Phi(\pi/(2\sigma)) \geqslant \pi^k(\pi-2)^{-k}\left(1-\operatorname{sinc}(\sigma t)\right)_*^k. \tag{19}$$

Тогда имеют место равенства

$$\overline{\Pi}_\nu(\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi);L_2(\mathbb{R}))=\mathcal{A}_{\nu\pi}(\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi))=\pi^{k-r}(\pi-2)^{-k}\nu^{-r}\Phi\left(1/(2\nu)\right),$$

где $\overline{\Pi}(\cdot)$ — любой из средних $\nu$-поперечников: бернштейновский $\overline{b}_\nu(\cdot)$, колмогоровский $\overline{d}_\nu(\cdot)$, линейный $\overline{\delta}_\nu(\cdot)$. При этом пара $(L_2^r(\mathbb{R}),\Lambda_{\nu\pi})$, где линейный оператор $\Lambda_{\nu\pi}$ определяется из условия $\mathcal{F}(\Lambda_{\nu\pi},\cdot)=\chi_{\nu\pi}(\cdot)\mathcal{F}(f,\cdot)$ (здесь $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$, а $\chi_{\nu\pi}(\cdot)$ — характеристическая функция множества $(-\nu\pi,\nu\pi)$), будет экстремальной для среднего линейного $\nu$-поперечника $\overline{\delta}_\nu(\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi);L_2(\mathbb{R}))$, а подпространство $\mathbb{B}_{\nu\pi,2}$ является экстремальным для среднего $\nu$-поперечника по Колмогорову $\overline{d}_\nu(\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi);L_2(\mathbb{R}))$. Множество мажорант, удовлетворяющих условию (19), не пусто.

Отметим, что для получения оценок сверху рассматриваемых экстремальных характеристик используется теорема 1, а при получении оценок снизу — рассуждения, проведенные в работе [2].

### Литература


1. Vakarchuk S.B. On some extremal problems of approximation theory of functions on the real axis. I // J. of Mathematical Sciences. — 2013. — **188**, N2. — P. 146 – 166.
2. Vakarchuk S.B. On some extremal problems of approximation theory of functions on the real axis. II // J. of Mathematical Sciences. — 2013. — **188**, N3. — P. 613 – 630.
3. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. О наилучшем полиномиальном приближении в пространстве $L_2$ и поперечниках некоторых классов функций // Укр. мат. журн. — 2012. — **64**, №8. — С. 1025 – 1032.
4. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения $2\pi$-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Мат. заметки. — 2004. — **76**, №6. — С. 803 – 811.
5. Vakarchuk S.B. Exact constant in an inequality of Jackson type for $L_2$-approximation on the line and exact values of mean widths of functional classes // East J. Approxim. — 2004. — **10**, №1-2. — С. 27 – 39.
6. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. — М.: Мир, 1965. — 276 с.
7. Вакарчук С.Б.,Доронин В.Г. Наилучшие среднеквадратические приближении целыми функциями конечной степени на прямой и точные значения средних поперечников функциональных классов // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, №8. — С. 1032 – 1043.


УДК 517.5

## Оценка погрешности приближения функций из класса $L^2_\infty$

Вакарчук С.Б.[†], Щитов А.Н.[‡]

**([†]Днепропетровский университет им. Альфреда Нобеля)**
**([‡]Академия таможенной службы Украины, г. Днепропетровск, Украина)**

Система функций Фабера-Шаудера возникла в 1910г. как первый пример базиса в пространстве функций, непрерывных на отрезке $[0,1]$. В работах П. Л. Ульянова, З. Чисельского, В. А. Матвеева и многих других изучались свойства рядов по данной системе функций.

Аппроксимативные свойства системы Фабера-Шаудера исследовали, например, З. Чисельский [1], В. А. Матвеев [2], А. С. Логинов [3]. В их работах были получены оценки сверху погрешностей приближения непрерывных на $[0,1]$ функций $f$ частными суммами рядов Фабера-Шаудера $\overline{S}_n(f)$ в равномерной метрике, выраженные через модули непрерывности первого и второго порядков. Точные оценки погрешностей приближения частными суммами рядов Фабера-Шаудера на некоторых классах дифференцируемых функций, заданных модулем непрерывности, в равномерной и интегральной метриках были получены в работах С. Б. Вакарчука и А. Н. Щитова [4]-[5].

Данное сообщение продолжает исследования [4]-[5] и посвящено получению неулучшаемой оценке погрешности приближения функций $f \in L^2_\infty$ частными суммами их рядов Фабера-Шаудера, выраженную через норму второй производной $\|f^{(2)}\|_{L_\infty}$.

Рассмотрим множество $L^2_\infty$ определенных на отрезке $[0,1]$ функций $f$, у которых производные первого порядка $f^{(1)}$ абсолютно непрерывны на $[0,1]$, а производные второго порядка $f^{(2)}$ принадлежат пространству $L_\infty$ измеримых и существенно ограниченных на $[0,1]$ функций $f$ с нормой

$$\|f\|_{L_\infty} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\mathrm{vrai}\ |f(x)|\ .$$

На отрезке $[0,1]$ введем двоичные интервалы: $\delta_m^k = \big((k-1)/2^m, k/2^m\big)$ $(m\in\mathbb{Z}_+,\ k=\overline{1,2^m})$. Система функций Хаара определяется на отрезке $[0,1]$ следующим образом: $\chi_1(x)\equiv\chi_0^{(0)}(x)\equiv \equiv 1$, а для любого $n=2^m+k$ $(m\in\mathbb{Z}_+, k=\overline{1,2^m})$

$$\chi_n(x)\equiv\chi_m^{(k)}(x)=\begin{cases} 2^{m/2} & \text{, если } x\in\delta_{m+1}^{2k-1},\\ -2^{m/2} & \text{, если } x\in\delta_{m+1}^{2k},\\ 0 & \text{, если } x\,\overline{\in}\,\overline{\delta_m^k},\end{cases}$$

где $\overline{\mathcal{M}}$ — замыкание множества $\mathcal{M}$. В точках разрыва функции Хаара равны полусумме пределов справа и слева. На концах отрезка $[0,1]$ они равны своим предельным значениям изнутри отрезка.

Используя систему функций Хаара, в 1910 г. Фабер [6] ввел в рассмотрение систему функций $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, где $\psi_0(x)\equiv 1;\ \psi_n(x)=\int_0^x\chi_n(t)\mathrm{d}t$ $(n\in\mathbb{N}; 0\leqslant x\leqslant 1)$ . В [6] было показано, что произвольную функцию $f\in C$ можно представить в виде равномерно сходящегося на отрезке $[0,1]$ ряда

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(f)\psi_k(x)\ , \qquad (1)$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$a_0(f)\stackrel{\mathrm{df}}{=}f(0),\qquad a_k(f)\stackrel{\mathrm{df}}{=}\int_0^1\chi_k(x)\mathrm{d}f(x)\qquad (k\in\mathbb{N})\ . \qquad (2)$$

Присутствующий в (2) интеграл понимают в смысле Лебега-Стилтьеса. Через $\overline{S}_n(f,x)\stackrel{\mathrm{df}}{=}\sum_{k=0}^{n}a_k(f)\psi_k(x)$ $(n\in\mathbb{N})$ обозначим частную сумму $n$-го порядка $(n\in\mathbb{N})$ разложения (1). Известно, что функция $\overline{S}_n(f)$ является ломаной, которая линейна на отрезках $\overline{\delta_{m+1}^i}$ $(i=\overline{1,2k})$ и $\overline{\delta_m^j}$ $(j=\overline{k+1,2^m})$, и интерполирует функцию $f$ в точках множества $\mathcal{D}_n$ (см., напр., [5]), где $\mathcal{D}_1\stackrel{\mathrm{df}}{=}\{0\}\cup\{1\}$, $\quad\mathcal{D}_n\stackrel{\mathrm{df}}{=}\left\{\frac{j}{2^m}\right\}_{j=0}^{2^m}\bigcup\left\{\frac{2j-1}{2^{m+1}}\right\}_{j=1}^{k}$ $(n=2,3,\ldots)$.

Введем следующие обозначения: $h\stackrel{\mathrm{df}}{=}2^{-(m+1)}$,

$$n'\stackrel{\mathrm{df}}{=}\begin{cases}2^m & \text{, если } n=2^m+k\ \big(m\in\mathbb{N}; k=\overline{1,2^m-1}\big),\\ 2^{m+1} & \text{, если } n=2^{m+1}\ (m\in\mathbb{Z}_+).\end{cases}$$

Имеет место следующая

**Теорема.** Для произвольной функции $f \in L^2_\infty$ и любого числа $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ выполняется неравенство

$$\left\|f - \overline{S}_n(f)\right\|_{L_\infty} \leqslant \frac{1}{8(n')^2}\left\|f^{(2)}\right\|_{L_\infty} , \tag{3}$$

которое для любого числа $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ является неулучшаемым в том смысле, что существует функция $f \not\equiv \text{const}$ из класса $L^2_\infty$, для которой неравенство (3) превращается в равенство.

**Доказательство теоремы.** Для функции $f \in L^2_\infty$ имеет место формула Тейлора с остатком в интегральной форме

$$f(x) = f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \int_a^x (x-\upsilon) f^{(2)}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon \ . \tag{4}$$

Пусть $x \in \overline{\delta^i_{m+1}}$ $(i = \overline{1, 2k})$. Полагая $u \overset{\text{df}}{=} \big(x - (i-1)h\big)/h$ и используя представление

$$\overline{S}_n(f, x) = f\big((i-1)h\big) + \frac{1}{h}\big(x - (i-1)h\big)\left(f(ih) - f((i-1)h)\right) ,$$

где $(i-1)h \leqslant x \leqslant ih$ $(i = \overline{1, 2k})$, запишем

$$\left|f(x) - \overline{S}_n(f, x)\right| = \left|f(x) - (1-u) f\big((i-1)h\big) - u f(ih)\right| . \tag{5}$$

Применяя формулу Тейлора (4), для любого $x \in \overline{\delta^i_{m+1}}$ имеем

$$f\big((i-1)h\big) = f(x) - hu\, f^{(1)}(x) + \int_x^{(i-1)h} \big((i-1)h - \upsilon\big) f^{(2)}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon \ , \tag{6}$$

$$f(ih) = f(x) + (1-u)h\, f^{(1)}(x) + \int_x^{ih} \big(ih - \upsilon\big) f^{(2)}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon \ . \tag{7}$$

Подставляя правые части равенств (6)–(7) в формулу (5), получаем

$$\left|f(x) - \overline{S}_n(f, x)\right| =$$

$$= \left|(1-u)\int_x^{(i-1)h} \big((i-1)h - \upsilon\big) f^{(2)}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon + u\int_x^{ih} \big(ih - \upsilon\big) f^{(2)}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\right|. \tag{8}$$

Применяя к интегралам, записанным в правой части равенства (8), неравенство Гельдера, запишем

$$\left|f(x) - \overline{S}_n(f, x)\right| \leqslant \frac{1}{2}u(1-u)h^2\left\|f^{(2)}\right\|_{L_\infty} \leqslant \frac{1}{8}h^2\left\|f^{(2)}\right\|_{L_\infty} , \tag{9}$$

где $x \in \overline{\delta^i_{m+1}}$ $(i = \overline{1, 2k})$. С помощью рассуждений, аналогичных проведенным в (5)–(7), для любого $x \in \overline{\delta^j_m}$ $(j = \overline{k+1, 2^m})$ имеем

$$\left|f(x) - \overline{S}_n(f, x)\right| \leqslant \frac{1}{8}(2h)^2\left\|f^{(2)}\right\|_{L_\infty} . \tag{10}$$

Поскольку частная сумма $\overline{S}_n(f)$ ряда Фабера-Шаудера функции $f$ линейна на отрезках вида $\overline{\delta^i_{m+1}}$ $(i = \overline{1, 2k})$ и $\overline{\delta^j_m}$ $(j = \overline{k+1, 2^m})$, то в силу соотношений (9)–(10) получаем оценку сверху

$$\left\|f - \overline{S}_n(f)\right\|_{L_\infty} = \max\Big\{ \max_{\substack{x \in \overline{\delta^i_{m+1}} \\ (i=\overline{1,2k})}} \left|f(x) - \overline{S}_n(f, x)\right|, \max_{\substack{x \in \overline{\delta^j_m} \\ (j=\overline{k+1,2^m})}} \left|f(x) - \overline{S}_n(f, x)\right|\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{8(n')^2} \left\| f^{(2)} \right\|_{L_\infty} . \tag{11}$$

Пусть $n = 2^{m+1}$ $(m \in \mathbb{Z}_+)$. Тогда полагаем

$$\widehat{f_1}(x) \overset{\text{df}}{=} \begin{cases} \dfrac{h^2}{4} - \Big(x - \dfrac{h}{2}\Big)^2, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant h, \\ \Big(x - \dfrac{3}{2}h\Big)^2 - \dfrac{h^2}{4}, & \text{если } h \leqslant x \leqslant 2h. \end{cases} \tag{12}$$

Через $\widehat{F_1}$ обозначим $2h$-периодическое продолжение функции $\widehat{f_1}$ на отрезок $[0,1]$. Очевидно, что $\widehat{F_1} \in L^2_\infty$. Поскольку $\widehat{F_1}(ih) = 0$ $(i = \overline{1, 2^{m+1}})$, то $\overline{S}_n(\widehat{F_1}) \equiv 0$. Используя формулу (12), получаем

$$\left\| \widehat{F_1} - \overline{S}_n(\widehat{F_1}) \right\|_{L_\infty} = \left\| \widehat{F_1} \right\|_{L_\infty} = \frac{h^2}{4} .$$

Учитывая, что $\left\| \widehat{F_1}^{(2)} \right\|_{L_\infty} = 2$, на основании определения величины $n'$ отсюда имеем

$$\left\| \widehat{F_1} - \overline{S}_n(\widehat{F_1}) \right\|_{L_\infty} = \frac{1}{8(n')^2} \left\| \widehat{F_1}^{(2)} \right\|_{L_\infty} . \tag{13}$$

Пусть теперь $n = 2^m + k$, где $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N} \cap [1, 2^m - 1]$. Полагаем

$$\widehat{f_2}(x) \overset{\text{df}}{=} h^2 - (x-h)^2 \tag{14}$$

и

$$\widehat{f_3}(x) \overset{\text{df}}{=} -\widehat{f_2}(x) = (x-h)^2 - h^2 , \tag{15}$$

если $0 \leqslant x \leqslant 2h$. В данном случае под $\widehat{F_1} \in L^2_\infty$ понимаем следующую функцию:

$$\widehat{F_1}(x) \overset{\text{df}}{=} \begin{cases} \widehat{f_1}(x - 2ih), & \text{если } 2ih \leqslant x \leqslant 2(i+1)h \ (i = \overline{0, k-1}), \\ \widehat{f_{\zeta(j)}}\big(x - 2(k+j)h\big) , & \text{если } 2(k+j)h \leqslant x \leqslant 2(k+1+j)h \\ & \quad (j = \overline{0, 2^m - k - 1}) , \end{cases} \tag{16}$$

где функция $\zeta$ целочисленного аргумента $j$ определена следующим образом:

$$\zeta(j) \overset{\text{df}}{=} \big\{2, \text{ если } j = 2k; \ 3, \text{ если } j = 2k+1\big\} , \quad k \in Z_+.$$

Из формул (14)–(16) получаем $\widehat{F_1}(ih) = 0$ $(i = \overline{1, 2k})$ и $\widehat{F_1}(2jh) = 0$ $(j = \overline{k+1, 2^m})$. Следовательно $\overline{S}_n(\widehat{F_1}) \equiv 0$. Поскольку $\left\| \widehat{F_1}^{(2)} \right\|_{L_\infty} = 2$ и $\left\| \widehat{F_1} - \overline{S}(\widehat{F_1}) \right\|_{L_\infty} = \left\| \widehat{F_1} \right\|_{L_\infty} = h^2$ , то с учетом определения величин $h$ и $n'$ из данного равенства получаем

$$\left\| \widehat{F_1} - \overline{S}_n(\widehat{F_1}) \right\|_{L_\infty} = \frac{1}{8(n')^2} \left\| \widehat{F_1}^{(2)} \right\|_{L_\infty} . \tag{17}$$

Из соотношений (11), (13) и (17) следует, что неравенство (3) является неулучшаемым для любого числа $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$. Теорема доказана.

### Литература


1. Z. Ciesielski, “Properies of the orthonormal Franclin system”, Studia math., **23** (1963), 141–157.
2. В. А. Матвеев, “О рядах по системе Шаудера”, Матем. заметки, **2**:3 (1967), 267–278.

3. А. С. Логинов, “Приближение непрерывных функций ломаными”, Матем. заметки, **6**:2 (1969), 149–160.
4. С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов, “Некоторые вопросы приближения частными суммами рядов Фабера-Шаудера в метрике пространства $\varphi(L)$”, Изв. вузов. Матем., 10 (2004), 82–85.
5. С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов, “Оценки погрешности приближения классов дифференцируемых функций частными суммами рядов Фабера-Шаудера”, Матем. сборник, **197**:3 (2006), 3–14.
6. G. Faber, “Über die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar”, Jahresber. Deutsch. Math. Verein, **19** (1910), 104–112.

УДК 517.4

## О свойствах одного оператора

Джабборов А.А., Шодиева Р.Р., Рахимова М.А.

**(Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики, Худжанд)**

В пространстве $C_{2\pi}$ рассмотрим оператор $T$, определенный по следующей формуле

$$Tf = -\sum_{k\neq 0} |k|^{-2} f_k{}^{i(k,z)} \quad , \tag{1}$$

где $f_k$ – коэффициенты Фурье функции $f(z)$, т.е.

$$f_k = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_K f(z) e^{-i(k,z)} dxdy, \tag{2}$$

$k = k_1 + ik_2, (k, z) = k_1x + k_2y; k_1, k_2-$целые числа, $K = \{(x, y) : 0 < x < 2\pi,\ 0 < y < 2\pi\}$ Область$K$ будем называть квадратом периодов. В равенстве (1) суммирование ведется по таким $k_1$ и $k_2$ которые одновременно не обращаются в нуль.

Ряд, стоящий справа в формуле (1) сходится в $L_2(K)$ к некоторой функции $g(z)$.

Приведем основные свойства оператора $T$.

**Свойство 1.** *Оператор $T$ с областью определения $C_{2\pi} \subset L_2(K)$ является ограниченным оператором и справедлива следующая оценка*

$$\|Tf\|_{L_2(K)} \leqslant 2 \cdot \|f\|_{L_2(K)} . \tag{3}$$

Доказательство. Имеем

$$\|g\|^2_{L_2(K)} = \iint\limits_K |g(z)|^2 dxdy = \iint\limits_K \left| \sum_{k\neq 0} \frac{f_k}{|k|^2} e^{i(k,z)} \right|^2 dxdy \leq \iint\limits_K \left| \sum_{k\neq 0} f_k e^{i(k,z)} \right|^2 dxdy =$$

$$= \iint\limits_K |f(z) - f_0|^2 \, dxdy \leq 2 \left[ \iint\limits_K |f(z)|^2 \, dxdy + \iint\limits_K |f_0|^2 \, dxdy \right].$$

Так как по неравенству Коши-Буняковского

$$|f_0| \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_K |f(z)| \, dxdy \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \left( \iint\limits_K |f(z)|^2 \, dxdy \right)^{1/2} \left( \iint\limits_K 1 \cdot dxdy \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L_2(K)} ,$$

то

$$\|g\|^2_{L_2(K)} \leqslant 2\left(\|f\|^2_{L_2(K)} + \|f\|^2_{L_2(K)}\right) = 4\|f\|^2_{L_2(K)}$$

Итак

$$\|g\|_{L_2(K)} \leqslant 2 \cdot \|f\|_{L_2(K)}. \tag{4}$$

Отсюда следует, что оператор $T$ является ограниченным и справедлива оценка (3).

**Свойство 2.** *Функция $g$ имеет обобщенные производные по $\bar{z}$, $z$ и эти производные вычисляются по формулам:*

$$g_{\bar{z}} = -\frac{i}{2}\sum_{k\neq 0}\frac{f_k}{\overline{k}}e^{i(k,z)}, \tag{5}$$

$$g_z = -\frac{i}{2}\sum_{k\neq 0}\frac{f_k}{k}e^{i(k,z)}. \tag{6}$$

Аналогично оценке (4) можно установить следующие оценки:

$$\|g_{\bar{z}}\|_{L_2(K)} \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_{L_2(K)} \tag{7}$$

$$\|g_z\|_{L_2(K)} \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_{L_2(K)} \tag{8}$$

**Свойство 3.** *Оператор $T$ переводит функцию $f \in C_{2\pi}$ в функцию $g(z)$, которая является на всей плоскости обобщенным решением уравнения*

$$\text{Д}U = f - f_0. \tag{9}$$

**Доказательство.** Покажем, что для любой функции $\varphi(z) \in C_0^\infty$ справедливо равенство

$$\iint\limits_C g\Delta\varphi dxdy = \iint\limits_C (f - f_0)\varphi dxdy \tag{10}$$

Так как

$$e^{i(k,z)} = e^{i(k_1x + k_2y)}$$

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2},\ \ y = \frac{z-\bar{z}}{2i},\ \ k_1 = \frac{k+\overline{k}}{2},\ \ k_2 = \frac{k-\overline{k}}{2i}$$

то

$$e^{i(k,z)} = e^{\frac{i}{2}(k\bar{z}+\bar{k}z)}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}e^{i(k,z)} = e^{\frac{i}{2}(k\bar{z}+\bar{k}z)}\cdot\frac{i}{2}k = \frac{ik}{2}e^{i(k,z)},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}e^{i(k,z)} = \frac{i\bar{k}}{2}e^{i(k,z)},$$

Поэтому

$$\Delta(e^{i(k,z)}) = 4\frac{\partial^2(e^{i(k,z)})}{\partial z\partial\bar{z}} = 4\frac{i\bar{k}}{2}\frac{ik}{2}e^{i(k,z)} = -\overline{k}ke^{i(k,z)} = -|k|^2e^{i(k,z)}.$$

Итак

$$\Delta(e^{i(k,z)}) = -|k|^2\cdot e^{i(k,z)}. \tag{11}$$

Рассмотрим функции

$$h_n(z) = -\sum_{0<|k|\leqslant n}|k|^{-2}f_ke^{i(k,z)} \tag{12}$$

Очевидно, $h_n \in C^\infty$ и $\|h_n - g\|_{L_2(K_m)} \to 0$ при $n \to \infty (K_m = \{(x,y); |x| < \pi m, |y| < \pi m\}$, $m = 1, 2, \dots)$ С учетом формул (11) и (12) имеем

$$F_n(z) \equiv \Delta h_n = \sum_{0<|k|\leqslant n} |k|^{-2} f_k |k|^2 e^{i(k,z)} = \sum_{0<|k|\leqslant n} f_k e^{i(k,z)} \tag{13}$$

Поэтому

$$F_n - (f - f_0) = \sum_{0<|k|\leqslant n} f_k e^{i(k,z)} - \sum_k f_k e^{i(k,z)} + f_0 = -\sum_{|k|>n} f_k e^{i(k,z)},$$

$$\|F_n - (f - f_0)\|^2_{L_2(K_m)} = \iint\limits_{K_m} \left| -\sum_{|k|>n} f_k e^{i(k,z)} \right|^2 dxdy \leqslant \sum_{|k|>n} \iint\limits_{K_m} |f_k|^2 dxdy =$$
$$= \sum_{|k|>n} |f_k|^2 \cdot \iint\limits_{K_m} dxdy = (\pi m)^2 \cdot \sum_{|k|>n} |f_k|^2$$

Так как

$$\sum_k |f_k|^2 = \|f\|^2_{L_2(K)},$$

то остаток ряда

$$\sum_k |f_k|^2$$

стремится к нулю т.е.

$$\sum_{|k|>n} |f_k|^2 \to 0$$

Поэтому

$$\|f_n - (f - f_0)\|_{L_2(K_m)} \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{14}$$

Используя формулу интегрирования по частям вида

$$\iint\limits_C \Delta w \omega dxdy = \iint\limits_C w \Delta \omega dxdy, (\omega \in C_0^\infty) \tag{15}$$

имеем

$$\iint\limits_C h_n(z) \cdot \Delta\varphi(z) dxdy = \iint\limits_C \Delta h_n(z) \varphi(z) dxdy = \iint\limits_C F_n(z) \varphi(z) dxdy \tag{16}$$

где $\varphi \in C_0^\infty$. Выберем $m$ так, чтобы $K_m \supset Supp\varphi$.

Так как

$$\iint\limits_C g(z)\Delta\varphi(z) dxdy - \iint\limits_C [f(z) - f_0] \cdot \varphi(z) dxdy = \iint\limits_C (g - h_n) \cdot \Delta\varphi dxdy +$$
$$+ \iint\limits_C h_n \Delta\varphi dxdy - \iint\limits_C (f - f_0)\varphi dxdy;$$

то в силу (15) имеем

$$\iint\limits_C g(z) \cdot \Delta\varphi(z) dxdy - \iint\limits_C [f(z) - f_0]\varphi(z) dxdy = \iint\limits_{K_m} (g - h_n) \cdot \Delta\varphi dxdy +$$
$$+ \iint\limits_{K_m} [F_n - (f - f_0)] dxdy. \tag{17}$$

Используя неравенство Коши-Буняковского будем иметь

$$\left|\iint\limits_C g(z)\Delta\varphi(z)dxdy - \iint\limits_C (f(z)-f_0)\cdot\varphi(z)dxdy\right| \le \iint\limits_{K_m} |(g-h_n)\,\Delta\varphi|\,dxdy+$$

$$+\iint\limits_{K_m} |F_n-(f-f_0)|\,\varphi(z)dxdy \leqslant \left[\iint\limits_{K_m} |g-h_n|^2\,dxdy\cdot\iint\limits_{K_m} |\Delta\varphi|^2\,dxdy\right]^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\left[\iint\limits_{K_m} |F_n-(f-f_0|^2\,dxdy\cdot\iint\limits_{K_m} |\varphi|^2\,dxdy\right]^{\frac{1}{2}} = \|g-h_n\|_{L_2(K_m)}\cdot\|\Delta\varphi\|_{L_2(K_m)}+$$

$$+\|F_n-(f-f_0)\|_{L_2(K_m)}\cdot\|\varphi\|_{\,L_2(K_m)}$$

Итак

$$\left|\iint\limits_C g(z)\cdot\Delta\varphi(z)dxdy - \iint\limits_C (f(z)-f_0)\cdot\varphi(z)dxdy\right| \le$$

$$\le \|g-h_n\|_{L_2(K_m)}\cdot\|\Delta\varphi\|_{L_2(K_m)}+\|F_n-(f-f_0)\|_{L_2(K_m)}\cdot\|\varphi\|_{L_2(K_m)} \quad (18)$$

При $n\to\infty$ $h_n$ стремится к $g$, а $F_n$ стремится к $(f-f_0)$ и отсюда получаем, что оба слагаемых в правой части неравенства (18) стремятся к нулю. Поэтому переходя в (18) к пределу при $n\to\infty$ получим равенство (10).

**Свойство 4.** *Если $f(z)\in C_\alpha$, то функция*

$$h(z)=(Tf)(z) \quad (19)$$

*на всей плоскости будет классическим решением системы (9).*

Это следует из свойства 2 и теоремы о гладкости решений эллиптических систем.

### Литература


1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969, 576с.
2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.:Наука, 1988, 509с.
3. Байзаев С. Эллиптические системы с ограниченными коэффициентами на плоскости. Новосибирск. 1999. 74 с. (Препринт 41/ НИИ дискретной математики и информатики).
4. Байзаев С., О периодических решениях нелинейной обобщенной системы Коши-Римана, Докл.АН. Тадж.ССР 22, №1 (1979), 3-6.
5. Джабборов А.А.Об априорной оценке и существовании ограниченных и периодических решений квазилинейных эллиптических систем второго порядка на плоскости. Доклады АН РТ том 47, №4, 2004.

УДК 517.5

# Значения поперечников некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди

Заргаров Дж.Дж., Давлатбеков Ф.Д.

**(Хорогский государственный университет им. М. Назаршоева)**

В работе доказано точное неравенство типа Джексона для аналитических в единичном круге функций в пространстве Харди. Приведённые здесь результаты являются продолжением и развитием работ [1-4].

Говорят, что аналитическая в круге $|z| < 1$ функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,\ z = \rho e^{it},\ 0 \le \rho < 1,\ 0 \le t \le 2\pi$$

принадлежит пространству Харди $H_p$, $1 \le p \le \infty$, если

$$\|f\|_p := \|f\|_{H_p} = \lim\{M_p(f,\rho) :\ \rho \to 1-0\} < \infty,$$

где

$$M_p(f;\rho) := \left\{ \left( \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^p dt \right)^{1/p},\ 1 \le p < \infty;\ \max_{0\le t<2\pi} |f(\rho e^{it})|,\ p = \infty \right\}.$$

Всюду далее интегралы понимаются в смысле Лебега и, как известно [5], норма реализуется на угловых граничных значениях функции $f \in H_p$, $1 \le p \le \infty$, то есть

$$\|f\|_p = \left\{ \left( \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p dt \right)^{1/p},\ 1 \le p < \infty;\ \ \underset{0\le t\le 2\pi}{essup}(|f(e^{it})|) :\ p = \infty \right\}.$$

Далее, ради удобства, положим $f(t) := f(e^{it}) = \lim\{f(\rho e^{it}) :\ \rho \to 1\}$.

Через $f^{(r)}(t)$ обозначим граничные значения производной $r$-го порядка $f^{(r)}(z) = d^r f/dz^r$. Для $r \in \mathbb{N}, 1 \le p \le \infty$ полагаем

$$H_p^{(r)} = \left\{ f(z) \in H_p : \|f^{(r)}\|_{H_p} < \infty \right\}.$$

Если $f(z) \in H_p,\ \ 1 \le p \le \infty$ имеют граничные значения $f(t)$, то их гладкость характеризуют модулем непрерывности $m$-го порядка

$$\omega_m(f;t)_{H_p} = \sup\{\|\triangle_m(f,\cdot,h)\|_p : |h| \le t\},$$

где

$$\triangle_m(f;u,h) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f(u+kh)$$

разность $m$-го порядка функции $f(u)$ по аргументу $u$ с шагом $h$. Положим

$$\alpha_{k,r} = k(k-1)...(k-r+1),\ k \ge r,\ k,\ r \in \mathbb{N}.$$

Пусть

$$\mathcal{P}_{n-1}=\left\{p_{n-1}(z): p_{n-1}(z)=\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k,\ a_k\in\mathbb{C}\right\}.$$

Величину

$$E_n(f)_p := E(f,\mathcal{P}_{n-1})_p=\inf\{\|f-p_{n-1}\|_{H_p}: p_{n-1}(z)\in\mathcal{P}_{n-1}\}$$

назовем наилучшим приближением функции $f(z)\in H_p$, $1\le p\le\infty$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$ комплексных алгебраических полиномов степени $\le n-1$ в пространстве Харди $H_p$, $1\le p\le\infty$.

В данной работе мы вводим в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\chi_{m,n,r,p,q}(t)=\sup\left\{\frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)_p}{\left(\int\limits_0^t (t-\tau)\omega_m^q(f^{(r)},\tau)_2 dt\right)^{1/q}} : f\in H_p^{(r)}\right\},$$

где $m,n,r\in\mathbb{N}$, $1\le p,q\le 2$.

**Теорема 1.** *Для любых $m,n,r\in\mathbb{N}$, $1\le p,q\le 2$, $0<t\le\pi/(n-r)$ имеет место соотношение*

$$\chi_{m,n,r,p,q}(t)\le 2^{-m}\left(\int\limits_0^t (t-\tau)\left(\sin\frac{n-r}{2}\tau\right)^{mq} d\tau\right)^{1/q}. \qquad (1)$$

*В случае $p=2$ в (1) имеет место знак равенства.*

Обозначим через $b_n(\mathfrak{M},H_2), d^n(\mathfrak{M},H_2), d_n(\mathfrak{M},H_2), \delta_n(\mathfrak{M},H_2), \Pi_n(\mathfrak{M},H_2)$ соответственно бернштейновский, гельфандовский, колмогоровский, линейный и проекционный $n$-поперечники. Указанные $n$-поперечники связаны в $H_2$ следующими соотношениями [6]:

$$b_n(\mathfrak{M},L_2)\le d^n(m,L_2)\le d_n(\mathfrak{M},L_2)=\delta_n(m,L_2)=\Pi_n(\mathfrak{M},L_2).$$

Для любых целых положительных $m,n,r$, $r<n$ и $0<t\le\pi/(n-r)$ через $W_m^{(r)}$ обозначим класс функций из $H_2^{(r)}$

$$W_m^{(r)}=\left\{f(z)\in H_2^{(r)}: \int\limits_0^t (t-\tau)\omega_m^q(f^{(r)};\tau)_2 d\tau\le 1\right\}.$$

Сформулируем основной результат работы.

**Теорема 2.** *Пусть $m,n,r\in\mathbb{N}$, $r<n$ и $0<t\le\pi/(n-r)$. Тогда имеет место равенство*

$$\gamma_n(W_m^{(r)};H_2)=2^{-m}\alpha_{n,r}^{-1}\left(\int\limits_0^t (t-\tau)\left(\sin\frac{n-r}{2}\tau\right)^{mq} d\tau\right)^{-1/q}, \qquad (2)$$

*где $\gamma_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше $n$-поперечников.*

*В частности, при $t=\pi/(n-r)$ из (2) имеем*

$$\gamma_n(W_m^{(r)};H_2)=2^{-(m+2/q)}\,\alpha_{n,r}^{-1}\,(n-r)^{2/q}\left(\int\limits_0^{\pi/2}\tau(\cos\tau)^{mq}d\tau\right)^{-1/q}.$$

**Литература**

1. Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из $L_2$ // Матем. заметки, 2005, т.78, №5, с.792-796.
2. Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в $L_2$ // Матем. заметки, 2006, т.80, №1, с.11-19.
3. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки, 2010, т.87, №4, с.616-623.
4. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в $L_2$ некоторых классов $2\pi$-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки, 2011, т.90, №5, с.764-775.
5. Кусис П. Введение в теорию пространств $H_p$. – М.: Мир, 1984, 256 с.
6. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. - М.: МГУ, 1976, 325 с.

УДК 517.5

# О значении поперечников некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана

Лангаршоев М.Р.

**(Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан)**

**1.** Пусть $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+$ – множество целых неотрицательных чисел, $\mathbb{R}_+$ – множество положительных чисел. Известно [1], что аналитическая в единичном круге функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 < \rho < 1$$

принадлежит весовому пространству Бергмана $\mathscr{B}_{q,\gamma}$, $1 \le q < \infty$, если

$$\|f\|_{q,\gamma} := \|f\|_{\mathscr{B}_{q,\gamma}} = \left( \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|z|<1} \gamma(|z|)|f(z)|^q d\sigma \right)^{1/q} < \infty, \quad 1 \le q < \infty, \tag{1}$$

где $\gamma(|z|)$ – положительная весовая функция, $d\sigma$ – элемент площади и интеграл понимается в смысле Лебега. Переходя к полярным координатам, норму (1) запишем в виде

$$\|f\|_{q,\gamma} = \left( \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho)|f(\rho e^{it})|^q d\rho dt \right)^{1/q}.$$

Равенством

$$\omega_2(f; 2\delta)_{q,\gamma} =$$

$$= \sup_{|h|\le\delta} \left( \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho) \left| f(\rho e^{i(t+h)}) - 2f(\rho e^{it}) + f(\rho e^{i(t-h)}) \right|^q d\rho dt \right)^{1/q} \tag{2}$$

определим модуль гладкости функции $f$ в пространстве $\mathscr{B}_{q,\gamma}, 1 \leq q < \infty$. Легко проверить, что функция (2) обладает всеми свойствами модуля гладкости [2, с.151]. Обозначим через

$$\mathscr{P}_n = \Big\{ p_n(z): \ p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \ n \in \mathbb{N}, \ a_k \in \mathbb{C} \Big\}$$

множество алгебраических комплексных полиномов степени $n$. Величину

$$E_n(f)_{q,\gamma} := \Big\{ \|f - p_{n-1}\|_{q,\gamma}: \ p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1} \Big\}$$

называют наилучшим приближением функции $f(z) \in \mathscr{B}_{q,\gamma}$, $1 \leq q < \infty$ элементами множества $\mathscr{P}_{n-1}$. Через

$$E_n(\mathfrak{M})_{q,\gamma} = \sup\Big\{ E_n(f)_{q,\gamma}: \ f \in \mathfrak{M} \Big\}$$

обозначим отклонение множества $\mathfrak{M} \subset \mathscr{B}_{q,\gamma}$ от множества $\mathscr{P}_{n-1}$.

Введём обозначения

$$\alpha_{n,r} = n(n-1)\ldots(n-r+1), \quad n \geq r, \ n, r \in \mathbb{N},$$

$$\mathcal{B}^{(r)}_{q,\gamma} = \left\{ f(z) \in \mathscr{B}_{q,\gamma}: \ \|z^r f^{(r)}\|_{q,\gamma} < \infty \right\}.$$

В [3] доказано, что для произвольной функции $f(z) \in \mathscr{B}_{q,\gamma}, 1 \leq q < \infty$, у которой $z^r f^{(r)}(z) \in \mathscr{B}_{q,\gamma}$, $1 \leq q < \infty$, при любых $r, n \in \mathbb{N}$, справедливо точное неравенство

$$E_n(f)_{q,\gamma} \leq \frac{n}{(\pi-2)\alpha_{n,r}} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega_2\left(z^r f^{(r)}; 2t\right)_{q,\gamma} dt, \quad n \geq r, \tag{3}$$

которое обращается в равенство для функции $f_0(z) = az^n$, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что неравенство вида (3) для усреднённого модуля непрерывности первого порядка получено в работе [4].

**2.** Приведённое неравенство (3) даёт возможность вычислить точные значения некоторых $n$-поперечников классов функций, усреднённый модуль гладкости которых мажорируется заданной функцией. Приводим обозначения, необходимые для дальнейшего определения. Пусть $X$ – банахово пространство; $S$ – единичный шар в $X$; $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество в $X$; $\Lambda_n \subset X$ – $n$-мерное подпространство. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0: \ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\}: \ \Lambda_{n+1} \subset X\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\{\sup\{\inf\{\|f - \varphi\|_X: \ \varphi \in \Lambda_n\}: \ f \in \mathfrak{M}\}: \ \Lambda_n \subset X\}$$

называют соответственно бернштейновским и колмогоровским $n$-поперечниками. Между указанными величинами выполняется неравенство [5]

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \leq d_n(\mathfrak{M}, X). \tag{4}$$

Пусть $\Phi(u)$ – положительная неубывающая выпуклая вниз функция, определённая для $u \geq 0$ и удовлетворяющая условию $\lim\limits_{u \to 0} \Phi(u) = \Phi(0) = 0$.

Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций, принадлежащий пространству $\mathscr{B}_{q,\gamma}$, то требуется найти величину

$$E_n(\mathfrak{M})_{q,\gamma} := \sup\Big\{ E_n(f)_{q,\gamma}: \ f \in \mathfrak{M} \Big\}.$$

Положим также

$$(1-\cos t)_* := \Big\{1-\cos t, \text{ если } \ 0<t\le\pi; \ \ 2, \text{ если } t\ge\pi\Big\}.$$

Исходя из неравенства (3), для любых $r\in\mathbb{Z}_+$, $n\in\mathbb{N}$ и $h\in\mathbb{R}_+$ определим следующий класс функций:

$$W^{(r)}(\Phi)=\left\{f\in\mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)}:\ \frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_2\left(z^r f^{(r)};2t\right)_{q,\gamma}dt\le\Phi(h)\right\}.$$

Далее нам понадобится следующая

**Лемма** [3]. *Для произвольного полинома $p_n(z)\in\mathscr{P}_n$ справедливо точное неравенство*

$$\omega_2\left(z^r p_n^{(r)};2t\right)_{q,\gamma}\le 2(1-\cos nt)_*\cdot\alpha_{n,r}\|p_n\|_{q,\gamma},\quad 0<nt\le\pi, \tag{5}$$

*которое обращается в равенство для полинома $q_n(z)=az^n,\ a\in\mathbb{C}$.*

**Теорема 1.** *Пусть мажоранта $\Phi$ при любых $n\in\mathbb{N}$ и $h\in$ $mathbbR_+$ удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/(2n))}\ge\frac{1}{\pi-2}\cdot\frac{\pi}{nh}\int\limits_0^{nh}(1-\cos t)_*dt. \tag{6}$$

*Тогда при всех $r\in\mathbb{Z}_+$, $1\le q<\infty$ имеют место равенства*

$$b_n\Big(W^{(r)}(\Phi),\mathscr{B}_{q,\gamma}\Big)=d_n\left(W^{(r)}(\Phi),\mathscr{B}_{q,\gamma}\right)=$$

$$=E_n\left(W^{(r)}(\Phi)\right)_{q,\gamma}=\frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{1}{\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{7}$$

*Множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (6), не пусто.*

**Доказательство.** Для произвольной функции $f\in W^{(r)}(\Phi)$ из неравенства (3) получаем

$$E_n(f)_{q,\gamma}\le\frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{1}{\alpha_{n,r}}\left(\frac{2n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega_2\left(z^r f^{(r)};2t\right)_{q,\gamma}dt\right)\le$$

$$\le\frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{1}{\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Из последнего неравенства и неравенства (4) получаем оценку сверху для перечисленных выше $n$-поперечников

$$b_n\Big(W^{(r)}(\Phi),\mathscr{B}_{q,\gamma}\Big)\le d_n\left(W^{(r)}(\Phi),\mathscr{B}_{q,\gamma}\right)\le$$

$$\le E_n\left(W^{(r)}(\Phi)\right)_{q,\gamma}\le\frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{1}{\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{8}$$

Для получения оценки снизу, равной правой части (8), указанных $n$-поперечников в множестве $\mathscr{P}_n\cap\mathscr{B}_{q,\gamma}$ введём в рассмотрение шар

$$S_{n+1}^* := \left\{p_n\in\mathscr{P}_n:\ \|p_n\|_{q,\gamma}\le\frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{1}{\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}$$

и покажем, что $S^*_{n+1}$ принадлежит классу $W^{(r)}(\Phi)$.

В самом деле, используя определение класса $W^{(r)}(\Phi)$, из неравенства (5) при любом $h \in \mathbb{R}_+$, с учётом ограничения (6), для произвольной $p_n(z) \in S^*_{n+1}$, имеем

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_2(z^r p_n^{(r)}; 2t)_{q,\gamma} dt \leq 2\alpha_{n,r} \cdot \|p_n\|_{q,\gamma} \cdot \frac{1}{h}\int\limits_0^h (1-\cos nt)_* dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi-2}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \cdot \frac{\pi}{nh}\int\limits_0^{nh} (1-\cos t)_* dt \leq \Phi(h),$$

откуда и следует включение $S^*_{n+1} \subset W^{(r)}(\Phi)$. Следовательно, согласно определению бернштейновского $n$-поперечника

$$b_n\Big(W^{(r)}(\Phi), \mathscr{B}_{q,\gamma}\Big) \geq b_n\left(S^*_{n+1}, \mathscr{B}_{q,\gamma}\right) \geq \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \qquad (9)$$

Сопоставляя оценку сверху (8) и оценку снизу (9), получаем требуемые равенства (7). Непосредственным вычислением можно показать, что условию (6) удовлетворяет, например, функция $\Phi^*(h) = h^\alpha$, где

$$\alpha = \frac{2}{\pi-2} \quad (1,75 < \alpha < 2).$$

**Следствие.** *В условиях теоремы 1 имеют место равенства*

$$b_n\Big(W^{(r)}(\Phi^*), \mathscr{B}_{q,\gamma}\Big) = d_n\left(W^{(r)}(\Phi), \mathscr{B}_{q,\gamma}\right) =$$

$$= E_n\left(W^{(r)}(\Phi)\right)_{q,\gamma} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\pi/(\pi-2)} (\pi-2)^{-1}\alpha_{n,r}^{-1}\, n^{-2/(\pi-2)}.$$

В работе [3] доказано, что для произвольной функции $f(z) \in B_{q,\gamma,R}$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < R \leq 1$, у которой $z^r f^{(r)}(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$, при любых $r, n \in N$ имеет место точное неравенство

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma,R}} \leq R^n \alpha_{n,r}^{-1} E_n(z^r f^{(r)})_{B_{q,\gamma}}, n \geq r,$$

в котором знак равенства доставляет функция $f_0(z) = az^n$, $a \in \mathbb{C}$. Используя этот факт, распространим результаты теоремы 1 на более общее пространство.

**Теорема 2.** *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$ и мажоранта $\Phi$ при любом $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию (6). Тогда для произвольной $n \in \mathbb{N}$ и $0 < R \leq 1$ имеют место равенства*

$$b_n\Big(W^{(r)}(\Phi), \mathscr{B}_{q,\gamma,R}\Big) = d_n\left(W^{(r)}(\Phi), \mathscr{B}_{q,\gamma,R}\right) =$$

$$= E_n\left(W^{(r)}(\Phi)\right)_{q,\gamma,R} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{R^n}{\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

## Литература

1. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О наилучшем приближение некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $\mathcal{B}_{2,\gamma}$. – Докл. РАН, 2007, т.412, №4, с. 466-469.

2. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977, 511 с.
3. Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. Наилучшее приближение некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. наук, 2009, №3(136), с. 7-23.
4. Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. О наилучших линейных методах и значениях поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана. – Докл. РАН, 2013, т.450, №5, с. 518-521.
5. Pinkus A. $n$-Widths in Approximation Theory – Berlin: Springer-Verlag, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985, 252 p.

УДК 517.5

## Точные значения поперечников некоторых классов функций в $L_2$

Мамадаёзов Н.М.

**(Хорогский государственный университет им. М. Назаршоева)**

В работе получены точные неравенства типа Джексона-Стечкина для осреднённых модулей непрерывности $m$ ($m \in \mathbb{N}$)-го порядка для классов функций, определённых при помощи заданных мажорант, вычислены точные значения различных $n$-поперечников.

Пусть $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ - множество положительных чисел вещественной оси; $L_2 := L_2[0,2\pi]$ - пространство интегрируемых с квадратом по Лебегу $2\pi$-периодических вещественных функций $f$ с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

Совокупность всевозможных тригонометрических полиномов вида

$$T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

обозначим через $\mathcal{T}_{2n-1}$. Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей формальное разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\Big),$$

величина её наилучшего приближения элементами $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) = \inf\{\|f - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\right\}^{1/2},\ \rho_k^2 = a_k^2 + b_k^2,\ k \geq n,$$

где

$$S_{n-1}(f,x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\Big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\Big)$$

— частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f$, $a_k(f)$ и $b_k(f)$, соответственно, косинус- и синус-коэффициенты $f$.

Равенством
$$\omega_m(f,t)=\sup\Big\{\Big\|\Delta_h^m f(\cdot)\Big\|:\ |h|\le t\Big\}$$
определим модуль непрерывности $m$-го порядка функции $f\in L_2$, где
$$\Delta_h^m f(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}f\Big(x+(m-k)h\Big)$$
— разность $m$-го порядка функции $f$ с шагом $h$.

Через $L_2^{(r)}$ $(r\in\mathbb{Z}_+,\ L_2^{(0)}=L_2)$ понимаем множество функций $f\in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а производные $r$-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат $L_2$.

Неравенствами типа Джексона-Стечкина в широком смысле называют соотношения, в которых погрешность приближения индивидуальной функции в рассматриваемом банаховом пространстве оценивается через модуль непрерывности заданного порядка самой приближаемой функции или некоторой её производной. При этом естественным образом возникает экстремальная задача получения точных неравенств, неулучшаемых на рассматриваемых классах функций. При решении экстремальных задач теории аппроксимации в пространстве $L_2$, связанных с нахождением точных констант в неравенствах типа Джексона-Стечкина
$$E_{n-1}(f)\le\chi\, n^{-r}\omega_m\left(f^{(r)},\frac{t}{n}\right),$$
где
$$t>0,\ f\in L_2^{(r)},\ m\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ f^{(0)}\equiv f,$$
многими математиками в разное время рассматривались различные экстремальные характеристики, способствовавшие уточнению оценок сверху констант $\chi$. В работе [1] Л.В. Тайков, в частности, доказал, что для любого $h\in[0,\,\pi/n]$ справедливо соотношение
$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\ne const}} n^r E_{n-1}(f)\cdot\left\{\int_0^h\omega^2(f^{(r)};t)dt\right\}^{-1/2}=\left\{\frac{n}{2(nh-\sin nh)}\right\}^{1/2}.$$

Обобщая этот результат для модулей непрерывности $m$-го порядка, С.Б. Вакарчук [2] показал, что
$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\ne const}} n^r E_{n-1}(f)\cdot\left\{\int_0^h\omega_m^{2/m}(f^{(r)};t)dt\right\}^{-m/2}=\left\{\frac{n}{2(nh-\sin nh)}\right\}^{m/2}.$$

Обобщение этих работ дано в работах М.Ш. Шабозова [3] и М.Ш. Шабозова и Г.А. Юсупова [4]. Здесь мы продолжим исследование в этом направлении и докажем аналогичный результат для усреднённых модулей непрерывности $m$-го порядка, а также вычислим значения $n$-поперечников для классов дифференцируемых функций из $L_2$, определённых при помощи мажорант и удовлетворяющих некоторым ограничениям.

**Теорема 1.** *Для любых $m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+$ и любого $h\in\mathbb{R}_+$, удовлетворяющего неравенства $0<nh\le\pi$, справедливы равенства*
$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\ne const}}\frac{n^r(2h)^{m/2}E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h\left(\frac{1}{t}\int_0^t\omega_m^{2/m}(f^{(r)},u)du\right)dt\right)^{m/2}}=\left\{\frac{n}{2(nh-Si(nh))}\right\}^{m/2},$$

*где* $Si(h) = \int_0^h t^{-1}\sin t dt$ *- интегральный синус.*

**3.** Для формулировки последующих результатов нам понадобятся необходимые определения и понятия. Пусть $S = \{g : \|g\| \le 1\}$ - единичный шар в пространстве $L_2$; $\mathfrak{M}$– выпуклое центрально-симметричное подмножество из $L_2$; $\Lambda_n \subset L_2 - n$-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности $n$; $\mathcal{L} : L_2 \to \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства $L_2$ в $\Lambda_n$; $\mathcal{L}^\perp : L_2 \to \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования $L_2$ на подпространство $\Lambda_n$. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\| :\ f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset L_2\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - \varphi\| :\ \varphi \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$\lambda_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - lf\| :\ f \in \mathfrak{M}\right\} : lL_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - l^\perp f\| :\ f \in \mathfrak{M}\right\} : l^\perp L_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\}$$

называют соответственно бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным, проекционным $n$-поперечниками.

Весьма важным является нахождение соответствующих подпространств, реализующих верхние грани в поперечнике Бернштейна $b_n(\cdot)$ и нижние грани во всех остальных $n$-поперечниках. Такие подпространства называются *экстремальными* (или *оптимальными*) подпространствами. Известно, что в гильбертовом пространстве $L_2$ между перечисленными $n$-поперечниками выполняются следующие соотношения:

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \le d^n(\mathfrak{M}, L_2) \le d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \lambda_n(\mathfrak{M}, L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}, L_2).$$

Для $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < h \le 2\pi$ введём в рассмотрение класс функций:

$$\mathcal{F}_m^{(r)}(h) := \left\{f \in L_2^{(r)} :\ \int_0^h \left(\frac{1}{t}\int_0^t \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, u)du\right) dt \le 1\right\}.$$

**Теорема 2.** *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ *и выполнено условие* $0 < nh \le \pi$. *Тогда справедливы равенства*

$$\delta_{2n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h), L_2\right) = \delta_{2n}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h), L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h)\right)_{L_2} = \left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\}^{m/2} \cdot \frac{1}{n^r},$$

*где* $\delta_k(\cdot)$ *– любой из перечисленных выше* $k$*-поперечников, а* $E_{n-1}(\mathfrak{N})_{L_2}$ *– наилучшее полиномиальное приближение класса функций* $\mathfrak{N}$ *в пространстве* $L_2$. *Все поперечники реализуются частными суммами* $S_{n-1}(f; x)$ *ряда Фурье.*

### Литература


1. Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из $L_2$ // Матем. заметки, 1976, т.20, №3, с.433-438.
2. Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в $L_2$ // Матем. заметки, 2006, т.80, №1, с.11-19.
3. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки, 2010, т.87, №4, с.616-623.
4. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Widths of Certain Classes of Periodic Functions in $L_2$ // Journ. of Approx. Theory, 2012, v.164, issue 1, pp.869-878.

УДК 517.5

# О характеристических свойствах целых функций

Мамадов Р.

**(Канибадамский технологический колледж им. А. Каххарова)**

В данной работе установлены связи между наилучшими полиномиальными приближениями

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} = \inf\left\{\|f - p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma}} :\ p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1}\right\}$$

целой трансцендентной функции $f(z)$ в весовом пространстве Бергмана $B_{q,\gamma}$, $1 \le q \le \infty$, и такими ее характеристиками, как порядок роста и тип. Указанное банахово пространство состоит из аналитических в круге $|z| < 1$ функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi}\iint_{|z|<1}\gamma(|z|)|f(z)|^q dxdy\right)^{1/q} = \left(\int_0^1 r\gamma(r)M_q^q(r;f)dr\right)^{1/q} < \infty,$$

где

$$M_q(r;f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^q dt\right)^{1/q},$$

$\gamma(|z|)$ – положительная измеримая весовая функция, а интегралы понимаются в смысле Лебега. Определим порядка $\rho$ и типа $\sigma$ целой функции

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

через величину $M(r) = \max\left\{|f(z)| :\ |z| = r\right\}$, а именно:

$$\rho = \varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r},\quad \sigma = \varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln M(r)}{r^\rho},\ 0 < \rho < \infty$$

и основные соотношения между ними. Приведём также некоторые формулы, устанавливающие связь между ростом целых функций и скоростью убывания коэффициентов их степенных разложений в ряд Тейлора:

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{\ln\dfrac{1}{|c_n|}},\qquad (\sigma e\rho)^{1/\rho} = \varlimsup_{n\to\infty} n^{1/\rho}|c_n|^{1/n}.$$

Используя неравенства типа С.М.Никольского в комплексной плоскости и некоторые элементы конструктивной теории функций комплексного переменного для функции $f(z)$ принадлежащее банахову пространству $B_{q,\gamma}$, $1 \le q \le \infty$ доказываются следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Для того, чтобы функция $f(z) \in B_{q,\gamma}, 1 \le q \le \infty$, была целой необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предельное равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\left\{E_n(f)_{B_{q,\gamma}}\left(\int_0^1 r^{nq+1}\gamma(r)dr\right)^{-1/q}\right\}^{1/n} = 0.$$

**Теорема 2.** *Пусть $f(z) \in B_{q,\gamma}, 1 \le q \le \infty$. Для того, чтобы $f(z)$ была целой трансцендентной функцией конечного порядка $\rho \in (0,\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left\{\ln\left[\left(\int_0^1 r^{nq+1}\gamma(r)dr\right)^{1/q} E_n^{-1}(f)_{B_{q,\gamma}}\right]\right\}^{-1} n\ln n = \rho.$$

**Теорема 3.** *Пусть $f(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \le q \le \infty$. Для того, чтобы $f(z)$ была целой трансцендентной функцией конечного порядка $\rho \in (0,\infty)$ и нормального типа $\sigma \in (0,\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(\rho e)^{-1}n\left\{E_n(f)_{B_{q,\gamma}}\left(\int_0^1 r^{nq+1}\gamma(r)dr\right)^{-1/q}\right\}^{\rho/n}=\sigma.$$

Отметим, что из приведенных теорем 1-3 непосредственно вытекают некоторые результаты, ранее полученные С.Б. Вакарчуком и С.И. Жиром [1-2].

### Литература


1. Вакарчук С.Б., Жир С.И. Некоторые вопросы полиномиальной аппроксимации целых трансцендентных функций // Укр. мат. журн., 2002, т.54, №9, с.1155-1162.
2. Вакарчук С.Б., Жир С.И. О полиномиальной аппроксимации целых трансцендентных функций в комплексной плоскости. Збiрник праць Iнститута математики НАН Укра.ни. Київ: Iн-т математики НАН Украiни, 2005, 336 с.


УДК 517.5

## О некоторых точных неравенствах для производных полиномов в пространствах Харди $H_p, 1 \le p \le \infty$

Миркалонова М.М.†, Холмамадова Ш.А.‡

**(†Таджикский национальный университет)**
**(‡Хорогский государственный университет им. М. Назаршоева)**

В экстремальных задачах приближения функций полиномами в различных банаховых пространствах важную роль играют точные неравенства, позволяющие установить новые связи между конструктивными и структурными свойствами функций. При этом структурные свойства функций, как правило, характеризуются скоростью стремления к нулю модулями непрерывности различных порядков. С целью выявления этих структурных свойств в последнее время интенсивно изучаются неравенства для оценки производных комплексных полиномов посредством модулей непрерывности высших порядков самих полиномов в банаховых пространствах аналитических в круге функций (см., например, [1-8] и приведенную там литературу).

Данная работа посвящена получению точных оценок производных алгебраических комплексных полиномов через модули непрерывности и гладкости самих полиномов в пространстве Харди $H_p, 1 \le p \le \infty$.

Говорят, что аналитическая в круге $|z| < 1$ функция $f(z)$ принадлежит пространству Харди $H_p, 1 \le p \le \infty$, если

$$\|f\|_p := \|f\|_{H_p} = \lim_{\rho\to 1-0}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{it})|^p dt\right)^{1/p} < \infty,\ 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{H_\infty} = \max\left\{|f(z)| : |z| < 1,\ p = \infty\right\}.$$

Хорошо известно [2,3], что норма функции $f \in H_p$ реализуется на её угловых граничных значениях $f(t) := f(e^{it})$. Всюду далее, через $H_{p,R}$ $(1 \le p \le \infty,\ 0 < R \le 1)$ обозначим пространство Харди аналитических в круге $|z| \le R$ функций с конечной нормой

$$\|f\|_{H_{p,R}} := \|f(R\cdot)\|_{H_p} \le \infty.$$

Производную $r$-го порядка функции $f(z)$ по аргументу $t$ комплексного переменного $z=\rho e^{it}$ обозначим через $f_a^{(r)}(z)$, а обычную производную $r$-го порядка через $f^{(r)}(z)$. При этом полагаем

$$f_a^{'}(z)=f^{'}(z)\cdot zi, \quad f_a^{(r)}=\{f_a^{(r-1)}\}_a^{'}, \quad r=2,3,\ldots;$$

$$f^{(r)}(z)=d^rf/dz^r, \quad r=1,2,\cdots,$$

а соответствующие граничные значения производных обозначим через $f_a^{(r)}(t)$ и $f^{(r)}(t)$. Если $f\in H_p$, то, как сказано выше, структурные свойства этой функции охарактеризуем быстротою стремления к нулю модуля непрерывности

$$\omega(f,t)=\sup\left\{\|f(e^{i(\cdot+h/2)})-f(e^{i(-h/2)})\|_p:|h|\le t\right\}$$

и модуля гладкости её граничных значений

$$\omega_2(f,t)=\sup\left\{\|f(e^{i(\cdot+h/2)})-2f(e^{i(\cdot)})+f(e^{i(-h/2)})\|_p:|h|\le t\right\}.$$

Через $\mathcal{P}_n$ обозначим совокупность всех алгебраических комплексных полиномов степени не более $n$:

$$p_n(z)=\sum_{k=0}^{n}c_kz^k, \; c_k\in\mathbb{C}.$$

Сформулируем основные утверждения настоящей работы, доказательство которых можно получить из соответствующих неравенств для производных аналитических в круге функций посредством модулей непрерывности самих функций в пространстве Харди $H_p$, $1\le p\le\infty$, опубликованные в работах [9-11].

**Теорема 1.** *Для произвольного алгебраического полинома $p_n\in\mathcal{P}_n$ при любом $R\in(0,1]$ справедливы точные неравенства*

$$\|p_{n,a}^{(r)}\|_{H_{p,R}}\le\frac{1}{4}R^nn^{r+1}\int_0^{\pi/n}\omega(p_n,t)_pdt, \tag{1}$$

$$\|p^{(r)}\|_{H_{p,R}}\le\frac{1}{4}R^{n-r}n\alpha_{nr}\int_0^{\pi/n}\omega(p_n,t)_pdt, \tag{2}$$

*где $\alpha_{nr}=n(n-1)\cdots(n-r+1), \; n\ge r$. Неравенства (1) и (2) обращаются в равенства для полинома $p_n(z)=az^n, \; a\in\mathbb{C}, \; n\in\mathbb{N}$.*

Отметим, что равенства (1) и (2) являются обобщением результатов Л.В. Тайкова [2,3]. Знак равенство в (1) и (2) для полинома $p_n=az^n, a\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$ проверяется непосредственным вычислением.

Следующее утверждение является обобщением теоремы 1.

**Теорема 2.** *При любых $r\in\mathbb{Z}_+$ и $n\in\mathbb{N}, 1\le p\le\infty, 1\le q\le\infty$ $(q^{-1}+(q^{'})^{-1}=1, \; 1\le q^{'}\le\infty)$ для произвольного полинома $p_n\in\mathcal{P}_n$ справедливо неравенство*

$$\|p_{n,a}^{(r)}\|_{H_{p,R}}\le\frac{1}{4}R^n\pi^{1/q^{'}}n^{r+1/q}\left(\int_0^{\pi/n}\omega^q(p_n,t)_pdt\right)^{1/q}, \tag{3}$$

*и при тех же условиях на $r\in\mathbb{Z}_+, \; n\in\mathbb{N}, \; 1\le p\le\infty, \; 1\le q\le\infty$ и $n>r$ справедливо также неравенство*

$$\|p_n^{(r)}\|_{H_{p,R}}\le\frac{1}{4}R^{n-r}\pi^{1/q^{'}}n^{1/q}\alpha_{nr}\left(\int_0^{\pi/n}\omega^q(p_n,t)_pdt\right)^{1/q}, \tag{4}$$

*причём при* $q = 1$ *(и следовательно* $q' = \infty$*) обе неравенства (3) и (4) обращаются в равенства для полинома* $p_n = az^n, a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$.

В приводимых ниже теоремах норма производной $r$-го порядка полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ оценивается через усреднённое значение модуля гладкости самого полинома. Справедлива следующая

**Теорема 3.** *При любых* $r \in \mathbb{Z}_+,\ n \in \mathbb{N},\ 1 \le p \le \infty$ *для любого* $p_n \in \mathcal{P}_n$ *справедливы точные неравенства*

$$\|p_{n,a}^{(r)}\|_{H_{p,R}} \le R^n \frac{n^{r+1}}{2(\pi-2)} \int_0^{\pi/n} \omega_2(p_n,t)_p dt, \tag{5}$$

$$\|p^{(r)}\|_{H_{p,R}} \le R^{n-r} \frac{n\alpha_{nr}}{2(\pi-2)} \int_0^{\pi/n} \omega_2(p_n,t)_p dt,\ n > r \tag{6}$$

*Знак равенства в неравенствах (5) и (6) реализует полином* $p_n = az^n, a \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$. Неравенств (5) и (6) допускает следующее обобщение.

**Теорема 4.** *Для произвольного полинома* $p_n \in \mathcal{P}_n$ *при любых* $n, r \in \mathbb{N},\ n > r \ge 2,$ $1 \le p \le \infty$ *справедливы неравенства*

$$\|p_{n,a}^{(r)}\|_{H_{p,R}} \le R^n \frac{\pi^{1/q'} n^{r+1/q}}{2(\pi-2)} \left(\int_0^{\pi/n} \omega_2^q(p_n,t)_p dt\right)^{1/q}, \tag{7}$$

$$\|p_n^{(r)}\|_{H_{p,R}} \le R^{n-r} \frac{\pi^{1/q'} n^{1/q}\alpha_{nr}}{2(\pi-2)} \left(\int_0^{\pi/n} \omega_2^q(p_n,t)_p dt\right)^{1/q}, \tag{8}$$

*где* $1 \le q \le \infty$ $(q^{-1} + (q')^{-1} = 1)$, *причём при* $q = 1$ *неравенства (7) и (8) обращаются в равенства для полинома* $p_n = az^n, a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$.

Отметим, что при доказательстве теорем 1 и 3 мы используем схему рассуждения работ [3,5,9-11], а доказательства теорем 2 и 4 базируются ещё на следующее элементарное утверждение.

**Лемма.** *Для произвольной положительной и суммируемой со степени* $q \ge 1$ *функции* $f$ *на отрезке* $[a,b]$ *имеет место неравенство*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^q(x)dx\right)^{1/q},\ 1 \le q \le \infty. \tag{9}$$

В работе [4] Н. Айнуллоев доказал, что для произвольного тригонометрического полинома степени $m$ вида

$$T_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m \rho_k \cos(kx + \varphi_k) \tag{10}$$

при произвольном натуральном $r \ge 2$ имеет место точное неравенство

$$\|T_m^{(r)}\|_p \le \frac{m^{r+1}}{\pi-2} \int_0^{\pi/2m} \omega_2(T_m,t)_p dt,\ 1 \le p \le \infty. \tag{11}$$

В следующем утверждении неравенство (11) распространяется на пространство $L_q$, а именно справедлива

**Теорема 5.** *Для произвольного тригонометрического полинома (10) при любых* $m \in \mathbb{N}$ *и* $r \ge 2$ $(r \in \mathbb{N})$ *имеет место неравенство*

$$\|T_m^{(r)}\|_p \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/q'} \frac{m^{r+1/q}}{\pi-2} \left(\int_0^{\pi/(2m)} \omega_2(T_m,t)_p dt\right)^{1/q}, \tag{12}$$

$$(q^{-1} + (q^{'})^{-1} = 1, \ 1 \le q \le \infty),$$

*которое, в частности, при $q = 1$ превращается в (11), и равенства в этом случае в (12) реализуется полиномом $T_m(x) = a\cos(mx + b)$, где $a, b \in \mathbb{R}$.*

### Литература

1. Тайков Л.В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций. Матем. заметки. 1967. Т.1, №2. С. 155-162.
2. Тайков Л.В. Некоторые точные неравенства в теории приближения функций. Analysis Mathematica. 1976. Т.2, №1. С. 77-85.
3. Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций. Матем. заметки. 1977. Т.22, №2. С. 285-295.
4. Айнуллоев Н. Точная оценка второй производной в пространстве $L_p$. Матем. заметки. 1991. Т.49, №5. С. 3-6.
5. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. Наилучшее приближение и значение поперечников некоторых классов функций в пространстве Бергмана $B_p$, $1 \le p \le \infty$. Докл. РАН. 2006. Т.410, №4. С. 461-464.
6. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана. Докл. РАН. 2007. Т.412, №4. С. 466-469.
7. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге. Матем. сборник. 2010. Т.201, №8. С. 3-22.
8. Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. Наилучшее приближение некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана. Изв. АН РТ, Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн.н., 2009. №3(136). С. 7-23
9. Шабозов М. Ш., Холмамадова Ш.А. Некоторые точные неравенства теории приближения аналитических в круге функций. ДАН РТ, 2010, Т.53, №8. С. 581-588.
10. Холмамадова Ш.А. Об оценке производных аналитических в круге функций. ДАН РТ, 2011, Т.54, №4. С. 265-269.
11. Холмамадова Ш.А. О точных оценках нормы второй производной функции в пространстве $L_p(\mathbb{R})$. // ДАН РТ, 2011, Т.54, №6. С. 431-435.

УДК 517.5

## Наилучшие квадратурные формулы с весом криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций

Мирпоччоев Ф.М., Хамдамов Ш.Дж.

**(Худжандский государственный университет им. ак. Б. Гафурова)**

Одной из наиболее важных задач численного анализа является задача оптимизации численного интегрирования функций на конечном отрезке вещественной оси. Развитие методов приближенного интегрирования привело к известным экстремальным задачам теории квадратур, решение которых приведено в дополнении Н.П. Корнейчука к монографии С.М. Никольского [1]. В то же время решении аналогичных задач для других типов интегралов, таких как сингулярные интегралы, несобственные интегралы первого рода, криволинейные интегралы, известно в очень редких случаях.

В данной работе рассмотрим вопрос оптимизации приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода

$$\int_{\Gamma} q(P)f(P)ds \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(P_k), \tag{1}$$

где весовая функция $q(P) \geq 0,\ \forall P \in \Gamma$, $\Gamma$ - произвольная спрямляемая кривая с конечной длиной $S$, кривизна которой кусочно-непрерывна, а $f(P)$ - произвольная непрерывная на $\Gamma$ функция. Конечную сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k f(P_k)$, состоящую из линейной комбинации нескольких значений подынтегральной функции, будем называть квадратурной суммой. Для достижения высокой точности при помощи (1) нужно возможно лучшим образом воспользоваться выбором коэффициентов $A_k$ и узлов $P_k$ [2]. Класс плоских спрямляемых кривых $\Gamma$ с длиною $S$ и кусочно-непрерывной кривизной, расположенных в области $Q = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq S^2\}$, обозначим через $\mathfrak{M}_Q(S)$. Параметрические уравнения кривой $\Gamma \in \mathfrak{M}_Q(S)$, отнесенной к длине дуги $s$ как параметру, в декартовой системе координат $OXY$ имеют вид

$$x = x(s),\ y = y(s),\ 0 \leq s \leq S.$$

Обозначая через $s_k \in [0, S],\ k = \overline{1, n}$ значения длины дуги $s$ кривой $\Gamma$, которые соответствуют точкам $P_k \in \Gamma$, перепишем формулу (1) в виде:

$$\int_0^S q(x(s), y(s)) f(x(s), y(s)) ds = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x(s_k), y(s_k)) + R_n(f; \Gamma), \tag{2}$$

где $x = x(s), y = y(s)$ - параметрические уравнения кривой $\Gamma$.

Через $W_q^{(1,1)} := W^{(1,1)} L_q(Q, M), 1 \leq q \leq \infty$ - обозначим класс функций $f(P) = f(x,y)$, у которых почти всюду в области $Q$ существуют частные производные $\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y$, удовлетворяющие условию

$$\left(\int_0^S |\mathrm{grad}\, f(x,y)|^q\, ds\right)^{1/q} = \left(\int_0^S \left|\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds}\right|^q ds\right)^{1/q} \leq M.$$

Очевидно, что для каждой функции $f \in W_q^{(1,1)}$ и кривой $\Gamma \in \mathfrak{M}_Q(S)$ остаток квадратурной формулы имеет вполне определенное численное значение

$$R_n(f; \Gamma) = \int_0^S q(x(s), y(s)) f(x(s), y(s)) ds - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x(s_k), y(s_k)).$$

Величина

$$R_n(W_q^{(1,1)}; \Gamma) = \sup\left\{|R_n(f; \Gamma)| :\ f \in W_q^{(1,1)}\right\}$$

характеризует точность квадратурной формулы (2) для всех функций класса $W_q^{(1,1)}$ на кривой $\Gamma \in \mathfrak{M}_Q(S)$, а

$$R_n(W_q^{(1,1)}; \mathfrak{M}_Q(S)) = \sup\left\{R_n(W_q^{(1,1)}; \Gamma) :\ \Gamma \in \mathfrak{M}_Q(S)\right\}$$

характеризует верхнюю грань погрешности формулы (2) функций класса $W_q^{(1,1)}$, допускаемой на классе кривых $\mathfrak{M}_Q(S)$. Всюду далее полагаем, что формула (2) является точной для постоянной функции $f(P) = const$.

Величину

$$\mathcal{E}_n(W_q^{(1,1)}; \mathfrak{M}_Q(S)) =$$

$$= \inf\left\{R_n(W_q^{(1,1)}; \mathfrak{M}_Q(S)) :\ \{s_k\}_{k=1}^n,\ 0 \leq s_k \leq S;\ \{A_k\}_{k=1}^n\right\} \tag{3}$$

по аналогии с монографией [1] будем называть оптимальной оценкой погрешности на классах функций $W_q^{(1,1)}$ и кривых $\mathfrak{M}_Q(S)$. Если существует квадратурная формула (2), для которой достигается нижняя грань в равенстве (3), то есть если выполняется равенство

$$R_n(W_q^{(1,1)};\mathfrak{M}_Q(S)) = \mathcal{E}_n(W_q^{(1,1)};\mathfrak{M}_Q(S)),$$

то ее будем называть наилучшей или оптимальной на классах $W_q^{(1,1)}$ и $\mathfrak{M}_Q(S)$. Записав для произвольной функции $f \in W_q^{(1,1)}$, как сложной функции одной переменной $f(x(s),y(s))$, формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши, остаток квадратурной формулы (3) представим в следующем виде

$$R_n(f;\Gamma) = \int_0^S \left(\frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right)\Phi(s)ds,$$

где ядро $\Phi(s)$ определяется равенством

$$\Phi(s) = \int_s^S q(x(t),y(t))dt - \sum_{k=1}^n A_k(s_k - s)_+^0, \quad u_+^0 = [\max(0,u)]^0.$$

Решение задачи (3) приводим в случае $q = 1$.

**Теорема.** *Среди всех квадратурных формул вида (3) наилучшей для классов функций $W_1^{(1,1)}$ и кривых $\mathfrak{M}_Q(S)$ является формула*

$$\int_0^S q(x(s),y(s))f(x(s),y(s))ds = \frac{F(0)}{n}\sum_{k=1}^n f(x(s_k),y(s_k)) + R_n(f;\Gamma), \tag{4}$$

*где узлы $s_k$ определяются из системы уравнений*

$$F(s_k) = \frac{2n-2k+1}{2n}F(0), \ (k=\overline{1,n}).$$

*При этом для погрешности формулы (4) на классах $W_1^{(1,1)}$ и $\mathfrak{M}_Q(S)$ справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}_n(W_1^{(1,1)};\mathfrak{M}_Q(S)) = \frac{F(0)}{2n} = \frac{1}{2n}\int_0^S q(x(t),y(t))dt.$$

Из общего вида квадратурной формулы (4) следует, что эта формула с равными коэффициентами, что облегчает ее применение в практических целях.

## Литература


1. Никольский С.М. Квадратурные формулы. - М.: Наука, 1979, 256с.
2. Шабозов М.Ш., Мирпоччоев Ф.М. - ДАН РТ, 2010, №6, Т.53. С. 415-419.

УДК 517.5

## О наилучшем приближении периодических функций в $L_2$

Олифтаев Н.Ф.

**(Таджикский национальный университет)**

**1.** Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ — множество положительных чисел вещественной оси; $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ — пространство $2\pi$-периодических измеримых функций, суммируемых с квадратом на $[0, 2\pi]$ с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Хорошо известно, что если $f \in L_2$ и

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

– формальное разложение $f$ в ряд Фурье, то её наилучшее приближение подпространством $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометрических полиномов порядка не более $n-1$ в метрике пространства $L_2$ равно

$$E_{n-1}(f)_2 = \inf\Big\{\|f - T_{n-1}\| : \ T_{n-1} \in \Im_{n-1}\Big\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\right\}^{1/2},$$

где

$$S_{n-1}(f; x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

— частная сумма порядка $\le n-1$ ряда Фурье функции $f$, а

$$\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f), \quad k \ge n, \ k, n \in \mathbb{N}.$$

Через $L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+; \ L_2^{(0)} = L_2)$ обозначим множество функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых $(r-1)$-я производная $f^{(r-1)}$ $(f^{(0)} = f)$ абсолютно непрерывна, а $r$-я производная $f^{(r)} \in L_2$. Модулем непрерывности $m$-го порядка функции $f \in L_2$ называют величину

$$\omega_m(f; t)_2 = \sup\Big\{ \|\triangle_h^m(f)\| : \ |h| \le t \Big\},$$

где

$$\triangle_h^m f(x) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} f(x + ih)$$

— конечная разность $m$-го порядка функции $f$ с шагом $h$.

Под неравенствами типа Джексона – Стечкина в рассматриваемом нормированном функциональном пространстве $X$ понимают соотношения, в которых величина наилучшего приближения функции $f \in X$ :

$$E_N(f)_X := E(f, \mathfrak{N}_N)_X = \inf\Big\{\|f - g\|_X : \ g \in \mathfrak{N}_N\Big\}$$

заданным $N$-мерным подпространством $\mathfrak{N}_N \in X$, оценивается через модуль непрерывности самой функции или некоторой её производной. При решении экстремальных задач теории аппроксимации периодических функций тригонометрическими полиномами в пространстве $L_2$ одним из наиболее важных является отыскание точных констант

$$\chi_{m,n,r}(t) := \sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\omega_m(f^{(r)};t/n)_2} :\ f \in L_2^{(r)};\ f^{(r)} \neq const\right\},$$

в неравенствах типа Джексона – Стечкина

$$E_{n-1}(f)_2 \le \chi\, n^{-r}\omega_m(f^{(r)};t/n)_2,\ f \in L_2^{(r)},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ t > 0.$$

В работах [1,2] Камен Г. Иванов ввёл в рассмотрение $\tau$-модули гладкости и изучил их свойства, а С.Б.Вакарчук [3] решил ряд экстремальных задач, а также нашёл точные значения различных $n$-поперечников для некоторых классов дифференцируемых функций в $L_2$. Пользуясь схемой рассуждения, изложенной в [4,5], здесь получены более полные результаты в этом направлении. Пусть $\lambda(x)$ — произвольная положительная $2\pi$-периодическая функция, а $w(x)$ — непрерывная неотрицательная функция периода $2\pi$. $\tau$-модулем гладкости $m$-го порядка функции $f \in L_{\max(p,p')}[0,2\pi]$ $(p,p' \ge 1)$ называют величину

$$\tau_m(f,w;\lambda)_{p,p'} = \left\|w(\cdot)\omega_m(f,\cdot;\lambda(\cdot))_{p'}\right\|_p,$$

где

$$\omega_m(f,x;\lambda(x))_{p'} = \left\{\frac{1}{2\lambda(x)}\int\limits_{-\lambda(x)}^{\lambda(x)} |\Delta_h^m f(x)|^{p'}\,dh\right\}^{1/p'}.$$

Условимся, что если $w(x) \equiv 1$, то вместо $\tau_m(f,1;\lambda)_{p,p'}$ будем писать просто $\tau_m(f;\lambda)_{p,p'}$. В [2] доказано, что если, например, $\lambda(x) \equiv u = const > 0$, $f \in L_p[0,2\pi]$, $w(x) \equiv 1$ и $p' \in [0,p], 1 \le p < \infty$, то

$$\tau_m(f;u)_{p,p'} \asymp \omega_m(f;u)_p,$$

где символ „$\asymp$“ означает соотношение слабой эквивалентности.

В связи с равенством (2) определённый интерес представляет отыскание точного значения величины

$$\widetilde{\chi}_{n,m,r,q}(\varphi;h)_{p'} = \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{2^{m/2}E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_m^q(f^{(r)};t)_{p',2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/q}}, \tag{1}$$

где $1 \le p' \le 2$, $0 < q \le 2$, $h > 0$ и $\varphi(t)$ – суммируемая на $[0,h]$ функция.

Следуя работе [3], введём обозначение

$$\mathcal{J}_m(v) = \int\limits_0^v (1-\cos\tau)^m d\tau.$$

Основным результатом работы является следующая общая

**Теорема 1.** *Пусть $m,n \in \mathbb{N}$, $0 < q \le 2$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < h \le \pi/n$, $\varphi(t) \ge 0$, $0 < t \le h$ – суммируемая на $[0,h]$ функция. Тогда имеют место неравенства*

$$\frac{1}{\beta_{n,m,r,q}(\varphi;h)} \le \widetilde{\mathcal{X}}_{n,m,r,q}(\varphi;h)_2 \le \frac{1}{\inf\limits_{n\le k<\infty}\beta_{k,m,r,q}(\varphi;h)},$$

$$\beta_{k,m,r,q}(\varphi;h):=\left(k^{rq}\int\limits_0^h\Big((kt)^{-1}\mathcal{J}_m(kt)\Big)^{q/2}\varphi(t)dt\right)^{1/q}.$$

Из теоремы 1 вытекает следующее

**Следствие 1.** *Пусть* $k,n,m\in\mathbb{N}$, $k\geq n$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<q\leq 2$, $\varphi(t)\geq 0$ *– суммируемая на* $(0,h]$ *функция,* $0<h\leq\pi/n$. *Тогда, если*

$$\inf\Big\{\beta_{k,m,r,q}(\varphi;h):\ k\geq n\Big\}=\beta_{n,m,r,q}(\varphi;h),$$

*то имеет место соотношение*

$$\widetilde{\mathcal{X}}_{n,m,r,q}(\varphi;h)_2=\Big\{\beta_{n,m,r,q}(\varphi;h)\Big\}^{-1}. \qquad (2)$$

*В частности, (2) выполняется для весовой функции*

$$\varphi(t):=\varphi_1(t)=(kt)^{q/2},\ n\leq k<\infty,\ k,n\in\mathbb{N}\ \text{ при }\ 1/r<q\leq 2,\ r\in\mathbb{N}.$$

**Теорема 2.** *Пусть* $m=1$, $n\in\mathbb{N}$, $0<q\leq 2$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<h\leq 3\pi/(4n)$, $\varphi(t)$ *– неотрицательная суммируемая на отрезке* $(0,h]$ *не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место равенство*

$$\widetilde{\mathcal{X}}_{n,1,r,q}(\varphi;h)_2=\left(n^{rq}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}. \qquad (3)$$

Согласно определению (1), равенство (3) перепишем в эквивалентном виде

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}}\frac{\sqrt{2}\,n^rE_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h\tau_1^q(f^{(r)};t)_{2,2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/q}}=\left(\int_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}.$$

Хорошо известно, что для функции $f\in L_2^{(r)}$ её промежуточные производные $f^{(r-s)}$ $(s=1,2,\ldots,r-1)$ принадлежат пространству $L_2$. Представляет интерес отыскание точных верхних граней величины $E_{n-1}(f^{(r-s)})_2$ на классе $L_2^{(r)}$. Подобная задача решалась в работе [6], когда гладкостная характеристика функций $f\in L_2^{(r)}$ задавалась специальным модулем непрерывности $m$-го порядка.

**Теорема 3.** *Пусть* $n\in\mathbb{N}$; $r\in\mathbb{Z}_+$; $s=\overline{0,r-1}$; $0<q\leq 2$; $0<h\leq 3\pi/(4n)$; $\varphi(t)\geq 0$ *– суммируемая на отрезке* $(0,h]$ *не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}}\frac{\sqrt{2}\,n^sE_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h\tau_1^q(f^{(r)};t)_{2,2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/q}}=\left(\int_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}.$$

*Если* $n \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $s = \overline{0, r-1}$; $q = 2$; $0 < h \le 3\pi/(4n)$ *и* $\varphi(t) \equiv 1$, *то*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq const}} \frac{n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_1^2(f^{(r)}; t)_{2,2} dt\right)^{1/2}} = \left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\}^{1/2},$$

*где* $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ *– интегральный синус. Если же* $n \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $s = \overline{0, r-1}$; $q = 2$; $0 < h \le 3\pi/(4n)$ *и* $\varphi(t) \equiv t$, *то справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq const}} \frac{n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h t\tau_1^2(f^{(r)}; t)_{2,2} dt\right)^{1/2}} = \frac{1}{h\sqrt{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2}}.$$

### Литература


1. Ivanov Kamen G. On a new characteristic of functions. **I** // Сердика Бълг. Мат. Списание. 1982. Т.8, №3. С. 262–279.
2. Ivanov Kamen G. On a new characteristic of functions. **II** // Direct and converse theorems for the best algebraic approximation in $C[-1;1]$ and $L_p[-1;1]$. Сердика Бълг. Мат. Студ. 1983. Т.5. С. 151-163.
3. Вакарчук С.Б. О наилучших полиномиальных приближениях в $L_2$ некоторых классов $2\pi$-периодических функций и точных значениях их $n$-поперечников // Мат. заметки. 2001. Т.70, №3. С. 334-345.
4. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в $L_2$ некоторых классов $2\pi$-периодических функций и точные значения их поперечников // Мат. заметки. 2011. Т. 90, №5. С. 764–775.
5. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Мат. заметки, 2010, т.87, №4, с.616-623.
6. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве $L_2$ // Мат. заметки, 2012, т.92, №4, с.497-514.


УДК 517.5

## Точные неравенства типа Джексона – Стечкина и значения поперечников некоторых классов функций в $L_2[0, 2\pi]$

Палавонов К.К.

**(Таджикский национальный университет)**

**1.** Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ — множество всех положительных чисел; $L_2 = L_2[0, 2\pi]$ — пространство суммируемых с квадратом по Лебегу вещественных $2\pi$-периодических функций $f$, имеющих конечную норму

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Символом $\mathcal{T}_{2n-1}$ обозначим подпространство всевозможных тригонометрических полиномов порядка не более $n$–1. Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right),$$

величина её наилучшего полиномиального приближения элементами подпространства $\mathcal{T}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) := E(f, \mathcal{T}_{2n-1}) = \inf\left\{\|f - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}\right\} =$$
$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\right\}^{1/2},$$

где

$$S_{n-1}(f; x) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right)$$

— частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f$; $\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f)$.

Под модулем непрерывности $m$-го ($m \in \mathbb{N}$) порядка функции $f \in L_2$ понимаем величину

$$\omega_m(f; t) := \sup\Big\{\|\Delta_h^m(f; \cdot)\| : \ |h| \le t\Big\},$$

где

$$\|\Delta_h^m(f; x)\| := \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x + kh)$$

— конечная разность $m$-го порядка функции $f \in L_2$ в точке $x$ с шагом $h$. Через $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$; $L_2^{(0)} \equiv L_2$) обозначим множество $2\pi$-периодических функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а производные $r$-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству $L_2$.

Неравенствами типа Джексона – Стечкина в широком смысле называют соотношения, в которых погрешность приближения индивидуальной функции в рассматриваемом банаховом пространстве оценивается через модуль непрерывности заданного порядка самой приближаемой функции или некоторой её производной. При решении экстремальных задач теории приближений в пространстве $L_2$, связанных с отысканием точных констант в неравенствах Джексона – Стечкина

$$E_{n-1}(f) \le \chi\, n^{-r} \omega_m(f^{(r)}; t/n), \tag{1}$$

где $t > 0$, $f \in L_2^{(r)}$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f^{(0)} \equiv f$, многими математиками рассматривались различные экстремальные характеристики, способствовавшие уточнению оценок сверху констант $\chi$.

Если ввести в рассмотрение усреднённую величину

$$W_{m,p,\varphi}(f^{(r)}; h) = \left\{\frac{\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}\right\}^{1/p},$$

то в связи с тем, что $\omega_m(f^{(r)}; t)$ является монотонно возрастающей функцией на отрезке

$(0,h]$ $(0<h\le\pi/n)$, какой бы не была суммируемая весовая функция $\varphi(t)\ge 0$ $(0\le t\le h)$, имеет место неравенство
$$W_{m,p,\varphi}(f^{(r)};h)\le\omega_m(f^{(r)};h).$$

Н.И. Черных [1] заметил, что при отыскании константы $\chi$ в неравенстве типа Джексона – Стечкина (1) функционал $W_{m,p,\varphi}(f^{(r)};h)$ предпочтительнее джексоновского функционала $\omega_m(f^{(r)};h)$. В связи со сказанным, определённый интерес представляет изучение экстремальной характеристики

$$\chi_{m,n,r,p}(h):=\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\ne const}}\frac{2^m n^r E_{n-1}(f)}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int\limits_0^h t\omega_m^p(f^{(r)},t)dt\right)^{1/p}},$$

содержащей усреднённый модуль непрерывности $m$-го порядка с весовой функцией $\varphi(t)=2th^{-2}$, где $0<t\le h$. Указанная весовая функция естественным образом появляется при установлении неулучшаемых неравенств между наилучшим полиномиальным приближением функции $f\in L_2^{(r)}$ и усреднённым значением модуля непрерывности $\omega_m^p(f^{(r)};t)$.

**Теорема 1.** *Пусть $m,n,r\in\mathbb{N}$, $1/r<p\le 2$. Тогда для любого числа $h$, удовлетворяющего условию $0<h\le\pi/n$, справедливо равенство*

$$\chi_{m,n,r,p}(h):=\left\{\int_0^h t\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}dt\right\}^{-1/p}.$$

**2.** Величины $b_n(\mathfrak{M},L_2)$, $d^n(\mathfrak{M},L_2)$, $d_n(\mathfrak{M},L_2)$, $\delta_n(\mathfrak{M},L_2)$, $\Pi_n(\mathfrak{M},L_2)$ называют соответственно бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным и проекционным $n$-поперечниками. Перечисленные $n$-поперечники монотонны по $n$ и в пространстве $L_2$ связаны соотношениями [2,3]:

$$b_n(\mathfrak{M},L_2)\le d^n(\mathfrak{M},L_2)\le d_n(\mathfrak{M},L_2)=\delta_n(\mathfrak{M},L_2)=\Pi_n(\mathfrak{M},L_2).$$

Для произвольного множества $\mathfrak{M}\subset L_2$ полагаем

$$E_{n-1}(\mathfrak{M}):=\sup\Big\{E_{n-1}(f):\ f\in\mathfrak{M}\Big\}$$

– наилучшее приближение множества $\mathfrak{M}\subset L_2$ подпространством $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометрических полиномов порядка $n-1$ размерности $2n-1$.

Непрерывную неотрицательную на полупрямой $[0,\infty)$ функцию $\Phi(x)$, такую, что $\Phi(0)=0$, будем называть мажорантой. Для произвольных чисел $m,r\in\mathbb{N}$, $1/r<p\le 2$ и $h\in\mathbb{R}_+$ введём в рассмотрение класс функций:

$$W_{m,p}^{(r)}(\Phi)=\left\{f\in L_2^{(r)}:\ \frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\omega_m^p(f^{(r)};t)dt\le\Phi^p(h)\right\}.$$

Справедлива следующая

**Теорема 2.** *Если для всех $\mu>0$, $m,r\in\mathbb{N}$, $1/r<p\le 2$ функция $\Phi(u)$ при любом $u\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\mu^{-2}\Phi^p(u)\int_0^{\mu\pi}t\left(\sin\frac{t}{2}\right)_*^{mp}dt\le\Phi^p(\mu u)\int_0^{\pi}t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt, \tag{2}$$

*то для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\gamma_{2n-1}(W^{(r)}_{m,p}(\Phi); L_2) = \gamma_{2n}(W^{(r)}_{m,p}(\Phi); L_2) =$$

$$= E_{n-1}(W^{(r)}_{m,p}(\Phi)) = 2^{-(m+3/p)}n^{-r}\left(\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} t(\sin t)^{mp}dt\right)^{-1/p},$$

*где $\gamma_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше $n$-поперечников. Множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (2), не пусто.*

В экстремальных задачах приближения периодических функций тригонометрическими полиномами в различных банаховых пространствах часто возникает необходимость отыскания точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на исследуемых классах функций. Аналогичная задача решена для изучаемых нами в этой статье классов функций. Решение получаем, как следствие из теоремы 2.

**Следствие.** *При выполнении условия теоремы 2, для любых $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства*

$$\sup\Big\{|a_n(f)| : \ f \in W^{(r)}_{m,p}(\Phi)\Big\} = \sup\Big\{|b_n(f)| : \ f \in W^{(r)}_{m,p}(\Phi)\Big\} =$$

$$= 2^{-(m+\frac{3}{p})}n^{-r}\left(\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} t(\sin t)^{mp}dt\right)^{-1/p}.$$


**Литература**

1. Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в $L_2$ // Мат. заметки. 1967. Т. 2, №5. С. 513–522.
2. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений// М.: МГУ, 1976. 325 с.
3. Pinkus A. $n$-Widths in Approximation Theory// Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo, 1985. 252 p.


УДК 517.5

## Оптимальные кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных

Парвонаева З.А., Алигаваров С.А.

**(Хорогский государственный университет им. М. Назаршоева)**

В заметке рассматривается экстремальная задача минимизации погрешности кубатурной формулы на некоторых классах функций многих переменных, задаваемых модулем непрерывности. Такая задача была решена Н.П. Корнейчуком. В данной заметке сохраняются все обозначения и постановки экстремальной задачи отыскания оптимальных кубатурных формул из работы [1] и приводится решение для других классов функций.

Пусть $f(x) := f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ определена и интегрируема в $m$-мерном параллелепипеде $Q = \{a_i \le x_i \le b_i; \ i = 1, 2, \ldots, m\}$ и

$$J(f) := \underset{(Q)}{\int\cdots\int} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\,dx_1dx_2\ldots dx_m = \int_{(Q)} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Любая кубатурная формула для приближённого вычисления интеграла (1) имеет вид

$$J(f) \approx L(f; P, X) = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu f(M_\nu) \tag{2}$$

и задаётся вектором коэффициентов и узлов

$$(P, X) = \{p_1, p_2, \dots, p_n; M_1, M_2, \dots, M_n\},$$

где $M_\nu = M(x_1^\nu, x_2^\nu, \dots, x_m^\nu)$ $(\nu = 1, 2, \dots, n)$ – произвольные точки области $Q$, а $p_\nu$ $(\nu = 1, 2, \dots, n)$ – произвольные действительные числа.

Через $\mathcal{A}$ обозначим всевозможные векторы $(P, X)$, где $P = \{p_\nu\}_{\nu=1}^n$, $p_\nu$ - любые числа, а векторы $X = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}, X_i = (x_i^1, \dots, x_i^{n_i})$ задаются $m$ произвольными системами чисел

$$a_i \le x_i^1 < x_i^2 < \dots < x_i^{n_i} \le b_i \ (i = 1, 2, \dots, m). \tag{3}$$

Узлы кубатурной формулы (2) являются точками

$$M_{k_1,\dots,k_m} = M(x_1^{k_1},\ x_2^{k_2}, \dots,\ x_m^{k_m}) \ \ (k_i = 1, 2, \dots, n_i;\ i = 1, 2, \dots, m)$$

решетки, определяемой системами чисел (3).

Кубатурная формула в этом случае имеет вид

$$J(f) \approx L(f; P, X) = \sum_{k_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{n_m} p_{k_1,\dots,k_m} f(M_{k_1,\dots,k_m}) \tag{4}$$

или сокращённо

$$J(f) \approx L(f; P, X) = \sum_{k=1}^{n} p_k f(M_k). \tag{4$'$}$$

Отметим, что кубатурная формула (4) (или (4)$'$) была введена и исследована в работе Н.П.Корнейчука [1] для некоторых классов функций, задаваемых модулями непрерывности. Отметим, что заданием множества векторов $\mathcal{A}$ определяется класс кубатурных формул, для которых $(P, X) \in \mathcal{A}$

Пусть

$$R(f; P, X) = |J(f) - L(f; P, X)|$$

– погрешность кубатурной формулы (4)$'$. Полагаем

$$R(\mathfrak{M}; P, X) = \sup\Big\{R(f; P, X)| : f \in \mathfrak{M}\Big\},$$

где $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций $f(x)$, интегрируемых в области $Q$. Задача состоит в отыскании величины

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}) = \inf\Big\{R(\mathfrak{M}; P, X) :\ (P, X) \in \mathcal{A}\Big\},$$

а также вектора $(\tilde{P}, \tilde{X}) \in \mathcal{A}$, для которого

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}) = R(\mathfrak{M}; \tilde{P}, \tilde{X}).$$

Кубатурная формула, определяемая вектором $(\tilde{P}, \tilde{X})$, является наилучшей для класса $\mathfrak{M}$ среди всех кубатурных формул, у которых $(P, X) \in \mathcal{A}$.

Здесь в качестве $\mathfrak{M}$ рассматривается класс $H_p^{\omega,m}$ $(1 \le p < \infty, m \in \mathbb{N})$ – функций $f(x) := f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, определенных в области $Q$ и таких, что для любых точек $M'(x_1^{'}, x_2^{'}, \dots, x_m^{'})$ и $M''(x_1^{''}, x_2^{''}, \dots, x_m^{''})$ из $Q$ выполняется неравенство

$$|f(M') - f(M'')| \le \omega[\rho_p(M', M'')], \tag{5}$$

где

$$\rho_p(M', M'') = \left\{\sum_{i=1}^{m} |x_i^{'} - x_i^{''}|^p\right\}^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

а $\omega(t)$ – заданный на отрезке $0 \le t \le d := \left\{\sum_{i=1}^{m}(b_i - a_i)^p\right\}^{1/p}, \ 1 \le p < \infty$ модуль непрерывности, то есть неубывающая полуаддитивная на отрезке $[0, d]$ функция, в нуле равная нулю.

Используя схему рассуждений, приведенную в [1], легко доказать следующее утверждение.

**Теорема.** *Среди всех кубатурных формул (4) с произвольными коэффициентами* $p_k$ *и узлами в точках произвольной решётки (3) наилучшей для класса* $H_p^{\omega,m}$ $(1 \le p < \infty)$ *при фиксированном векторе* $n = (n_1, \ n_2, \ldots, \ n_m)$ *является кубатурная формула*

$$J(f) \approx L(f; P, X) = \sum_{k=1}^{m} \tilde{p}_k f(\tilde{M}_k) \tag{6}$$

*с равномерной решёткой узлов*

$$\tilde{x}_i^{k_i} = a_i + (2k_i - 1)h_i, \ h_i = \frac{b_i - a_i}{2n_i}$$

$$(k_i = 1, 2, \ldots, n_i; \ i = 1, 2, \ldots, m)$$

*и равными весами*

$$\tilde{p}_k := p_{k_1,\ldots,k_m} = \prod_{i=1}^{m} \frac{b_i - a_i}{n_i} \quad (1 \le k_i \le n_i; \ i = 1, 2, \ldots, m).$$

*При этом для точной оценки погрешности формулы (6) на всем классе* $H_p^{\omega,m}$ $(1 \le p < \infty, \ m \in \mathbb{N})$ *имеет место равенство*

$$\mathcal{E}(H_p^{\omega,m}) = 2^m n_1 n_2 \ldots n_m \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} \ldots \int_0^{h_m} \omega\Big[(t_1^p + t_2^p + \cdots + t_m^p)^{1/p}\Big]\, dt_1 dt_2 \ldots dt_m. \tag{7}$$

*В частности, для класса Липщица с константой* $M$ *порядка* $\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$ *из (7) вытекает равенство*

$$\mathcal{E}(MH_p^{\alpha,m}) = 2^m n_1 n_2 \ldots n_m M \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} \ldots \int_0^{h_m} (t_1^p + t_2^p + \cdots + t_m^p)^{\alpha/p}\, dt_1 dt_2 \ldots dt_m.$$

## Литература

1. Корнейчук Н.П. Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных — Мат. заметки, 1968, т.3, №5, с.565-576.

УДК 517.5

# Неравенства типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана для аналитических функций одной переменной

Саидусайнов М.С.

**(Таджикский государственный университет коммерции, Душанбе)**

В экстремальных задачах теории функций важное место занимают неравенства между нормами последовательных производных или неравенство типа Колмогорова [1-3], имеющий вид

$$\left\|f^{(k)}\right\|_p \le M \left\|f\right\|_q^{\alpha} \cdot \left\|f^{(r)}\right\|_s^{\beta}, \tag{1}$$

где $(\alpha+\beta=1, \alpha>0,\ \beta>0,\ k<r,\ k,r\in\mathbb{N})$ и, ради краткости, положено $\|\cdot\|_{L_p[a,b]} = \|\cdot\|_p$ , $[a,b]$ – произвольный промежуток действительной оси.

Представляет определенный интерес получение аналогов неравенство (1) в банаховых пространствах аналитических в круге функций. В пространствах Харди $H_q(1\le q\le\infty)$ с нормой

$$\|f\|_p := \lim_{\rho\to 1-0} M_q(f;\rho) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt\right)^{1/q} \tag{2}$$

точные неравенства типа (1) в случае $q=2$ для производной по аргумента $f_a^{(r)} = \partial^r f(\rho e^{it})/\partial t^r$, $0\le t\le 2\pi$ доказаны С.Б. Вакарчуком [4]. Эти результаты в работе [5] были обобщены для весового пространства Бергмана $B_{q,\gamma}(1\le q\le\infty)$ с нормой [6]

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\int_0^1 \rho\gamma(\rho) M_q^q(\rho;f)d\rho\right)^{1/q} < \infty, \tag{3}$$

где $\gamma(\rho)$ – неотрицательная измеримая весовая функция.

Данная работа является продолжением и развитием работы [5]. Предварительно введём некоторые определения и обозначения. Множество аналитических в единичном круге $U := \{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$ обозначим $A(U)$. Через $\mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)}$ будем рассматривать класс функций, у которых $z^r f^{(r)} \subset B_{q,\gamma}$. Очевидно, что $\mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)} \subset B_{q,\gamma}$. Следовательно, для произвольной функции из $\mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)}$ при $q\ge 2$ имеем $z^r f^{(r)} \in B_{q,\gamma} \subset B_{2,\gamma}$.

Если функция $f(z)$ имеет разложения в ряд Тейлора вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \tag{4}$$

то дифференцированием $r$-раза будем иметь

$$z^r f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k z^k, \tag{5}$$

где ради краткости положено $\alpha_{kr} = k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)$.

Из равенств (4) и (5) применением равенство Парсеваля получаем

$$M_2^2(f;\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \rho^{2k},$$

$$M_2^2(z^r f^{(r)};\rho) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}|c_k|^2\rho^{2k}.$$

Имеет место следующая

**Лемма.** *Для любой функции* $f(z) \in \mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)}$, *у которой коэффициенты Тейлора* $c_k = 0$, $k=\overline{r-\nu, r-1}$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \le \nu \le r$, *справедливо неравенство*

$$M_2\left(z^{r-\nu}f^{(r-\nu)};\rho\right) \le \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}}\left(M_2\left(z^r f^{(r)};\rho\right)\right)^{1-\nu/r}\left(M_2\left(f;\rho\right)\right)^{\nu/r}. \tag{6}$$

**Доказательство.** Из равенства (2) и условия леммы запишем

$$M_2^2\left(z^{r-\nu}f^{(r-\nu)};\rho\right) = \sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r-\nu}^2|c_k|^2\rho^{2k}. \tag{7}$$

Откуда имеем:

$$M_2^2\left(z^{r-\nu}f^{(r-\nu)};\rho\right) = \sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}^{2(1-\nu/r)}\left(|c_k|\rho^k\right)^{2(1-\nu/r)}\left\{\frac{\alpha_{k,r-\nu}}{\alpha_{k,r}^{1-\nu/r}}\right\}^2\left(|c_k|\rho^k\right)^{2\nu/r}.$$

Воспользовавшись схемой рассуждений из [7], получаем

$$M_2^2\left(z^{r-\nu}f^{(r-\nu)};\rho\right) \le \left\{\sup_{k\ge r}\frac{\alpha_{k,r-\nu}}{\alpha_{k,r}^{1-\nu/r}}\right\}^2\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}^{2(1-\nu/r)}\left(|c_k|\rho^k\right)^{2(1-\nu/r)}\left(|c_k|\rho^k\right)^{2\nu/r}. \tag{8}$$

Применяя к правой части (8) неравенство Гёльдера для рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\beta_k \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^q\right)^{1/q},$$

где $\alpha_k, \beta_k \ge 0$, $k \in \mathbb{N}$; $p > 1$ и $1/p + 1/q = 1$, и полагая при этом, что $p = r/(r-\nu)$, $q = r/\nu$, будем иметь

$$M_2^2\left(z^{r-\nu}f^{(r-\nu)};\rho\right) \le$$
$$\le \left\{\sup_{k\ge r}\frac{\alpha_{k,r-\nu}}{\alpha_{k,r}^{1-\nu/r}}\right\}^2\left\{\sum_{k=r}^{\infty}|c_k|^2\rho^{2k}\right\}^{2\nu/r}\cdot\left\{\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}^2|c_k|^2\rho^{2k}\right\}^{2(1-\nu/r)}. \tag{9}$$

Используя тот факт, что [8]

$$\sup_{k\ge r}\frac{\alpha_{k,r-\nu}}{\alpha_{k,r}^{1-\nu/r}} = \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}}, \tag{10}$$

из (9) с учётом равенства (10) получаем

$$M_2\left(z^{r-\nu}f^{(r-\nu)};\rho\right) \le \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}}\left(M_2\left(z^r f^{(r)};\rho\right)\right)^{1-\nu/r}\cdot\left(M_2(f;\rho)\right)^{\nu/r},$$

чем и завершаем доказательство леммы.

Поскольку $z^r f^{(r)} \in B_{q,\gamma}$, то

$$\|z^r f^{(r)}\|_{B_{2,\gamma}} = \left(\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}^2|c_k|^2\int_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/2} < \infty$$

конечна, то тогда норма для промежуточных производных $z^{r-\nu}f^{(r-\nu)}$, $\nu=\overline{1,r-1}$ в пространстве $B_{2,\gamma}$ также будет конечна, а потому имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть $r\in\mathbb{N}, 1\le\nu\le r$ – натуральное число. Тогда для любой функции $f\in\mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, у которой коэффициенты Тейлора $c_k(f)=0,\ k=\overline{r-\nu,r-1}$, имеет место точное неравенство*

$$\|z^{r-\nu}f^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}}\le\frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}}\|f\|_{B_{2,\gamma}}^{\nu/r}\cdot\|z^rf^{(r)}\|_{B_{2,\gamma}}^{1-\nu/r}. \tag{11}$$

**Доказательство.** При $\nu=r$ неравенство (11) очевидно. Пусть функция $z^rf^{(r)}\in\mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)}$ и выполняются условия теоремы для коэффициентов Тейлора $c_k(f)$. В силу равенства Парсеваля имеем:

$$\|f\|_{B_{2,\gamma}}^2=\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2\int_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho, \tag{12}$$

$$\|z^{r-\nu}f^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}}^2=\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r-\nu}^2|c_k|^2\int_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho. \tag{13}$$

Равенство (13) запишем в следующем виде

$$\|z^{r-\nu}f^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}}^2=\int_0^1\rho\gamma(\rho)M_2^2(z^{r-\nu}f^{(r-\nu)};\rho)d\rho. \tag{14}$$

Применяя неравенство (6), из (14) получим

$$\|z^{r-\nu}f^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}}^2\le$$

$$\le\int_0^1\rho\gamma(\rho)\left\{\frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}}\right\}^2\left(M_2\left(z^rf^{(r)};\rho\right)\right)^{2(1-\nu/r)}\left(M_2\left(f;\rho\right)\right)^{2\nu/r}d\rho=$$

$$=\left\{\frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}}\right\}^2\int_0^1\left[\rho\gamma(\rho)M_2^2\left(z^rf^{(r)};\rho\right)\right]^{1-\nu/r}\cdot\left[\rho\gamma(\rho)M_2^2\left(f;\rho\right)\right]^{\nu/r}d\rho. \tag{15}$$

Полагая в правой части неравенства (15) $p'=r/(r-\nu),\ p=r/\nu$ и применяя неравенство Гёльдера для интегралов, с учётом определения нормы в пространстве $B_{2,\gamma}$, будем иметь:

$$\|z^{r-\nu}f^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}}\le\left\{\frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}}\right\}\times$$

$$\times\left(\int_0^1\rho\gamma(\rho)M_2^2\left(z^rf^{(r)};\rho\right)d\rho\right)^{\frac{1}{2}(1-\nu/r)}\cdot\left(\int_0^1\rho\gamma(\rho)M_2^2\left(f;\rho\right)d\rho\right)^{\frac{\nu}{2r}}=$$

$$=\frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}}\|z^rf^{(r)}\|_{B_{2,\gamma}}^{1-\nu/r}\cdot\|f\|_{B_{2,\gamma}}^{\nu/r},\ 1\le\nu\le r.$$

Покажем, что неравенство (11) является неулучшаемым для функции $f_0=z^r\in\mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)}$. Так как

$$\|f_0\|_{B_{2,\gamma}}=\left(\int_0^1\rho^{2r+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/2},$$

$$\|z^rf_0^{(r)}\|_{B_{2,\gamma}}=\alpha_{r,r}\left(\int_0^1\rho^{2r+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/2},$$

$$\|z^{r-\nu} f_0^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}} = \alpha_{r,\nu} \left( \int_0^1 \rho^{2r+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/2},$$

то поставляя соответствующие равенства в неравенство (11), убеждаемся, что оно обращается в равенство. Теорема 1 доказана.

Совокупность алгебраических комплексных полиномов степени $n$ обозначим

$$\mathcal{P}_n = \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,\ a_k \in C \right\}.$$

Величину

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma}} = \inf \left\{ \|f - p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma}} : p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1} \right\} \tag{16}$$

назовем наилучшим приближением функции $f(z) \in B_{q,\gamma}$ множеством полиномов $\mathcal{P}_{n-1}$. В работе [7] доказано, что

$$E_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}} = \|f - T_{n-1}(f)\|_{B_{2,\gamma}} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \cdot \int_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho) d\rho \right\}^{1/2}.$$

**Теорема 2.** *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $1 \le \nu \le r$ – натуральное число. Тогда для любого натурального числа $n > r$ и функций $f \in \mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)}$, у которых коэффициенты Тейлора $c_k(f) = 0$, $k = \overline{r-\nu, r-1}$, имеет место неравенство*

$$E_{n-r+k-1}(z^{r-\nu} f^{(r-\nu)})_2 \le \frac{\alpha_{n,r-\nu}}{\alpha_{n,r}^{1-\nu/r}} \left(E_{n-1}(f)_2\right)^{\nu/r} \cdot \left(E_{n-r-1}(z^r f^{(r)})_2\right)^{1-\nu/r}.$$

## Литература


1. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. - М. : Наука, 1976, 320 с.
2. Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г. Аппроксимация с ограничениями. - Киев: Наук.думка, 1982, 252 с.
3. Бабенко В.Ф., Корнейчук Н.П., Кофанов В.А., Пичугов С.А. Неравенства для производных и их приложения. - Киев: Наук.думка, 2003, 590с.
4. Вакарчук С.Б. О неравенствах типа Колмогорова для некоторых банаховых пространств аналитических функций // Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии. В сб. науч. работ Ин-та математики АН УССР - Киев, 1988, с.4-7.
5. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Неравенство типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана // ДАН Республики Таджикистан, 2007, т.50, №1, с.14-19.
6. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О наилучшем приближение некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $\mathcal{B}_{2,\gamma}$. – Докл. РАН, 2007, т.412, №4, с. 466-469.
7. Бабенко К.И. О наилучшем приближении одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР, 1958, т.22, №5, с.631-640.
8. Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации // Укр. мат. журн., 2011, т.63, №12, с.1579-1601.

УДК 517.5

# Наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых

Сангмамадов Д.С.

**(Институт предпринимательства и сервиса)**

Вопросы приближённого вычисления криволинейных интегралов первого типа для различных классов функций и кривых рассмотрены, например, в работах [1-4]. Здесь мы продолжим исследование в этом направлении.

Пусть функция $f(M) = f(x, y)$ определена и интегрируема вдоль кривой $\Gamma \subset R^2$. Введём в рассмотрение криволинейный интеграл первого типа

$$J(f;\Gamma) = \int_\Gamma f(M)ds = \int_\Gamma f(x,y)ds. \tag{1}$$

Предположим, что на кривой $\Gamma$ установлено положительное направление так, что положение точки $M = M(x, y)$ на кривой может быть определено длиной дуги $s = \smile{AM}$, отсчитываемой от начальной точки $A$. Тогда кривая $\Gamma$ параметрически выразится уравнениями

$$x = x(s),\ y = y(s),\ 0 \le s \le L, \tag{2}$$

а функция $f(x, y)$, заданная в точках кривой $\Gamma$, сведётся к сложной функции $f(x(s), y(s))$ от переменной $s$. В этом случае интеграл (1) запишется в виде следующего определенного интеграла

$$J(f;\Gamma) = \int_0^L f(x(s), y(s))ds. \tag{3}$$

Всякая квадратурная формула

$$J(f;\Gamma) \approx L_N(f,\Gamma,P,S) := \sum_{k=1}^{N} p_k f\left(x(s_k), y(s_k)\right) \tag{4}$$

для приближенного вычисления интеграла (3) задаётся векторами коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^N$ и узлов $S = \{s_k :\ 0 \le s_1 < s_2 < ... < s_{N-1} \le s_N \le L\}$, где $p_0, p_1, ..., p_N$ – произвольные действительные числа. При фиксированном $N \ge 1$ через $\mathcal{A}$ будем обозначать множество векторов коэффициентов и узлов $(P, S)$, либо некоторое его подмножество, определяемые теми или иными ограничениями на коэффициенты и узлы формулы (4) (например, требование точности формулы (4) на многочлены заданной степени, положительность коэффициентов и т.д.).

Погрешность кубатурной формулы (4) определим равенством

$$|R_N(f;\Gamma;P,S)| = |J(f;\Gamma) - L_N(f;\Gamma;P,S)|\,.$$

Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций $\{f(x(s), y(s))\}$, определенных в точках заданной кривой $\Gamma$ и интегрируемых как сложная функция параметра $s$ на отрезке $[0, L]$, то за величину, характеризующую точную оценку погрешности формулы (4) на всем классе $\mathfrak{M}$, примем величину

$$R_N(\mathfrak{M};\Gamma;P,S) = \sup\left\{|R_N(f;\Gamma;P,S)| : f \in \mathfrak{M}\right\}.$$

Пусть $\mathfrak{N}_L$ – класс кривых $\Gamma$, заданных параметрическими уравнениями (2), длина которых не превосходит $L$. Наибольшую погрешность квадратурной формулы (4) всего класса функций $\mathfrak{M}$ на классе кривых $\mathfrak{N}_L$ обозначим

$$R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_L;P,S)=\sup\left\{R_N(\mathfrak{M};\Gamma;P,S):\Gamma\in\mathfrak{N}_L\right\}.$$

Для того чтобы получить оптимальную квадратурную формулу на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}_L$, потребуем, чтобы формула (4) была точна для функции $f(x(s),y(s))=const$, то есть чтобы выполнялось условие

$$\sum_{k=1}^{N}p_k=L.$$

Требуется найти величину

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M};\,\mathfrak{N}_L)=\inf\{R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_L;P,S):(P,S)\in\mathcal{A}\}\tag{5}$$

и указать вектор $(P^0,S^0)$ $(P^0=\{p_k^0\},S^0=\{s_k^0\})$ из множества $\mathcal{A}$, на котором достигается точная нижняя грань в (5), т.е. выполняется равенство

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M};\,\mathfrak{N}_L)=R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_L;P^0,S^0)$$

Квадратурная формула (4) с узлами $s_k^0$ и коэффициентами $p_k^0$ даёт наименьшую на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}_L$ погрешность и называется *оптимальной* на указанных классах функций и кривых.

Конкретизируем класс кривых и класс функций, для которых найдём точные значения величины (5) для квадратурной формулы (4). Обозначим через $H^{\omega}[0,L]$ - множество функций $\varphi(t)\in C[0,L]$, удовлетворяющих условию $|\varphi(t')-\varphi(t'')|\le\omega\left(|t'-t''|\right)$, $t',t''\in[0,L]$, где $\omega(\delta)$ - заданный модуль непрерывности, то есть неубывающая, полуаддитивная функция, в нуле равная нулю. Через $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ обозначим класс гладких кривых $\Gamma\subset R^2$, заданных параметрическими уравнениями (2), у которых $x(s)\in H^{\omega_1}[0,L]$, а $y(s)\in H^{\omega_2}[0,L]$. Если $M'\overset{def}{=}M(x',y')\in R^2$, $M''\overset{def}{=}M(x'',y'')\in R^2$, то введём в рассмотрение следующие расстояния:

евклидово расстояние $\rho_1(M',M'')=\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}$;

хэммингово расстояние $\rho_2(M',M'')=|x'-x''|+|y'-y''|$;

расстояние Минковского $\rho_3(M',M'')=\max\left\{|x'-x''|,|y'-y''|\right\}$.

Через $\mathfrak{M}_{\rho_i}$, $(i=1,2,3)$ обозначим класс функций $f(M)=f(x,y)$, определенных на кривых $\Gamma\subset\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ и для любых двух точек $M',M''\in\Gamma$ удовлетворяющих условию $\Big|f(M')-f(M'')\Big|\le\rho_i(M',M'')$, $i=1,2,3.$

Таким образом, пишем $f(M)\in\mathfrak{M}_{\rho_1}$, если выполняется неравенства

$$\Big|f(M')-f(M'')\Big|\le\rho_1(M',M'')=\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}\le$$

$$\le\sqrt{\omega_1^2(|s'-s''|)+\omega_2^2(|s'-s''|)},\quad s',\,s''\in[0,L],$$

а если $f(M)\in\mathfrak{M}_{\rho_2}$, или $f(M)\in\mathfrak{M}_{\rho_3}$, то соответственно выполняются неравенства

$$\Big|f(M')-f(M'')\Big|\le\omega_1(|s'-s''|)+\omega_2(|s'-s''|),\quad s',\,s''\in[0,L],$$

$$\Big|f(M')-f(M'')\Big|\le\max\{\omega_1(|s'-s''|),\omega_2(|s'-s''|)\},\quad s',\,s''\in[0,L].$$

Для введённых выше классов функций и кривых справедлива

**Теорема.** *Среди всех квадратурных формул вида (4) с произвольными векторами коэффициентами и узлами*

$$P = \{p_k\}_{k=1}^{N},\ S = \{s_k:\ 0 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_N \le L\}$$

*наилучшей для классов функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}$, $(i = 1, 2, 3)$ и класса кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]$ является формула средних прямоугольников*

$$\int_0^L f\,(x(s),\, y(s))\, ds = \frac{L}{N}\sum_{k=0}^{N} f\left(x\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), y\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) + R_N(f). \qquad (6)$$

*При этом для погрешности квадратурной формулы (6) на указанных классах функций и кривых справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho_1}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]\right) = 2N\int_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)}ds,$$

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho_2}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]\right) = 2N\int_0^{L/(2N)} (\omega_1(s) + \omega_2(s))\, ds,$$

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho_3}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]\right) = 2N\int_0^{L/(2N)} \max\{\omega_1(s), \omega_2(s)\}ds.$$

Заметим, что непосредственной проверкой легко убедиться, что утверждение теоремы справедливо на классах функций $\{f(x(s), y(s))\}$, для которых в каждой точке $s \in [0, L]$ на кривых $\Gamma \subset \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ выражение

$$\left| f\left(x(s+s'), y(s+s')\right) + f\left(x(s-s'), y(s-s')\right) - 2f(x(s), y(s))\right|,$$

где $s \pm s' \in [0, L]$, не превосходит следующие мажоранты

$$2\sqrt{\omega_1^2(|s|) + \omega_2^2(|s|)},\quad 2\left[\omega_1(|s|) + \omega_2(|s|)\right] \text{ или } 2\max\{\omega_1(|s|), \omega_2(|s|)\}.$$

Эти классы функций соответственно обозначим $\mathfrak{M}_{2,\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$. Очевидно, что эти классы шире, чем классы функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}(i = 1, 2, 3)$, определённые на тех же кривых $\Gamma \subset \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$. Таким образом, например, из утверждения теоремы 1 сразу вытекает, что для погрешности квадратурной формулы (6) на классах функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}, \mathfrak{M}_{2,\rho_i}$ и кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ справедливо равенство

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho_i}, \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}\right) = \mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{2,\rho_i}, \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}\right),\ (i = 1, 2, 3). \qquad (7)$$

Не умаляя общности, приводим доказательство равенства (7) для классов $\mathfrak{M}_{\rho_1}$ и кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$. Для квадратурной формулы (4), заданной векторами коэффициентами $P^0 = \{p_k^0 : p_k^0 = L/N, k = 1, 2, \cdots, N\}$ и узлами

$$S^0 = \{s_k^0 : s_k^0 = (2k-1)L/(2N),\ k = 1, 2, \cdots, N\},$$

имеем:

$$R_N(f; \Gamma; P^0, S^0) =$$

$$= \mathcal{J}(f; \Gamma) - L_N(f; \Gamma; P^0, S^0) = \sum_{k=1}^{N}\int_0^{L/(2N)} \Big[f\left(x(s_k^0 + s), y(s_k^0 + s)\right) +$$

$$+f\left(x(s_k^0-s),y(s_k^0-s)\right)-2f\left(x(s_k^0),y(s_k^0)\right)\Big]ds.$$

Отсюда сразу следует, что

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{2,\rho_1},\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}\right)\le R_N\left(\mathfrak{M}_{\rho_1},\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};P^0,S^0\right)\le$$

$$\le 2N\int_0^{L/(2N)}\sqrt{\omega_1^2(s)+\omega_2^2(s)}ds=\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho_1},\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}\right),$$

а учитывая включение $\mathfrak{M}_{2,\rho_1}\supset\mathfrak{M}_{\rho_1}$, для произвольной кривой $\Gamma\subset\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ приходим к равенству

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{2,\rho_1},\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}\right)=\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho_1},\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}\right)=2N\int_0^{L/(2N)}\sqrt{\omega_1^2(s)+\omega_2^2(s)}ds.$$

В случае $\omega_1(s)=\omega_2(s)$, кривую $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ обозначим $\mathcal{T}^{\omega_1,2}$. Из приведённой выше теоремы вытекает

**Следствие.** *В условиях теоремы для классов функций* $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i=1,2,3)$ *и класса кривых* $\mathcal{T}^{\omega_1,2}$ *для погрешности формулы (6) справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho_1};\mathcal{T}^{\omega_1,2}[0,L]\right)=2\sqrt{2}N\int_0^{L/(2N)}\omega(s)ds,$$

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho_2};\mathcal{T}^{\omega_1,2}[0,L]\right)=4N\int_0^{L/(2N)}\omega(s)ds,$$

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho_3};\mathcal{T}^{\omega_1,2}[0,L]\right)=2N\int_0^{L/(2N)}\omega(s)ds.$$

## Литература


1. Вакарчук С.Б. Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Укр. матем. журнал. 1986. Т.38, №5. С.643-645.
2. Шабозов М.Ш., Мирпоччоев Ф.М. Оптимизация приближенного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // ДАН РТ, 2010, т.53, №6, с.415-419.
3. Сангмамадов Д.С. Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для классов функций и кривых, определяемых модулями непрерывности // ДАН РТ, 2011, т.54, №10, с.801-806.
4. Шабозов М.Ш., Файзмамадова Л.Г. Наилучшая формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Известия АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2012, №2, с.7-15.

УДК 517.5

# Точные верхние грани наилучших приближений некоторых классов дифференцируемых в смысле Вейля функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$

Темурбекова С.Д.

**(Институт математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан)**

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ - множество положительных чисел вещественной оси; $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ — пространство измеримых и суммируемых с квадратом по Лебегу $2\pi$-периодических функций $f$ с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} < \infty,$$

а ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

является рядом Фурье функции $f \in L_2$.

Через $L_2^{(\alpha)}\,(L_2^{(0)} \equiv L_2)$ обозначим множество функций $f$, у которых существует производная Вейля $f^{(\alpha)} \in L_2\,(f^{(0)} \equiv f)$. Если $S_{n-1}(f^{(\alpha)}; x)$ $(\alpha \geq 0)$ – частичная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f^{(\alpha)}$, то, как хорошо известно, наилучшее приближение функции $f^{(\alpha)} \in L_2$ тригонометрическими полиномами $T_{n-1}$ степени не выше $n-1$ равно

$$E_{n-1}(f^{(\alpha)}) = \|f^{(\alpha)} - S_{n-1}(f^{(\alpha)})\| = \left( \sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha} \rho_k^2 \right)^{1/2},$$

где $\rho_k^2 := a_k^2 + b_k^2,\ k \geq n$, а $\Im_{2n-1}$ — $(2n-1)$-мерное подпространство тригонометрических полиномов в $L_2$. Равенством

$$\omega_m(f, t) = \sup \left\{ \left\| \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x + kh) \right\| :\ |h| \leq t \right\}$$

определим модуль непрерывности порядка $m$ функции $f \in L_2$.

В данной работе мы решим задачу отыскания точных констант в неравенстве Джексона – Стечкина в пространстве $L_2$

$$E_{n-1}(f) \leq \chi_n^{\alpha} \omega_m(f^{(\alpha)}, t/n),\ f \in L_2^{(\alpha)},\ t > 0,$$

в которой погрешность приближения функций $f \in L_2^{(\alpha)}$ оценивается через модуль непрерывности $\omega_m(f^{(\alpha)}, t/n)$ производной $f^{(\alpha)}$ в смысле Вейля в $L_2$.

Сформулированная задача для целых $\alpha \in \mathbb{N}$ рассматривалась во многих работах (см., напр., [1-5]). Справедлива следующая

**Теорема 1.** *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}_+$; $m \in \mathbb{Z}_+$; $n \in \mathbb{N}$; $0 < p \leq 2$; $\varphi(t) \geq 0$ – *произвольная суммируемая на отрезке* $[0, h]$ $(h \in \mathbb{R}_+)$ *функция. Если при некотором* $\alpha \geq 1, 1/\alpha < p \leq 2$

*при всех* $t \in [0, h]$ *выполняется дифференциальное неравенство* $(\alpha p - 1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \geq 0$, *то справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(\alpha)} \\ f^{(\alpha)} \neq const}} \frac{2^m n^\alpha E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left\{\int_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} \varphi(t)dt\right\}^{-1/p}.$$

**Следствие 1.** *Пусть* $\varphi(t) = \sin^\gamma(\beta t/h)$, $0 < \beta \leq \pi$, $0 < t \leq h$, $0 < h \leq \pi/n$, $0 \leq \gamma \leq \alpha p - 1$, $1/\alpha < p \leq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \geq 1$.

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(\alpha)} \\ f^{(\alpha)} \neq const}} \frac{2^m n^\alpha E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}; t)\sin^\gamma(\beta t/h)dt\right)^{1/p}} = \left(\int_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} \sin^\gamma\left(\frac{\beta t}{h}\right)dt\right)^{-1/p}.$$

Это равенство непосредственным вычислением получено в [1].

**Следствие 2.** *Пусть* $\varphi(t) \equiv 1$, $0 < t \leq h$, $0 < h \leq \pi/n$, $0 < p \leq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(\alpha)}} \frac{2^m n^{\alpha - 1/p} E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}; t)dt\right)^{1/p}} = \left\{\int_0^{nh} \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp} dt\right\}^{-1/p}. \tag{1}$$

Соотношение (1) при целых $\alpha \in \mathbb{N}$ ранее доказано в работе [4].

В экстремальных задачах теории приближения периодических функций $f \in L_2$ с заданным классом функций $\mathfrak{M} \subset L_2$ часто связывают следующие его характеристики аппроксимации:

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} := E(\mathfrak{M}; \mathcal{T}_{2n-1}) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \inf_{T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f - T_{n-1}\|_{L_2} \tag{2}$$

— наилучшее приближение класса $\mathfrak{M}$ множеством $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометрических полиномов $T_{n-1}$ порядка $n-1$;

$$\gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} = \sup\left\{\|f\|_{L_2} : f \in \mathfrak{M}_n^\perp\right\}, \tag{3}$$

где $\mathfrak{M}_n^\perp$ — множество функций $f \in \mathfrak{M}$ таких, что

$$\int_0^{2\pi} f(t)\begin{Bmatrix}\sin kx \\ \cos kx\end{Bmatrix} dt = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Помимо величин (2) и (3) часто будет полезным отыскание величины

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} = \inf_{A \in \mathscr{L}_n} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f - Af\|_{L_2}, \tag{4}$$

где $\mathscr{L}_n$ — совокупность всех линейных операторов, переводящих функции $f \in L_2$ в тригонометрические полиномы порядка $n-1$.

Из определения величин (2) – (4) следует, что

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} \leq \gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} \leq \mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M}). \tag{5}$$

Второе неравенство в (5) вытекает из того факта, что если $f \in \mathfrak{M}_n$, то $Af \equiv 0$, и потому мы имеем

$$\sup\left\{\|f\|_{L_2} : f \in \mathfrak{M}_n^\perp\right\} \leq \sup\left\{\|f - Af\|_{L_2} : f \in \mathfrak{M}\right\}.$$

В ряде важных случаев, для конкретных классов функций все введённые выше аппроксимационные характеристики совпадают. Задача состоит в отыскании значений величин (2) - (4) для класса функций, естественно возникшего из утверждения теоремы 1.

Пусть $\Phi(t),\ 0 \le t < \infty$ — непрерывная неубывающая положительная функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Для $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < p \le 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $0 < h \le 2\pi$ введём в рассмотрение следующий класс функций:

$$W_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi) = \left\{ f \in L_2^{(\alpha)} : \left( \frac{1}{h} \int_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)_{L_2} dt \right)^{1/p} \le \Phi(h) \right\},$$

**Теорема 2.** *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $0 < p \le 2$. Тогда при любом $h \in (0, \pi/n]$ справедливы равенства*

$$E_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2} =$$
$$= 2^{-m-1/p} n^{-\alpha} \left( \frac{1}{nh} \int_0^{nh/2} \sin^{mp} t dt \right)^{-1/p} \Phi(h).$$

**Следствие 1.** *При выполнении всех условий теоремы 2 имеют место равенства*

$$E_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}\left(\frac{\pi}{n},\Phi\right)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}\left(\frac{\pi}{n},\Phi\right)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}\left(\frac{\pi}{n},\Phi\right)\right)_{L_2} =$$
$$= 2^{-m} n^{-n} \pi^{1/2p} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{mp}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{mp-1}{2}\right)} \right\}^{1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье $a_k(f)$ и $b_k(f)$ на различных классах функций в различных пространствах рассматривались, например, в работах [1-5]. Для введённого в этой работе класса функций данный вопрос также представляет определённый интерес. В самом деле, из утверждения теоремы 2 сразу получаем

**Следствие 2.** *Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда для коэффициентов Фурье $a_n(f)$ и $b_n(f)$ при любом $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)|, |b_n(f)| :\ f \in W_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right\} =$$
$$= 2^{-m} n^{-\alpha} \left( \frac{1}{nh} \int_0^{nh} \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \Phi(h).$$

## Литература


1. Есмаганбетов М.Г. Поперечники классов из $L_2[0,2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Мат. заметки, 1999, т.65, №6, с.816-820.
2. Вакарчук С.Б., Зубутная В.И. Точное неравенство типа Джексона-Стечкина в $L_2$ и поперечники функциональных классов // Мат. заметки, 2009, т.86, №3, с.328-336.
3. Вакарчук С.Б., Зубутная В.И. Неравенство типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве $L_2$ // Мат. заметки, 2012, т.92, №4, с.497-514.
4. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0,2\pi]$ // Мат. заметки, 2010, т.87, №4, с.616-623.

5. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в $L_2$ некоторых классов $2\pi$-периодических функций и точные значения их поперечников // Мат. заметки, 2011, т.90, №5, с.764-775.

УДК 517.5

## Неравенства типа Джексона – Стечкина для обобщённых модулей непрерывности и поперечники некоторых классов функций

Тухлиев К.

**(Худжандский государственный университет им. ак. Б. Гафурова)**

**1.** К настоящему времени известен целый ряд содержательных результатов, связанных с отысканием точных констант в неравенстве типа Джексона – Стечкина и вычислением точных значений различных $n$-поперечников функциональных классов, принадлежащих пространству измеримых $2\pi$-периодических функций $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ с нормой (см., например, [1, 2, 2–8, 10–14])

$$\|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

В последнее время появился ряд работ, в которых аналогичные задачи рассматриваются на конечном отрезке. Так например, А.Г.Бабенко [15] получил точное неравенство типа Джексона – Стечкина в случае приближения на отрезке $[0, \pi]$ действительных измеримых $2\pi$-периодических функций вида $f(x) = \varphi(\cos x)$ подпространством косинус-полиномов

$$\mathcal{F}_{n-1} := \left\{\mathcal{F} : \ \mathcal{F}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos kx, \ a_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

в пространстве $L^2_{\alpha,\beta}[0, \pi]$ $(\alpha > -1, \ \beta > -1)$ с нормой

$$\|f\|_{L^2_{\alpha,\beta}} = \left\{\int\limits_0^{\pi} f^2(x) \left(\sin\frac{x}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2\beta+1} dx\right\}^{1/2} < \infty.$$

Дальнейшее исследование этой задачи в общем случае при $\alpha = \beta \geq -1/2$ приведено в работе Д.В.Чертовой [16], а при любых $\alpha > \beta \geq -1/2$ Во Тхи Куком [17]. Для функции многих переменных в пространстве $L_p(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом указанная задача решена в работах [18,19]. С.Б.Вакарчук [4] доказал точное неравенство типа Джексона – Стечкина для приближения действительных измеримых на отрезке $[-1, 1]$ функций $f$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$ – алгебраических многочленов степени $\leq n-1$ в пространстве $L_2[-1, 1]$ с обычной нормой

$$\|f\|_{L_2[-1,1]} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} f^2(x)dx\right)^{1/2} < \infty.$$

В данной работе мы продолжим исследования в этом направление и докажем точные неравенства типа Джексона – Стечкина для наилучшего приближения действительных измеримых на отрезке $[-1, 1]$ функций $f$ с весом $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$ в гильбертовом пространстве $L_{2,\mu}[-1, 1] := L_2\Big((\sqrt{1-x^2})^{-1}; [-1, 1]\Big)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \left(\int_{-1}^{1} \mu(x) f^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

Введём обозначения: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R} := (0, \infty)$ – множество всех положительных чисел, $\mathbb{R}_+ := (-\infty, +\infty)$. Следуя работе А.В.Абилова и Ф.В.Абиловой [21], в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ рассмотрим оператор

$$F_h f(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(x\cos h + \sqrt{1-x^2}\sin h\right) + f\left(x\cos h - \sqrt{1-x^2}\sin h\right)\right], \tag{1}$$

который будем называть *оператором обобщённого сдвига,* и введём конечные разности первого и высших порядков равенствами

$$\widetilde{\Delta}_h^1(f;x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - E)f(x),$$

$$\widetilde{\Delta}_h^m(f;x) = \widetilde{\Delta}_h(\widetilde{\Delta}_h^{m-1}(f;\cdot);x) = (F_h - E)^m f(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}F_h^k f(x),$$

где $F_h^0 f(x) \equiv f(x),\ F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1}f(x)),\ k = 1, 2, \ldots, m;\ m \in \mathbb{N}$ и $E$ – единичный оператор в пространстве $L_2$. Определим обобщённый модуль непрерывности $m$-го порядка равенством

$$\Omega_m(f;t)_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \sup\Big\{\Big\|\widetilde{\Delta}_h^m(f;\cdot)\Big\|_{L_{2,\mu}[-1,1]} :\ |h| \le t\Big\}. \tag{2}$$

Пусть далее

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad T_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(k\arccos x),\ k = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

– ортонормированная система многочленов Чебышёва первого рода в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$. Тогда, как хорошо известно [22],

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)T_k(x), \tag{4}$$

есть ряд Фурье-Чебышёва функции $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$, а

$$c_k(f) = \int_{-1}^{1}\mu(x)f(x)\,T_k(x)dx \tag{5}$$

– коэффициенты Фурье-Чебышёва. Равенство в (4) понимается в смысле сходимости в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$.

Пусть теперь $\mathcal{D} = (1-x^2)\dfrac{d^2}{dx^2} - x\dfrac{d}{dx}$ – дифференциальный оператор второго порядка. Операторы высших порядков определим последовательно, полагая $\mathcal{D}^r f = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1}f)$, $(r = 2, 3, \ldots)$. Известно [22, с.47], что многочлены (3) удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)T_k''(x) - xT_k'(x) + k^2T_k(x) = 0, \tag{6}$$

а потому из (6) следуют равенства

$$\mathcal{D}T_k(x) = -k^2T_k(x), \ldots, \mathcal{D}^rT_k(x) = (-1)^r k^{2r}T_k(x). \tag{7}$$

В [21] доказано, что для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$, имеющей обобщённые производные в смысле Леви [23, с.172], коэффициенты Фурье-Чебышёва (5) ряда (4) удовлетворяют соотношениям

$$c_k(f) = (-1)^r\,k^{-2r}\,c_k(\mathcal{D}^r f),\ k = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

$$c_k(F_hf)=\cos kh\cdot c_k(f),\ k=1,2,\ldots, \tag{9}$$

где функция $F_hf$ – определена равенством (1).

Обозначим через $L_{2,\mu}^{(r)}[-1,1]$ $(r\in\mathbb{Z}_+, L_{2,\mu}^{(0)}[-1,1]=L_{2,\mu}[-1,1])$ – множество функций $f\in L_{2,\mu}[-1,1]$, у которых производная $\mathcal{D}^rf$ принадлежит пространству $L_{2,\mu}[-1,1]$. Всюду далее, вместо $L_{2,\mu}[-1,1], L_{2,\mu}^{(r)}[-1,1]$, $\|f\|_{L_{2,\mu}[-1,1]}$, ради сокращения записи, будем писать $L_{2,\mu}, L_{2,\mu}^{(r)}$, $\|f\|_{2,\mu}$ соответственно.

Пользуясь соотношениями (7) – (9) и равенством Парсеваля, из (4) для произвольной функции $f\in L_{2,\mu}^{(r)}$ легко получить равенство [21]

$$\|\Delta_h^m(\mathcal{D}^rf)\|_{2,\mu}^2=\sum_{k=1}^{\infty}(1-\cos kh)^{2m}k^{4r}c_k^2(f). \tag{10}$$

Учитывая соотношение (10), модуль непрерывности (2) запишем в виде

$$\Omega_m^2(\mathcal{D}^rf;t)_{2,\mu}=\sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}k^{4r}c_k^2(f)(1-\cos kh)^{2m}:\ |h|\le t\right\}. \tag{11}$$

Пусть

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}=\inf\Big\{\|f-p_{n-1}\|_{2.\mu}:\ p_{n-1}\in\mathcal{P}_{n-1}\Big\} \tag{12}$$

– наилучшее приближение функции $f\in L_{2,\mu}$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$. В [22, с. 26] доказано, что среди всех элементов $p_n\in\mathcal{P}_{n-1}$ частичная сумма $S_{n-1}(f;x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}c_k(f)T_k(x)x$ ряда (4) доставляет минимум величине (12). При этом

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}=\|f-S_{n-1}(f)\|_{2,\mu}=\left(\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)\right)^{1/2}. \tag{13}$$

Из (13), учитывая равенство (8), для произвольной $f\in L_{2,\mu}^{(r)}$ получаем

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\le n^{-2r}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^rf)_{2,\mu}. \tag{14}$$

Неравенство (14) обращается в равенство для функции $f_0(x)=T_n(x)$, принадлежащей множеству $L_{2,\mu}^{(r)}$, поскольку $\mathcal{P}_{n-1}(f_0)_{2,\mu}=1,;\ \mathcal{P}_{n-1}(\mathcal{D}^rf_0)_{2,\mu}=n^{2r}$.

В [24] при любых $m,r\in\mathbb{N}, r\ge m/2$ доказано, что

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(r)}\\ f\ne const}}\frac{n^{2r-m}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\displaystyle\int_0^{\pi/n}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^rf;t)_{2,\mu}\sin nt dt\right)^m}=\frac{1}{2^m}, \tag{15}$$

а в [25] при $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0\le h\le\pi/n$ получено равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(r)}\\ f\ne const}}\frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^{h}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^rf;t)_{2,\mu}dt\right)^m}=\left\{\frac{nh}{nh-\sin nh}\right\}^m. \tag{16}$$

В работе [1] Н.И.Черных заметил, что для произвольной суммируемой неотрицательной неэквивалентной нулю весовой функции $\varphi$ на отрезке $[0,h]$ $(0<h\le\pi)$ функционал

$$J_n(f;h)=\left\{\int\limits_0^h\omega_m^2(f;t)_2\varphi(t)dt\right\}^{1/2}\left\{\int\limits_0^h\varphi(t)dt\right\}^{-1/2},$$

меньше джексоновского функционала $\omega_m(f;h)_2$ и более естественен для характеристики наилучших приближений $E_{n-1}(f)$ периодических функций в $L_2[0,2\pi]$. Для рассматриваемой нами характеристики гладкости $\Omega_m$ наблюдается аналогичная ситуация. Очевидно, что без потери общности можно полагать, что при некотором $h\in(0,\pi/n]$ выполняется условие $\int\limits_0^h\varphi(t)dt\le1$ и тогда имеет место неравенство

$$\left\{\int\limits_0^h\Omega_m^p(f;t)_{2,\mu}\,\varphi(t)dt\right\}^{1/p}\le\Omega_m(f;h)_{2,\mu}.$$

В связи с этим обстоятельством, а также с целью обобщения равенств (15) и (16), введём в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(\varphi;h)=\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}}\frac{\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(\mathcal{D}^rf;t)_{2,\mu}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}},\tag{17}$$

где $n,m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $p\in\mathbb{R}_+$, $0<h\le\pi$, $\varphi(t)\ge0$ – суммируемая на отрезке $[0,h]$ не эквивалентная нулю функция.

**Теорема 1.** *Пусть $n,m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\le2$, $0<h\le\pi$, $\varphi(t)\ge0$ – суммируемая не эквивалентная нулю на отрезке $[0,h]$ функция. Тогда справедливы неравенства*

$$\Big\{\alpha_{n,m,r,p}(\varphi;h)\Big\}^{-1}\le\mathcal{M}_{n,m,r,p}(\varphi;h)\le\Big\{\inf_{n\le k<\infty}\alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h)\Big\}^{-1},\tag{18}$$

*где*

$$\alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h)=\left(k^{2rp}\int_0^h(1-\cos kt)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}.\tag{19}$$

*При этом, если*

$$\inf_{n\le k<\infty}\alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h)=\alpha_{n,m,r,p}(\varphi;h),\tag{20}$$

*то имеет место равенство*

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(\varphi;h)=\left(n^{2rp}\int_0^h(1-\cos nt)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}.\tag{21}$$

Отметим, что теорема 1 является своеобразным обобщением основных результатов работ [2, 14], полученных для наилучшего полиномиального приближения $2\pi$-периодических дифференцируемых функций, принадлежащих множеству $L_2^{(r)}[0,2\pi]$, на случай наилучшего полиномиального приближения функций $f$, принадлежащих множеству $L_{2,\mu}^{(r)}$.

**Следствие 1.** *Пусть весовая функция $\varphi(t)$, заданная на отрезке $[0,h]$, является неотрицательной и непрерывно дифференцируемой на нём. Если при всех $t\in[0,h]$ и $q\in[1/(2r),2]$, $r\in\mathbb{N}$ выполнено неравенство*

$$(2rq-1)\varphi(t)-t\varphi'(t)\geq 0, \tag{22}$$

*то справедливо равенство*

$$\inf_{n\leq k<\infty}\alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h)=\alpha_{n,m,r,p}(\varphi;h) \tag{23}$$

*и имеет место соотношение*

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(\varphi;h)=\Big\{\alpha_{n,m,r,p}(\varphi;h)\Big\}^{-1}. \tag{24}$$

**Следствие 2.** *Пусть весовая функция $\varphi(t)\equiv 1$ и числа $m,n,r\in\mathbb{N}$; $1/(2r)\leq p\leq 2$; $0<h\leq 3\pi/(4n)$. Тогда выполнено следующее равенство*

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(1;h)=\Big\{\alpha_{n,m,r,p}(1;h)\Big\}^{-1}:=\left\{n^{2rp}\int\limits_0^h(1-\cos nh)^{mp}dt\right\}^{-1/p}. \tag{25}$$

В самом деле, согласно неравенству (22), имеем

$$(2rp-1)\varphi(t)-t\varphi'(t)=2rp-1\geq 0,$$

а потому имеет место (25).

В равенстве (19) положим $h=a/n$, где $0<a\leq\pi$, $\varphi_*(t)=g(nt)$, $g(u)\geq 0$ – суммируемая не эквивалентная нулю на отрезке $[0,a]$ функция. Тогда

$$\alpha_{k,m,r,p}(g(nt);a/n)=\left\{k^{2rp}\int_0^{a/n}(1-\cos kt)^{mp}g(nt)dt\right\}^{1/p}=$$

$$=n^{2r-1/p}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^{2rp}\int_0^a\left(1-\cos\frac{k}{n}t\right)^{mp}g(t)dt\right\}^{1/p}. \tag{26}$$

Из равенства (26) следует, что

$$\inf\Big\{\alpha_{k,m,r,p}(g(n\cdot);a/n):\ n\leq k<\infty\Big\}=$$

$$=n^{2r-1/p}\inf_{x\geq 1}\left\{x^{2rp}\int_0^a(1-\cos xt)^{mp}g(t)dt\right\}^{1/p}:=$$

$$:=n^{2r-1/p}\cdot\inf_{x\geq 1}\beta_{m,r,p}(a;g,x). \tag{27}$$

Используя равенство (27) из утверждения теоремы 1, получаем

**Следствие 3.** *Пусть $r\in\mathbb{Z}_+$, $m,n\in\mathbb{N}$, $0<p\leq 2$, $0<a\leq\pi$, $g(t)$ есть неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,a]$ не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место неравенство*

$$\frac{1}{\beta_{m,r,p}(a;g,1)}\leq\sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(r)}\\ f\neq const}}\frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^a\Omega_m^p(\mathcal{D}^rf;t/n)_{2,\mu}\,g(t)dt\right)^{1/p}}\leq\frac{1}{\inf\limits_{1\leq x<\infty}\beta_{m,r,p}(a;g,x)}.$$

*Если при этом функция $g$ такова, что*

$$\inf_{1\le x<\infty}\beta_{m,r,p}(a;g,x)=\beta_{m,r,p}(a;g,1),$$

*то справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(r)}\\ f\neq const}}\frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^a\Omega_m^p(\mathcal{D}^rf;t/n)_{2,\mu}\,g(t)dt\right)^{1/p}}=\frac{1}{\beta_{m,r,p}(a;g,1)}.$$

**Следствие 4.** *Пусть $0<a\le\pi$, $m,n,r\in\mathbb{N}$. Если при всех $0<p\le 2$ функция $g(t):=t^{2rp-1}g_1(t)$, где $g_1(t)$ не возрастает, является неотрицательной суммируемой на отрезке $[0,a]$ функцией, то*

$$\inf_{1\le x<\infty}\beta_{m,r,p}(a;g,x)=\beta_{m,r,p}(a;g,1)\tag{28}$$

*и, следовательно, имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(r)}\\ f\neq const}}\frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^a\Omega_m^p(\mathcal{D}^rf;t/n)_{2,\mu}\,t^{2rp-1}g_1(t)dt\right)^{1/p}}=\frac{1}{\beta_{m,r,p}(a;t^{2rp-1}g_1(t),1)}.\tag{29}$$

При решении экстремальных задач теории приближений важную роль играют неравенства между нормами последовательных производных функций или неравенства типа Колмогорова [28] в различных банаховых пространствах. В пространстве $L_p[a,b]$, $1\le p\le\infty$, где $[a,b]$ – произвольный отрезок вещественной оси, неравенство Колмогорова имеет вид

$$\|f^{(s)}\|_{L_p[a,b]}\le M\|f^{(r)}\|^{\alpha}_{L_q[a,b]}\cdot\|f\|^{\beta}_{L_s[a,b]},\tag{30}$$

$$(\alpha+\beta=1,\ \alpha>0,\ \beta>0,\ s<r,\ s,r\in\mathbb{N},\ M>0).$$

Различные неравенства типа (30) приведены в монографии [28].

Поскольку для функции $f\in L_{2,\mu}^{(r)}$ её промежуточные производные $\mathcal{D}^sf$, $s=1,2,\ldots,r-1$ принадлежат пространству $L_{2,\mu}$, то представляет интерес изучение поведения наилучших приближений $\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^sf)$, $s=1,2,\ldots,r-1$ на классе $L_{2,\mu}^{(r)}$. С этой целью нам понадобится неравенство типа (30) в пространстве $L_{2,\mu}$. Справедлива следующая

**Теорема 2.** *Пусть $r,s\in\mathbb{N}$, $r>s$. Тогда для произвольной функции $f\in L_{2,\mu}^{(r)}$, $f\neq const$ справедливо точное на $L_{2,\mu}$ неравенство*

$$\|\mathcal{D}^sf\|_{2,\mu}\le\|\mathcal{D}^rf\|_{2,\mu}^{s/r}\cdot\|f\|_{2,\mu}^{1-s/r}.\tag{31}$$

**Следствие 5.** *При выполнении условий теоремы 2 имеет место точное неравенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^sf)_{2,\mu}\le\Big(\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^rf)_{2,\mu}\Big)^{s/r}\Big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{1-s/r},\tag{32}$$

*обращающееся в равенство для $f_0(x)=T_n(x)\in L_{2,\mu}^{(r)}$.*

Следующее утверждение базируется на неравенство (31).

**Теорема 3.** *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}; 0 < p \leq 2; 0 < h \leq 3\pi/(4n)$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $s = 0, 1, \ldots, r$; $\varphi(t)$ *– неотрицательная суммируемая на отрезке* $[0, h]$ *не эквивалентная нулю функция и выполняется неравенство (22). Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{n^{2(r-s)}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left\{\int_0^h (1-\cos nt)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \tag{33}$$

*В частности, если в (33) полагать* $p = 1/m$; $m \in \mathbb{N}$ *и* $\varphi(t) \equiv 1$, *то имеем*

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{n^{2(r-s)}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu}dt\right)^{m}} = \left\{\frac{n}{nh-\sin nh}\right\}^m. \tag{34}$$

Прежде чем сформулировать остальные результаты, напомним необходимые понятия и определения, используемые нами в дальнейшем.

Пусть $\mathcal{B}$ – единичный шар в $L_{2,\mu}$; $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество из $L_{2,\mu}$; $\Lambda_n \subset L_{2,\mu}$ – $n$-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_{2,\mu}$ – подпространство коразмерности $n$; $\mathscr{L} : L_{2,\mu} \to \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства $L_{2,\mu}$ в $\Lambda_n$; $\mathscr{L}^\perp : L_{2,\mu} \to \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования пространства $L_{2,\mu}$ на подпространство $\Lambda_n$. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu}) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0 :\ \varepsilon\mathcal{B}\cap\Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset L_{2,\mu}\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu}) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-g\|_{2,\mu} : g \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_n \subset L_{2,\mu}\right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu}) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathscr{L}f\|_{2,\mu} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathscr{L}L_{2,\mu} \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_{2,\mu}\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu}) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\|_{2,\mu} : f \in \mathfrak{M}\cap\Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset L_{2,\mu}\right\},$$

$$\pi_n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu}) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathscr{L}^\perp f\|_{2,\mu} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathscr{L}^\perp L_{2,\mu} \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_{2,\mu}\right\}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным* $n$*-поперечниками.* Поскольку $L_{2,\mu}$ является гильбертовым пространством, то справедливы следующие соотношения между перечисленными выше $n$-поперечниками (см., например, [15, 26]):

$$b_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) \leqslant d^n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) \leqslant d_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) = \delta_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) = \pi_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}). \tag{35}$$

При помощи специального модуля непрерывности (2) определим следующий класс функций. Пусть $\Psi(t),\ 0 \leq t < \infty$ – произвольная непрерывная неубывающая функция, такая, что $\Psi(0) = 0$. Символом $W_p^{(r)}(\Omega_m, \Psi)$, $1/(2r) < p \leq 2$, $r \in \mathbb{N}$ обозначим класс функций $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$, для которых при любом $t \in \mathbb{R}_+$ выполняется условие

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Omega_m^p(D^r f; \tau)_{2,\mu}\,d\tau \leq \Psi^p(t).$$

Полагаем также

$$(1-\cos t)_*^m = \left\{\ (1-\cos t)^m,\ \text{если } 0 < t \leq \pi;\ \ 2^m,\ \text{если } t \geq \pi\ \right\}. \tag{36}$$

**Теорема 4.** *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/(2r) < p \leq 2$ *и функция* $\Psi$ *при любых значениях* $t \in \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Psi(t)}{\Psi(\pi/n)}\right)^p \geq \frac{\pi}{nt}\int\limits_0^{nt}(1-\cos\tau)_*^{mp}d\tau\left(\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau\right)^{-1}. \tag{37}$$

*Тогда выполняются равенства*

$$\lambda_n(W_p^{(r)}(\Omega_m,\Psi);L_{2,\mu}) = \mathcal{E}_{n-1}(W_p^{(r)}(\Omega_m,\Psi))_{L_{2,\mu}} =$$

$$= \left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau\right\}^{-1/p} n^{-2r}\,\Psi(\pi/n), \tag{38}$$

*где* $\lambda_n(\cdot)$ *– любой из перечисленных выше* $n$*-поперечников, а*

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_p^{(r)}(\Omega_m,\Psi))_{L_{2,\mu}} \overset{def}{=} \sup\Big\{\,\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}:\ f \in W_p^{(r)}(\Omega_m,\Psi)\Big\}.$$

*Множество мажорант* $\Psi$, *для которых выполняется ограничение (37), не пусто.*

Функция $\Psi_*(t) := t^{\alpha/p}$, где

$$\alpha \overset{def}{=} \frac{\pi}{\displaystyle\int\limits_0^{\pi}\left(\sin\frac{\tau}{2}\right)^{2mp}d\tau} - 1$$

удовлетворяет условию (37). Из теоремы 4 вытекает

**Следствие 6.** *Для любых* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/(2r) < p \leq 2$ *справедливы равенства*

$$\lambda_n(W_p^{(r)}(\Omega_m,\Psi_*);L_{2,\mu}) = \mathcal{E}_{n-1}(W_p^{(r)}(\Omega_m,\Psi_*))_{L_{2,\mu}} =$$

$$= 2^m(\alpha+1)^{-1/p}\,\pi^{\alpha/p}\,n^{-(2r+\alpha/p)}.$$

**Теорема 5.** *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/(2r) < p \leq 2$. *Если функция* $\Psi$ *при любом* $t \in \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет условию (37) теоремы 3.1, то для всех* $s = 0, 1, \ldots, r$ *справедливы равенства*

$$\sup\Big\{\,\mathcal{E}_{n-1}(D^s f)_{2,\mu}:\ f \in W_p^{(r)}(\Omega_m,\Psi)\Big\} =$$

$$= n^{-2(r-s)}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau\right)^{-1/p}\Psi(\pi/n). \tag{39}$$

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в $L_2$ // Матем. заметки, 1967, т.2, №5, с.513-522.
2. Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из $L_2$ // Матем. заметки, 1976, т.20, №3, с.433-438.
3. Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из $L_2$ // Матем. заметки, 1979, т.25, №2, с.217-223.

4. Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве $L_2$ // Матем. заметки, 1978, т.24, №6, с.785-792.
5. Бабенко А.Г. О точной константе в неравенстве Джексона в $L^2$ // Матем. заметки, 1986, т.39, №5, с.651-664.
6. Шалаев В.В. "О поперечниках в $L_2$ классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журнал, 1991, т.43, №1, с.125-129.
7. Бабенко А.Г., Черных Н.И., Шевалдин В.Т. Неравенства Джексона – Стечкина в $L_2$ с тригонометрическим модулем непрерывности // Матем. заметки, 1999, т.65, №6, с.928-932.
8. Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из $L_2$ // Матем. заметки, 2005, т.78, №5, с.792-796.
9. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве $L_2$ // Мат. заметки, 2012, т.92, №4, с.497-514.
10. Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах $L_p$. Тула: ТулГУ, 1995, 192 с.
11. Есмаганбетов М.Г. Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Матем. заметки, 1999, т.65, №6, с.816-820.
12. Юдин В.А. К теоремам Джексона в $L_2$ // Матем. заметки, 1987, т.41, №1, с.43-47.
13. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки, 2010, т.87, №4, с.616-623.
14. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в $L_2$ некоторых классов $2\pi$-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки, 2011, т.90, №5, с.764-775.
15. Бабенко А.Г. Точное неравенство Джексона – Стечкина в пространстве $L^2$-приближений на отрезке с весом Якоби и проективных пространствах // Известия РАН, серия матем., 1998, т.62, №6, с.27-52.
16. Чертова Д.В. Теоремы Джексона в пространствах $L_p$, $1 \leq p \leq 2$ с периодическим весом Якоби // Известия ТулГУ. Естественные науки, 2009, вып.1, с.5-27.
17. Кук Во Тхи. Операторы обобщённого сдвига в пространствах $L_p$ на торе с весом Якоби и их применение // Известия ТулГУ. Естественные науки, 2012, вып.1, с.17-43.
18. Иванов А.В., Иванов В.И. Теория Данкля и теорема Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Труды ИММ УрО РАН, 2010, т.16, №4, с.180-192.
19. Иванов А.В., Иванов В.И. Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Матем. заметки, 2013, т.94, №3, с.338-348.
20. Вакарчук С.Б. О неравенствах типа Джексона в $L_2$ и точных значениях $n$-поперечников функциональных классов // Укр. матем. вiсник, 2006, т.3, №1, с.116-133.
21. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Об одной квадратурной формуле // Журнал выч. матем. и мат. физ., 2002, т.42, №4, с.451-458.
22. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979, 416 с.
23. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969.
24. Тухлиев К. О верхних гранях отклонения некоторых классов функций от их частичных сумм рядов Фурье – Чебышёва в пространстве $L_2$ // ДАН Респ. Таджикистан, 2013, т.56, №8, с.606-611.
25. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. $\mathcal{K}$-функционалы и точные значения $n$-поперечников некоторых классов функций в пространстве $L_2\Big((\sqrt{1-x^2})^{-1};\Big)$ // Известия ТулГУ, 2014, вып.1, ч.1, с.83-97.
26. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ, 1976, 325 с.

27. Pinkus A. $n$-Widths in Approximation Theory – Berlin: Springer-Verlag, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985, 252 p.
28. Бабенко В.Ф., Корнейчук Н.П., Кафанов В.А., Пичугов С.А. Неравенства для производных и их приложения – Киев: Наукова думка, 2003, 590 с.

УДК 517.5

# О наилучшем приближении дифференцируемых функций суммами Фурье-Чебышёва и неравенства Джексона-Стечкина в пространстве $L_{2,\mu}$

Тухлиев К., Бекназаров Дж.Х.

**(Худжандский государственный университет им. ак. Б. Гафурова)**

При решении экстремальных задач теории приближения дифференцируемых периодических функций $f \in L_2[0, 2\pi]$ часто используют различные обобщённые модули непрерывности (см., например, [1, 2] и приведённую там литературу). Как правило, во многих случаях это нововведение продиктовано специальными условиями рассматриваемых задач и позволяет получать совершенно новые результаты, связанные с сущностью исследуемых проблем. При аппроксимации непериодических функций алгебраическими полиномами в работах [3] и [4] предложены различные модификации классического модуля непрерывности.

Экстремальные задачи о наилучшем приближении дифференцируемых функций $f \in L_{2,\mu}[-1, 1]$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{2,\mu}} = \left( \int_{-1}^{1} \mu(x) f^2(x) dx \right)^{1/2} := \left( \int\limits_{-1}^{1} \frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \right)^{1/2}$$

были рассмотрены, например, в работе [5]. Настоящая статья является продолжением работы [5] и в ней сохраняются обозначения и определения, принятые в указанной выше работе. Рассмотрим следующую экстремальную характеристику

$$\mathcal{K}_{n,m,r,p}(h) = \sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{2^m n^{2r} \mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left( \dfrac{2}{h^2} \displaystyle\int\limits_{0}^{h} t \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} \, dt \right)^{1/p}},$$

где $m, n, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, $1/(2r) < p \leq 2$, $h \in \mathbb{R}$.

**Теорема 1.** *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, $1/(2r) < p \leq 2$, $h \in (0, \pi]$. *Тогда справедливо равенство*

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p}(h) = \left( \frac{2}{h^2} \int\limits_{0}^{h} t \left( \sin \frac{nt}{2} \right)^{2mp} dt \right)^{-1/p}.$$

Обозначим через $b_n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu})$, $d_n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu})$, $\delta_n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu})$, $d^n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu})$, $\pi_n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu})$ соответственно бернштейновский, колмогоровский, линейный, гельфандовский и проекционный $n$-поперечники выпуклого центрально-симметричного компакта $\mathfrak{M}$ в пространстве $L_{2,\mu}$. Известно, что между указанными $n$-поперечниками выполняются неравенства:

$$b_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) \leqslant d^n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) \leqslant d_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) = \delta_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) = \pi_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}).$$

Пусть $\Phi(t)$, $0 \le t < \infty$ – произвольная непрерывная неубывающая функция, такая, что $\Phi(0) = 0$. Символом $W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)$, $1/r < p \le 2$, $r \in \mathbb{N}$ обозначим класс функций $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$, для которых при любом $h \in \mathbb{R}_+$ выполняется условие

$$\frac{1}{h}\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu}\, dt \le \Phi^p(h).$$

Полагаем также

$$(1-\cos t)_*^m = \Big\{\ (1-\cos t)^m,\ \text{если } 0 < t \le \pi;\quad 2^m,\ \text{если } t \ge \pi\ \Big\}.$$

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_{m,p}^{(r)}(\Omega_m, \Phi))_{L_{2,\mu}} \stackrel{def}{=} \sup\Big\{\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}:\ f \in W_{m,p}^{(r)}(\Omega_m, \Phi)\Big\}.$$

**Теорема 2.** *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/(2r) < p \le 2$ и функция $\Phi$ при любом $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Phi(t)}{\Phi(\pi/n)}\right)^p \ge \left(\frac{\pi}{nh}\right)^2 \int_0^{nh} (1-\cos t)_*^{mp} dt \left(\int_0^{\pi} (1-\cos t)^{mp} dt\right)^{-1}. \tag{1}$$

*Тогда выполняются равенства*

$$\lambda_n(W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi); L_{2,\mu}) = \mathcal{E}_{n-1}(W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi))_{L_{2,\mu}} =$$

$$= 2^{-(m+3/p)} n^{-2r} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \left(\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} t(\sin t)^{2mp} dt\right)^{-1/p},$$

*где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше $n$-поперечников.*

*Множество функций $\Phi$, удовлетворяющих условию (1), не пусто. Этому условию удовлетворяет, например, функция*

$$\Phi_*(h) = h^{\alpha/p}, \quad \text{где} \quad \alpha = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\int_0^{\pi/2} t\ (\sin t)^{2mp}\, dt\right)^{-1} - 2 \quad (0 < \alpha < 2mp).$$

**Теорема 3.** *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/(2r) < p \le 2$. Если функция $\Phi$ при любом $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию (1) теоремы 2, то при всех $s = 0, 1, \ldots, r$ имеют место равенства*

$$\sup\Big\{\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}:\ f \in W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)\Big\} =$$

$$= 2^{-(m+2/p)} n^{-2(r-s)} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \left(\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} t\ (\sin t)^{2mp}\, dt\right)^{-1/p}.$$

## Литература

1. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в $L_2$ // Сибир. матем. журнал, 2011, т.52, №6, с.1414-1427.

2. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве $L_2$ // Мат. заметки, 2012, т.92, №4, с.497-514.
3. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Об одной квадратурной формуле // Журнал выч. матем. и мат. физ., 2002, т.42, №4, с.451-458.
4. Вакарчук С.Б. О неравенствах типа Джексона в $L_2[-1,1]$ и точных значениях $n$-поперечников функциональных классов // Укр. матем. журнал, 2006, т.3, №1, с.116-133.
5. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. $\mathcal{K}$-функционалы и точные значения $n$-поперечников некоторых классов из $L_2\Big((1-x^2)^{-1/2};[-1,1]\Big)$ – Изв. ТулГУ. Естест. науки, 2014, вып.1, ч. 1, с. 83-97.

УДК 517.5

## Наилучшая квадратурная формула для приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода

Файзмамадова Л.Г.

**(Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан)**

В работах [1-3] рассматривается вопрос приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода для различных классов функций, определенных на заданной кривой Γ, по которой вычисляется криволинейный интеграл. Здесь мы для некоторых классов функций и классов кривых находим наилучшие квадратурные формулы. Следуя указанным работам, введем в рассмотрение квадратурную формулу

$$\int_{\Gamma} f(M)ds = \sum_{k=1}^{N} p_k f(M_k) + R_N(f;\Gamma), \tag{1}$$

где $f(M) = f(x,y)$, $M_k \in \Gamma$, $k = \overline{1,N}$. Сумму $\sum\limits_{k=1}^{N} p_k f(M_k)$, состоящую из линейной комбинации конечного числа значений подынтегральной функции, назовём квадратурной суммой, а $P = \{p_k\}_{k=1}^N$, $M = \{M_k\}_{k=1}^N$ - векторами коэффициентами и векторами узлами, $R_N(f;\Gamma) = R_N(f;\Gamma,P,M)$ - погрешность квадратурной формулы (1) на функцию $f$, заданную и определённую вдоль кривой Γ. Если на кривой Γ установлено положительное направление так, что положение точки $M = M(x,y)$ определяется длиною дуги $s = \breve{AM}$, отсчитываемой от начальной точки $A$, то, как хорошо известно, кривая Γ параметрически выразится уравнениями

$$x = x(s), y = y(s),\ 0 \le s \le L. \tag{2}$$

В этом случае функция $f(x,y) \equiv f(x(s),y(s))$ и квадратурная формула (1) при помощи разбиения отрезка $[0,L]$ точками

$$0 \le s_1 < s_2 < \cdots < s_{N-1} < s_N \le L$$

запишется в виде

$$\int_0^L f(x(s),y(s))ds = \sum_{k=1}^{N} p_k f\left(x(s_k),y(s_k)\right) + R_N\left(f;\Gamma,\{p_k\},\{s_k\}\right). \tag{3}$$

При фиксированном $N$ формула (3) задается векторами-коэффициентами $P = \{p_k\}_{k=1}^N$ и векторами-узлами $S = \{s_k\}_{k=1}^N$ и её остаток

$$R_N(f;\Gamma;P,S) = \int_0^L f(x(s),y(s))ds - \sum_{k=1}^N p_k f\left(x(s_k),y(s_k)\right),$$

имеет вполне определенное числовое значение. Если $\mathfrak{M}$ - некоторый класс функций $\{f(x(s),$ $y(s)\}$, определенных в точках кривой $\Gamma$ с параметрическими уравнениями (2) и интегрируемых как сложная функция $F(s) := f(x(s),y(s))$ параметра $s \in [0,L]$, то за величину, характеризующую точную оценку погрешности на всем классе $\mathfrak{M}$ на заданной кривой $\Gamma$, примем величину

$$R_N(\mathfrak{M};\Gamma;P,S) = \sup\left\{|R_N(f;\Gamma;P,S)| : f \in \mathfrak{M}\right\}.$$

Пусть $\mathfrak{N}_Q(L)$ - класс плоских спрямляемых кривых $\{\Gamma\}$ с непрерывной кривизной, расположенных в области $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le L^2\}$, длина которых равно $L$. Обозначим через $W_p^{(1)}(K;Q) := W^{(1)}L_p(K;Q)$, $1 \le p \le \infty$ – класс функций $\{f(x(s),y(s))\}$, у которых почти всюду в области $Q$ существуют частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ с ограничением

$$\|gradf(x(\cdot),y(\cdot))\|_{L_{p[0,L]}} = \left(\int_0^L \left|\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right|^p ds\right)^{1/p} \le K,$$

где, как обычно,

$$\|grad\, f(x(s),y(s))\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial y}\right)^2}$$

при условии , что $\left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2 = 1.$

Через $W_{0,p}^{(1)}(K;Q)$ обозначим множество функций $f \in W_p^{(1)}(K;Q)$, удовлетворяющих условию $f(x(0),y(0)) = 0$. Всюду далее под $\mathfrak{M}$, подразумевая класс $W_{0,p}^{(1)}(K;Q)$, за величину, характеризующую наибольшую погрешность квадратурной формулы (3) на классе функций $\mathfrak{M}$ и классе $\mathfrak{N}_Q(L)$, длина которых не превосходит $L$, следует взять величину

$$R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);P,S) = \sup\left\{R_N(\mathfrak{M};\Gamma;P,S) : \Gamma \subset \mathfrak{N}_Q(L)\right\}. \tag{4}$$

Если $A$ - множество всевозможных векторов $(P,S)$ – коэффициентов и узлов формулы (4), то требуется найти величину

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L)) = \inf\left\{R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);P,S) : (P,S) \subset A\right\}. \tag{5}$$

Если существуют векторы коэффициентов и узлов $(P^{(0)},S^{(0)}) = \left(\{p_k^0\}_{k=1}^N, \{s_k^0\}_{k=1}^N\right)$, для которых выполняется равенство

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L)) = R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);P^0,S^0),$$

то квадратурная формула (3) с вектором $(P^0,S^0)$ называется наилучшей (или оптимальной ) квадратурной формулой на классах функций $W_{0,p}^{(1)}(K;Q)$, $1 \le p \le \infty$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$, а вектор $(P^0,S^0)$ называется наилучшим или оптимальным вектором коэффициентов и узлов.

Приводим решение сформулированной задачи (5) для случая $p = 1,2,\infty$.

**Теорема.** *Среди всех квадратурных формул вида (3) наилучшей на классах функций* $W^{(1)}_{0,p}(K;Q)$ *при* $p=1,2$ *и* $p=\infty$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L))$ *является формула*

$$\int_0^L f\left(x(s),y(s)\right)ds=$$

$$=\frac{2L}{2N+1}\cdot\sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{2kL}{2N+1}\right),y\left(\frac{2kL}{2N+1}\right)\right)+R_N(f). \tag{6}$$

*При этом точная оценка погрешности формулы (6) на указанных классах функций и кривых равна*

$$\mathcal{E}_N(W^{(1)}_{0,1}(K;Q),\mathfrak{N}_Q(L))=\frac{KL^2}{(2N+1)\sqrt{3}},$$

$$\mathcal{E}_N\left(W^{(1)}_{0,2}(K;Q),\mathfrak{N}_Q(L)\right)=\frac{KL^{3/2}}{(2N+1)\sqrt{3}},$$

$$\mathcal{E}_N\left(W^{(1)}_{0,\infty}(K;Q),\mathfrak{N}_Q(L)\right)=\frac{KL^2}{2(2N+1)}.$$

### Литература


1. Вакарчук С.Б. Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Укр. матем. журнал, 1986, т.38, №5, с.643-645.
2. Шабозов М.Ш., Мирпоччоев Ф.М. Оптимизация приближенного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // ДАН РТ, 2010, т.53, №6, с.415-419.
3. Сангмамадов Д.С. Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для классов функций и кривых, определяемых модулями непрерывности // ДАН РТ, 2011, т.54, №10, с.801-806.


УДК 517.5

## О приближении суммами Фурье – Чебышёва и поперечники некоторых классов функций в $L_{2,\mu}$


Фарайдунов О.К.

**(Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан)**


В работе [1] нами найдены точные значения величины наилучшего приближения функции $f$ алгебраическими многочленами степени $\le n-1$ в гильбертовом пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ с весом Чебышёва $\mu(x)=1/\sqrt{1-x^2}$ на некоторых классах функций, задаваемых обобщёнными модулями непрерывности, и даны их приложения к оценке погрешности квадратурной формулы Эрмита – Чебышёва. Здесь мы, сохраняя обозначения работы [1], продолжим исследования в этом направлении. Напомним, что норма в $L_{2,\mu}[-1,1]$ определяется равенством

$$\|f\|_{2,\mu}:=\left(\int_{-1}^{1}\mu(x)f^2(x)dx\right)^{1/2}<\infty,$$

а величина наилучшего приближения $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$ алгебраическими полиномами степени $n-1$

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} = \inf_{p_{n-1}} \|f - p_{n-1}\|_{2,\mu} = \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\right)^{1/2},$$

где $c_k(f)$ — коэффициенты Фурье - Чебышёва определены соотношением

$$c_k(f) = \int_{-1}^{1} \mu(x) f(x) T_k(x) dx, \tag{1}$$

$T_k(x) = \sqrt{2/\pi}\,\cos(k \arccos x)$ $(k = 1, 2, ...)$ – многочлен Чебышёва первого рода. Между коэффициентами (1) функции $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$ и соответствующими коэффициентами $c_k(\mathcal{D}^r f)$, где $\mathcal{D}$ – дифференциальный оператор второго порядка

$$\mathcal{D} = (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx},$$

имеется следующая связь [2]:

$$c_k(f) = (-1)^r k^{-2r} c_k(\mathcal{D}^r f), \quad k = 1, 2, ...$$

Через $L_{2,\mu}^{(r)}$ – обозначим множество функций $f(x)$, имеющих обобщённые производные в смысле Леви [3, с.172], таких, для которых $\|\mathcal{D}^r f\|_{2,\mu} < \infty$.

В [3] доказано, что для обобщённого модуля непрерывности $m$–го порядка справедливо равенство

$$\Omega_m^2(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} = \sup\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(1-\cos kh)^{2m} k^{4r} c_k^2(f) : |h| \le t\right\}.$$

**Теорема 1.** *Пусть $m \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ и $0 < t \le \pi/n$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ имеет место точное неравенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \left\{\frac{n}{nt - \sin nt}\right\}^m \cdot \frac{1}{n^{2r}} \cdot \left(\int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)_{2,\mu} dh\right)^m. \tag{2}$$

*Неравенство (2) обращается в равенство для функции*

$$f_0(x) = T_n(x) \in L_{2,\mu}^{(r)}[-1,1].$$

Под $b_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu})$, $d_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu})$, $\delta_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu})$, $d^n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu})$, $\Pi_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu})$ будем понимать бернштейновский, колмогоровский, линейный, гельфандовский и проекционный $n$-поперечники. Указанные $n$-поперечники в $L_{2,\mu}$ связаны следующими соотношениями [4,5]:

$$b_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) \le d^n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) \le d_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) = \delta_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) = \Pi_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}).$$

Величина

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{2,\mu} := \sup\{\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} : f \in \mathfrak{M}\}$$

есть наилучшее приближение множества $\mathfrak{M}$ подпространством $\mathcal{P}_n$ – алгебраических многочленов степени не более $n-1$.

Непрерывную возрастающую на полусегменте $[0,\infty)$ функцию $\Phi$, такую, что $\Phi(0)=0$, будем называть мажорантой. Множество всех мажорант обозначим символом $\mathfrak{N}$. Через $\mathfrak{N}_k$, где $k\in\mathbb{N}$, обозначим совокупность мажорант $\Phi\in\mathfrak{N}$, для которых выполняются условия [6]:

1) $t_k^{-1}\Phi(t_1)\le t_2^{-k}\Phi(t_2)$, если $0<t_1<t_2\le\pi$;

2) $\lim\limits_{t\to 0+0} t^{-k}\Phi(t)=0$.

Для произвольных чисел $r,m\in\mathbb{N}, m\ge r$ и $0<h\le 2\pi$ введём в рассмотрение класс функций:

$$W^{(r)}(\Omega_m,\Phi):=\left\{f\in L_{2,\mu}^{(r)}:\ \int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}dt\le\Phi(h)\right\},$$

где можоранта $\Phi\in\mathfrak{N}_1$. Справедлива следующая

**Теорема 2.** *Пусть мажоранта $\Phi\in\mathfrak{N}_1$ для произвольной $h\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi\big(\pi/(2n)\big)}\ge\frac{2}{\pi-2}\cdot\int\limits_0^{nh}(1-\cos t)_* dt, \tag{3}$$

$$(1-\cos t)_*=\Big\{1-\cos t,\ \textit{если}\ 0\le t\le\pi;\ 2,\ \textit{если}\ t>\pi\Big\}.$$

*Тогда для любых чисел $m,n\in\mathbb{N}$ и $r\in\mathbb{Z}_+$ справедливы равенства*

$$\gamma_n\big(W^{(r)}(\Omega_m,h),L_{2,\mu}\big)=\mathcal{E}_{n-1}\big(W^{(r)}(\Omega_m,\Phi)\big)_{2,\mu}=\left\{\frac{2n}{\pi-2}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}^m\cdot\frac{1}{n^{2r}},$$

*где $\gamma_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше $n$-поперечников. Множество мажорант, удовлетворяющих условию (3), не пусто.*

### Литература


1. Фарайдунов О.К. Об оценке погрешности квадратурной формулы Эрмита – Чебышёва. — ДАН Республики Таджикистан, 2013, т.56, №10.
2. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Об одной квадратурной формуле. — ЖВМ и МФ, 2002, т.42, №4, с.451-458.
3. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969, 500 с.
4. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений.- М.: МГУ, 1976, 325 с.
5. Pinkus A. $n$-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer – Verlag, 1985, 292 p.
6. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в $L_2$. – Analysis Mathematica, 2012, v.38, 147-159.

УДК 517.5

# Наилучшие приближения дифференцируемых функций в пространстве $L_2$

Фарозова А.Д.

**(Хорогский государственный университет им. М. Назаршоева)**

Пусть $L_2 = L_2[0, 2\pi]$ – пространство измеримых и суммируемых с квадратом $2\pi$-периодических функций $f(x)$ с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

и рядом Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right).$$

Хорошо известны свойства минимальности частичных сумм

$$S_{n-1}(f;x) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right)$$

ряда Фурье функции $f(x)$, которые состоят в том, что наилучшее приближение функции $f(x)$ в $L_2$ посредством полиномов вида

$$T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\right)$$

реализуются частичной суммой $S_{n-1}(f;x)$:

$$E_{n-1}(f) = \inf_{T_{n-1}} \|f - T_{n-1}\| = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\right\}^{1/2},$$

где $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $k \geq n$. Обозначим через $L_2^{(r)}(r \in \mathbb{Z}_+; L_2^{(0)} = L_2)$ множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а производные $r$-го порядка $f^{(r)}(x) \in L_2$. Пусть

$$\omega(f;x) := \sup\Big\{\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\| : \ |h| \leq \delta\Big\}$$

– модуль непрерывности функции $f(x) \in L_2$. Приведённый ниже класс функций из $L_2$ характеризуется модулем непрерывности $r$-й производной, а структурные свойства класса – быстротою стремления к нулю усреднённого значения модуля непрерывности $r$-й производной $\omega(f^{(r)}, \delta)$.

Известно, что для функции $f \in L_2^{(r)}$ её промежуточные производные $f^{(r-s)}$, $s = 0, 1, ..., r$ принадлежат пространству $L_2$. Представляет интерес найти точные неравенства между величиной наилучших приближений $E_{n-1}(f^{(r-s)})$ и усреднённой величиной модуля непрерывности $\omega(f^{(r)}; t)$ производной $f^{(r)}(x) \in L_2$.

**Теорема 1.** *Для произвольной функции $f(x) \in L_2^{(r)}$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и $s = 1, 2, ..., r$ справедливо точное неравенство*

$$E_{n-1}(f^{(r-s)}) \leq \frac{1}{4n^{s-1}} \int\limits_0^{\pi/n} \omega(f^{(r)}; t)dt, \tag{1}$$

*и равенство достигается для функции $f_0(x) = a\cos(nx + b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.*

**Следствие 1.** *В условиях теоремы 1 при всех $s = 1, 2, ..., r$ выполняется равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq const}} \frac{n^{s-1}\, E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\int\limits_0^{\pi/n} \omega(f^{(r)}; t)dt} = \frac{1}{4}. \tag{2}$$

В данной работе для некоторых классов функций, не зависящих от значений $n$, найдены точные значения различных $n$-поперечников.

Обозначим через $b_n(\mathfrak{M}, L_2)$, $d^n(\mathfrak{M}, L_2)$, $d_n(\mathfrak{M}, L_2)$, $\lambda_n(\mathfrak{M}, L_2)$, $\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2)$ соответственно бернштейновский, гельфандовский, колмогоровский, линейный, проекционный $n$-поперечники. Указанные величины монотонно убывают по возрастанию $n$ и удовлетворяют соотношения [1]

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d^n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \lambda_n(\mathfrak{M}, L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}, L_2). \tag{3}$$

Если $\mathfrak{M}$ – некоторое множество из $L_2$, то полагаем

$$E_{n-1}(\mathfrak{M}) := \sup\Big\{E_{n-1}(f): \ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Введём также обозначение

$$(\sin t)_* := \Big\{\sin t, \text{ если } 0 \leq t \leq \pi/2; \ 1, \text{ если } t > \pi/n\Big\}. \tag{4}$$

Для произвольных $r \in \mathbb{N}$ и $h \in \mathbb{R}_+$ введём класс функций

$$W^{(r)}(\Phi) = \left\{ f \in L_2^{(r)}: \ \frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega(f^{(r)}; t)dt \leq \Phi(h) \right\},$$

где $\Phi(u)$ – произвольная неотрицательная выпуклая вниз для $u \geq 0$ функция, такая, что $\lim\limits_{u\to 0+0} \Phi(u) = \Phi(0) = 0$.

**Теорема 2.** *Пусть функция $\Phi(u)$ при любых $n \in \mathbb{N}$ и $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)} \geq \frac{\pi}{nh} \int\limits_0^{nh/2} (\sin t)_* dt. \tag{5}$$

*Тогда справедливы равенства*

$$\delta_n(W_n^{(r)}(\Phi), L_2) = E_{n-1}(W_n^{(r)}(\Phi)) = \frac{\pi}{4n^r}\, \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{6}$$

*Множество функций $\Phi$, удовлетворяющих неравенству (5), не пусто.*

Указанному условию удовлетворяет, например, функция $\Phi_*(u) = u^\alpha$, где $\alpha = \pi/2 - 1$. Из теоремы 2 вытекают следующие утверждения.

**Следствие 2.** *Если выполнены все условия теоремы 3, то имеют место равенства*

$$\delta_n(W_n^{(r)}(\Phi_*), L_2) = E_{n-1}(W_n^{(r)}(\Phi_*)) = \frac{1}{4}\cdot \pi^{\pi/2} n^{-(r-1)-\pi/2}.$$

**Следствие 3.** *Для верхних граней модулей косинус-коэффициентов Фурье $a_k(f)$ и синус-коэффициентов Фурье $b_k(f)$ на классе $W^{(r)}(\Phi)$ имеют место равенства*

$$\sup\Big\{|a_n(f)|:\ f(x)\in W^{(r)}(\Phi)\Big\} =$$

$$= \sup\Big\{|b_n(f)|:\ f(x)\in W^{(r)}(\Phi)\Big\} = \frac{\pi}{4n^r}\cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Следствие 3 доказывается по схеме рассуждений из работы [2].

### Литература


1. Pinkus A. $n$-Widths in Approximation Theory, Ergeb. Math. Grenzgeb. Springer-Verlag, Berlin, 1985, 292 p.
2. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в $L_2$ // Analysis Mathematica, 2012, т.38, с.147-159.


УДК 517.512

## Аналог теоремы Пэли для некоторых классов почти-периодических функций

Хасанов Ю.Х.[†], Ахмадиев М.Г.[‡]

**([†]Российско-таджикский (славянский) университет, Душанбе)**
**([‡]Казанский государственный технологический университет, Россия)**

Известно [1, с.210], что если $f(x) \in L_2[a, b]$и $\{c_n\}$ - ее коэффициенты Фурье по любой ортонормированной системе $\{\phi_n(x)\}$, то имеет место неравенство Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2 dx,$$

и это неравенство превращается в равенство, если система полна. Напротив, если дана последовательность чисел $\{c_n\}$, для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty,$$

то найдется $f(x) \in L_2[a, b]$, для которой, эти числа будут коэффициентами Фурье и имеет место равенство Парсеваля

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

Естественно возникает вопрос, если $p$ – любое число, лишь бы $p > 1$, и известно, что $f(x) \in L_p$, то что можно сказать об ее коэффициентах Фурье? И наоборот, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p < +\infty,$$

то существует ли функция, имеющая эти $\{c_n\}$ своими коэффициентами Фурье, и какова степень ее суммируемости?

Ответы на эти вопросы для случая тригонометрической системы даются теоремой Хаусдорфа – Юнга [2, с.197], для общей ортогональной – теоремой Рисса [1, с.211].

**Теорема** (Хаусдорфа - Юнга).

**1).** *Пусть* $f(x) \in L_p(0,1) \cdot 1 < p < 2,\ q > 2$ и

$$c_n = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ ...), \tag{1}$$

т.е.$c_n$- *ее коэффициенты Фурье по ортонормированной на (0, 1) системе* $\{e^{2\pi i n t}\}$.Тогда

$$\|c_n\|_q \leqslant \|f\|_p \,.$$

**2).** Если $c_n\,(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ ...)$ - *последовательность чисел, для которых* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|_p < +\infty$, *то существует такая* $f(t) \in L_q(0,\ 1)$, *для которой выполнено условие (1) и*

$$\|f\|_q \leqslant \|c_n\|_p \,.$$

**Теорема** (Ф.Рисса). Пусть$\{\phi_n(t)\}$ *ортонормированная система, состоящая из функций, ограниченных в своей совокупности*

$$|\phi_n(t)| \leqslant M, \quad a \leqslant t \leqslant b, \quad n = 1,\ 2,\ ...$$

**1).** Если $f \in L_p(a,\ b)$, *то коэффициенты Фурье*

$$c_n = \int_a^b f \overline{\phi_n} dt \tag{2}$$

*от* $f(t)$ *по системе* $\{\phi_n(t)\}$ *удовлетворяют условию*

$$\|c_n\|_q \leqslant M^{2/p-1} \|f\|_p \,.$$

**2.** *Если для последовательность чисел* $\{c_n\}$ имеем $\|c_n\|_{L_p} < +\infty$, *то существует функция* $f(t) \in L_q(a,\ b)$, *удовлетворяющая (2) для всех* $n$ *и такая, что*

$$\|f\|_q \leqslant M^{2/p-1} \|c_n\|_p \,.$$

Наряду с этими утверждениями существует теорема Пэли, которая определяет связи между степенью суммируемости функции и ее коэффициентами Фурье.

Если $c_1,\ c_2,\ ...$ - любая последовательность чисел (действительных или комплексных), то будем обозначать через $\gamma_1,\ \gamma_2,\ ...,\ \gamma_n,\ ...$ числа $|c_1|,\ |c_2|,\ ...\ |c_n|\ ,\ ...$, расположенные в порядке убывания; если несколько чисел $|c_n|$ равны между собой, то в последовательности $\gamma_n$ будет соответствующее количество повторяющихся членов

**Теорема** (Пэли). Пусть $\{\phi_n(x)\}$ - ортонормированная система на $[a,b]$ и $|\phi_n(x)| \leqslant M$ $(n = 1,\, 2,\, ...)$, $a \leqslant x \leqslant b$.

**1).** Если1 $< p \leqslant 2$, $f(x) \in L_p$ $c_1,\, c_2,\, ...,\, c_n\, ,...$ - *ее коэффициенты Фурье по системе* $\phi_n(x)$, то

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^p \, n^{p-2} \right\}^{1/p} \leqslant A_p \left\{ \int_a^b |f|^p \, dx \right\}^{1/p},$$

*где* $A_p$ *зависит только от* $p$ *и* $M$.

**2).** *Если* $q \geqslant 2$ и $c_1,\, c_2,\, ...,\, c_n\, ,...$ - *последовательность чисел, для которой* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^q \, n^{q-2} < +\infty$, *то существует функция* $f(x) \in L_q(a,\, b)$, *для которой числа* $c_n$ *являются коэффициентами Фурье по системе* $\{\phi_n(x)\}$ и

$$\left\{ \int_a^b |f(x)|^q \, dx \right\}^{1/q} \leqslant B_p \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^q \, n^{q-2} \right\}^{1/q},$$

*где* $B_q$ *зависит только от* $q$ *и* $M$.

Аналогичные результаты нами получены в пространствах почти-периодических в смысле Безиковича и Степанова функций.

Известно [3, с.249], что $B_p$ $(p \geqslant 1)$ является полным пространством. Т.е. пусть дана последовательность $f_1(x),\; f_2(x),\, ...$, которая $B_p$- сходится, т.е. для которой $\overline{M}\{|f_n(x) - f_m(x)|\} \to 0$ при $n, m \to \infty$.

Можно показать существование функции $f(x)$, к которой последовательность $\{f_n(x)\}$ $B_p$ – сходится.

При $p = 2$ для $B_2$ пространств так же, как и в случае периодических функций, имеет место аналог теоремы Рисса-Фишера и равенство Парсеваля.

При $p > 2$ справедливо следующее утверждение, являющееся аналогом теоремы Пэли в случае периодических функций.

**Теорема 1**. *Пусть задан тригонометрический ряд*

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \exp(i\lambda_k x), \tag{3}$$

где $\Lambda\,\{\lambda_k\}$- *произвольное счетное множество действительных чисел. Если при некотором* $p > 2$

$$\sigma_p = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^p \, n^{p-2} < \infty, \tag{4}$$

*то в пространстве* $B_p$ *найдется функция* $f(x)$, *для которой ряд (3) будет ее рядом Фурье, т.е.*

$$A_k = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) \exp(-i\lambda_k x) dx$$

*и*

$$D_{B_p}\,\{f(x)\} \leqslant C_p \sigma_p^{1/p}.$$

Заметим, что, так как из условия (4) вытекает сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k|^2,$$

то на основании аналога теоремы Рисса-Фишера [3, с.252] в пространстве $B_2$ найдется функция $f(x)$, для которой ряд (3) будет ее рядом Фурье.

**Теорема 2**. *Пусть задан ряд (3), где* $\Lambda\{\lambda_k\}$ *- последовательность чисел, удовлетворяющая при некотором* $\alpha > 0$ *для всех* $n$

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > \alpha.$$

*Если при некотором* $p > 2$ *выполнено условие (4), то в пространстве* $S_p$ *найдется функция* $f(x)$*, для которой* $\{A_k\}$ *будут ее коэффициентами Фурье и*

$$D_{S_p}\{f(x)\} \leqslant C_p \cdot \sigma_p^{1/p},$$

где

$$D_{S_p}\{f(x)\} = \sup_x \left( \frac{1}{l} \int\limits_x^{x+l} |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Под $S_p$ – пространством (пространство почти-периодических функций Степанова) понимается совокупность функций, для которых

$$D_{S_p}\{f(x)\} < \infty,$$

и можно указать тригонометрическую сумму

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k \exp(i\lambda_k x)$$

таких, что

$$\lim_{n\to\infty} D_{S_p}\{f(x) - P_n(x)\} = 0.$$

### Литература


1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961.
2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965, том 1.
3. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. М.: Гостехиздат, 1947.

УДК 517.5

# Аппроксимация периодических функций и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве $L_2$

Хоразмшоев С.С.

**(Таджикский технический университет, Душанбе, Таджикистан)**

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Обозначим

$$L_2 := L_2[0, 2\pi] = \left\{ f : \ \|f\| := \|f\|_{L_2} = \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

а через $L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{N})$ - множество $2\pi$-периодических функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а производные $f^{(r)} \in L_2$. Пусть

$$\mathcal{T}_{n-1} = \left\{ T_n(x) : \quad T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right\}$$

– подпространство тригонометрических полиномов порядка $\leq n-1$. Хорошо известны свойства минимальности частичных сумм

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ряда Фурье функции $f(x)$, которые состоят в том, что наилучшее приближение функции $f \in L_2$ подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ реализуется частичной суммой $S_n(f; x)$ :

$$E_{n-1}(f) = \inf \left\{ \|f - T_{n-1}\| : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{n-1} \right\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \right\}^{1/2},$$

где $\rho_k^2 \overset{def}{=} a_k^2 + b_k^2, \quad k = n, n+1, \ldots .$

Модуль непрерывности $m$-го порядка функций $f \in L_2$ обозначим через

$$\omega_m(f, t) = \sup \left\{ \|\Delta_h^m f(\cdot)\| : \ |h| \leq t \right\}, \tag{1}$$

где

$$\Delta_h^m(f) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x + kh).$$

В работах [1,2] отмечено, что для оценки наилучших приближений $2\pi$-периодических функций $f \in L_2$, наряду с величиной (1), используют следующую усредненную характеристику гладкости

$$\Omega_m(f; t) = \left\{ \frac{1}{t^m} \int_0^t \cdots \int_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m f(\cdot)\|^2 dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/2}, \tag{2}$$

где $t > 0$; $\overline{h} := (h_1, h_2, \ldots, h_m)$, $\Delta_{\overline{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$, которую назовем обобщенным модулем непрерывности $m$-го порядка.

Используя обобщённый модуль непрерывности (2), можно решить ряд экстремальных задач теории полиномиального приближения в $L_2$ [1-3].

В этом сообщении мы вводим в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\chi_{m,n,r,p}(h) = \sup\left\{\frac{2^{m/2}n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h t\,\Omega_m^p(f^{(r)},t)dt\right)^{1/p}}:\ f\in L_2^{(r)};\ f^{(r)}\neq const\right\}, \tag{3}$$

где $m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ 1/r<p\leq 2$ и $h>0$ - произвольное число.

Отметим, что аппроксимационные характеристики вида (3) для модулей непрерывности (1) рассмотрены в работах [4,5].

**Теорема 1.** *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+, 1/r<p\leq 2$ и $h$ – произвольное число, удовлетворяющее условию $0<h\leq\pi/n$. Тогда имеют место равенства*

$$\chi_{m,n,r,p}(h) = \left\{\int_0^h t\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}.$$

**Следствие.** *В утверждении теоремы 1 при любом $0<h\leq\pi/n$ справедливы равенства*

$$\chi_{m,n,r,2/m}(h) = \left\{\frac{2n^2}{(nh)^2-2(1-\cos nh)}\right\}^{m/2}. \tag{4}$$

Отметим, что равенство (4) ранее другим путём получено в [3].

Через $b_n(\mathfrak{M},L_2)$, $d^n(m,L_2)$, $d_n(\mathfrak{M},L_2)$, $\delta_n(m,L_2)$ и $\Pi_n(\mathfrak{M},L_2)$ обозначим соответственно бернштейновский, гельфандовский, колмогоровский, линейный и проекционный $n$-поперечники некоторого выпуклого центрально-симметричного компакта $\mathfrak{M}$ в пространстве $L_2$. Указанные $n$-поперечники связаны соотношениями [6]:

$$b_n(\mathfrak{M},L_2)\leq d^n(m,L_2)\leq d_n(\mathfrak{M},L_2)=\delta_n(m,L_2)=\Pi_n(\mathfrak{M},L_2).$$

Полагаем также $E_{n-1}(\mathfrak{M}) := \sup\{E_{n-1}(f):\ f\in\mathfrak{M}\}$.

Пусть $W^{(r)}_{m,p,h}(\Phi)$, $m\in N, r\in\mathbb{Z}_+, 0<p\leq 2$ — класс функций $f\in L_2^{(r)}$, для которых при любом $h\in(0,\infty)$ выполняется неравенство

$$\int_0^h t\,\Omega_m^p(f^{(r)},t)dt\leq\Phi^p(h),$$

где $\Phi(t), t\geq 0$ - произвольная непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0)=0$. Следуя работе [1], через $t_*$ обозначим величину аргумента $x\in(0,\infty)$ функции $\sin x/x$, при котором она достигает своего наименьшего значения. Очевидно, что $t_*$ есть наименьший из положительных корней уравнения $x=\operatorname{tg}x$ $(4.49<t_*<4.51)$. При этом полагаем

$$\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)_* := \left\{1-\frac{\sin x}{x}, \text{если } 0<x\leqslant t_*;\ \ 1-\frac{\sin t_*}{t_*}, \text{если } x\geqslant t_*\right\}.$$

Имеет место следующая

**Теорема 2.** *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$; $1/r < p \le 2$. Если для любых $t \in (0, \infty)$ мажоранта $\Phi$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(t)}{\Phi^p(\pi/n)} \ge \left\{ \int_0^{\pi/n} \tau \left(1 - \frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)_*^{mp/2} d\tau \right\}^{-1} \int_0^t \tau \left(1 - \frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)^{mp/2} d\tau, \tag{5}$$

*то справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}(W^{(r)}_{m,p,h}(\Phi), L_2) = \lambda_{2n-1}(W^{(r)}_{m,p,h}(\Phi), L_2) = E_{n-1}(W^{(r)}_{m,p,h}(\Phi)) =$$

$$= 2^{-m/2} n^{-r+2/p} \left\{ \int_0^{nh} t \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi(\pi/n),$$

*где $\lambda_k(\cdot)$ – любой из перечисленных выше поперечников. При этом множество мажорант, удовлетворяющих условию (5), не пусто.*

Заметим, что мажорантой, удовлетворяющей условию (5), является, например, функция

$$\Phi_0(t) := t^{\alpha/p}, \quad \text{где} \quad \alpha := \pi \Bigg/ \int\limits_0^{\pi} \tau \left(1 - \frac{\sin \tau}{\tau}\right)^{mp/2} d\tau.$$

**Литература**

1. Vakarchuk S.B., Zabutna V.I. Widths of function classes from $L_2$ and exact constants in Jackson type inequalities // East J. on Approx., 2008, v.14, №4, pp.411-421.
2. Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из $L_2$ // Матем. заметки, 2005, т.78, №5, с.792-796.
3. Шабозов М.Ш., Хоразмшоев С.С. - ДАН РТ, 2010, т.53, №9, с.661-665.
4. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки, 2010, т.87, №4, с.616-623.
5. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Неравенства между наилучшими приближениями и усреднениями модулей непрерывности в пространстве $L_2$ // ДАН России, 2010, т.435, №2, с.178-181.
6. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ, 1976, 325 с.

УДК 517.5

# Наилучшие линейные методы приближения аналитических в круге функций и точные значения поперечников некоторых классов функций в пространстве Харди

Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.

**(Институт математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан, Душанбе, Таджикистан)**

**1.** Экстремальная задача отыскания наилучших линейных методов приближения для классов аналитических функций представляет определённый интерес при вычислении гельфандовских и линейных $n$-поперечников. В этом направлении исследования имеется ряд окончательных результатов (см., например, [1-12] и приведённую там литературу).

В данной работе построены наилучшие линейные методы приближения для некоторых классов аналитических функций, ранее изучавшихся в [7,13], и вычислены точные значения ряда $n$-поперечников нижеприведённых классов функций в более общих пространствах Харди $H_{q,\rho}$ $(1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le 1)$.

Говорят, что аналитическая в единичном круге $|z| < 1$ функция $f(z)$ принадлежит банахову пространству $H_q$, если

$$\|f\|_q = \|f\|_{H_q} := \lim_{\rho\to 1-0}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(\rho e^{it})|^q dt\right)^{1/q} < \infty, \quad 1 \le q \le \infty.$$

При этом норма функции $f(z) \in H_q$, $1 \le q \le \infty$ реализуется на её угловых граничных значениях $f(t) := f(e^{it})$. В случае $q = \infty$ дополнительно будем предполагать функцию $f(z)$ непрерывной в замкнутом круге $|z| \le 1$. Обозначим через $H_{q,\rho}$ $(1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le 1)$ пространство Харди аналитических в круге $|z| < \rho$ функций $f(z)$, для которых $\|f(z)\|_{H_{q,\rho}} = \|f(\rho z)\|_{H_q} < \infty$.

Пусть $\mathscr{P}_n$ – множество алгебраических комплексных полиномов степени не выше $n$. Символом $E_n(f)_q = \inf\{\|f - p_{n-1}\|_q :\ p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}\}$ обозначим наилучшее приближение функции $f(z) \in H_q$ множеством $\mathscr{P}_{n-1}$ полиномов степени $\le n-1$. Производную $r$-го порядка функции $f(z)$ по аргументу $z$ обозначим как обычно $f^{(r)}(z) := d^r f(z)/dz^r$ $(r \in \mathbb{N},\ f^{(0)}(z) = f(z))$.

Структурные свойства функции $f^{(r)}(z) \in H_q$ охарактеризуем скоростью стремления к нулю модуля гладкости её граничных значений производной

$$\omega_2(f^{(r)}; 2t)_q := \sup\Big\{\|f^{(r)}(\cdot + \tau) - 2f^{(r)}(\cdot) + f^{(r)}(\cdot - \tau)\|_q :\ |\tau| \le t\Big\},$$

при $t \to 0$, задавая эту скорость убывания к нулю через мажоранты некоторой усреднённой величины, содержащей $\omega_2(f^{(r)}; 2t)_{H_q}$.

Пусть $\Phi(x)$ $(x \ge 0)$ – произвольная положительная неубывающая выпуклая вниз функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Для любого заданного значения параметра $\mu \ge 1/2$, через $W_q^{(r)}(\Phi; \mu)$ $r \in \mathbb{N}, 1 \le q \le \infty$ обозначим класс функций $f(z) \in H_q$, для которых производная $f^{(r)}(z) \in H_q$ при любом $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяют условию

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_2(f^{(r)}; 2t)_q \left(1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right) dt \le \Phi(h).$$

Приводим необходимые для дальнейшего определения и обозначения. Пусть $X$ – банахово пространство; $S$ – единичный шар в нём; $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество в $X$; $L_n \subset X$ – $n$-мерное подпространство; $V(f, L_n)$ – линейный непрерывный оператор, переводящий $X$ в $L_n$; $L^n$ – линейное подпространство коразмерности $n$ из $X$. Через

$$E(f, L_n)_X = \inf\Big\{\|f - \varphi\|_X :\ \varphi \in L_n\Big\}$$

обозначим наилучшее приближение функции $f \in X$, а через

$$\mathscr{E}_n(f, V(f))_X := \mathscr{E}(f, V(f, L_n))_X = \|f - V(f, L_n)\|_X$$

уклонение функции $f \in X$ от линейного непрерывного оператора $V(f, L_n)$ в пространстве $X$. Для введённого выше множества $\mathfrak{M} \subset X$ полагаем

$$E(\mathfrak{M}, L_n)_X \overset{def}{=} \sup\Big\{E(f, L_n)_X :\ f \in \mathfrak{M}\Big\},$$

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}, V, L_n)_X \stackrel{def}{=} \sup\Big\{ \mathscr{E}(f, V(f, L_n))_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Величины

$$b_n(\mathfrak{M}; X) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : \ \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} : \ L_{n+1} \subset X\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}; X) = \inf\{ E_n(\mathfrak{M}, L_n)_X : \ L_n \subset X\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}; X) = \inf\{\sup\{\|f\|_X : \ f \in \mathfrak{M} \cap L^n\} : \ L^n \subset X\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}; X) = \inf\{\inf\{\mathscr{E}_n(\mathfrak{M}, V, L_n)_X : \ V : X \to L_n\} : \ L_n \subset X\}$$

соответственно называют бернштейновским, колмогоровским, гельфандовским и линейным $n$-поперечниками. Между перечисленными выше $n$-поперечниками для любого центрально-симметричного компакта $\mathfrak{M} \subset X$ выполняются соотношения (см., например, [14,15]):

$$b_n(\mathfrak{M}; X) \le \begin{matrix} d_n(\mathfrak{M}; X) \\ d^n(\mathfrak{M}; X) \end{matrix} \le \delta_n(\mathfrak{M}; X). \tag{1}$$

Из результата [13, с.93] и следствия 3 работы [16, с.289] следует, что если при заданном $\mu \ge 1/2$, любых $\tau \in (0, \pi/2]$ и $t \in \mathbb{R}_+$ функция $\Phi$ удовлетворяет условию

$$\frac{\pi}{\pi - 2} \int\limits_0^1 \left(1 - \cos\frac{\pi t x}{2\tau\mu}\right)_* \left(1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi x}{2}\right) dx \le \frac{\Phi(t)}{\Phi(\tau)}, \tag{2}$$

где

$$(1 - \cos x)_* := \Big\{ 1 - \cos x, \ \text{если} \ \ 0 < x \le \pi; \ \ 2, \ \text{если} \ \ x \ge \pi \Big\},$$

то для любых $n, r \in \mathbb{N}, \ n > r \ge 1$ справедливы равенства

$$b_n\left(W_q^{(r)}(\Phi; \mu); H_q\right) = d_n\left(W_q^{(r)}(\Phi; \mu); H_q\right) =$$

$$= E_n\left(W_q^{(r)}(\Phi; \mu); \mathscr{P}_{n-1}\right)_{H_q} = \frac{\pi}{2(\pi - 2)\alpha_{n,r}}\, \Psi\left(\frac{\pi}{2(n-r)\mu}\right), \tag{3}$$

где $\alpha_{n,r} = n(n-1)\cdots(n-r+1)$, $n \ge r$. Там же доказано, что функция $\Phi(u) = u^{\alpha(\mu)}$, где

$$\alpha(\mu) = \frac{\pi^2}{2(\pi - 2)\mu} \int\limits_0^1 x\left(1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi x}{2}\right) \sin\frac{\pi x}{2\mu} dx,$$

удовлетворяет ограничению (2), причём $\alpha(1) = 2/(\pi - 2)$, $\lim\limits_{\mu \to \infty} \alpha(\mu) = 2$ и при всех $\mu \in [1, \infty)$ выполняется неравенство $2/(\pi - 2) \le \alpha(\mu) \le 2$.

Если в левой части неравенства (2) выполнить замену переменной $\tau = \pi/2(n-r)\mu$ $(n > r,\ 1/2 < \mu < \infty)$, то вместо (2) получим эквивалентное условие

$$\frac{\pi}{\pi - 2}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)\mu}\right) \cdot \frac{1}{t} \int\limits_0^t (1 - \cos(n-r)x)_* \left(1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi x}{2t}\right) dx \le \Phi(t). \tag{4}$$

Последним неравенством воспользуемся при доказательстве нижеприведённого утверждения, в котором результат (3) распространяется на более общее пространство $H_{q,\rho}$, $1 \le q \le \infty$, $0 < \rho \le 1$.

**Теорема 1.** *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$, $\mu \geq 1/2$ *и мажоранта* $\Phi$ *при любых* $t \in \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет ограничению (2). Тогда при всех* $1 \leq q \leq \infty$ *и* $0 < \rho \leq 1$ *имеют место равенства*

$$b_n\left(W^{(r)}(\Phi;\mu); H_{q,\rho}\right) = d_n\left(W^{(r)}(\Phi;\mu); H_{q,\rho}\right) =$$
$$= E_n\left(W^{(r)}(\Phi;\mu)\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)\mu}\right). \tag{5}$$

**Доказательство.** В работе [13, с.93] доказано, что для любой функции $f(z) \in H_q$, $1 \leq q \leq \infty$ и $u \in (0, \pi/(2n)]$, $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$E_n(f) \leq \frac{\pi}{2u(\pi-2)}\int\limits_0^u \omega_2(f;2x)_q\left\{1+\left[\left(\frac{\pi}{2un}\right)^2-1\right]\sin\frac{\pi x}{2u}\right\}dx \tag{6}$$

и для функции вида $f(z) = az^z$, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ неравенство (6) обращается в равенство. Если в (6) полагать $\pi/(2un) = \mu$ $(0 < \mu < \infty)$, то неравенство примет вид

$$E_n(f)_{H_q} \leq \frac{\mu n}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/(2n\mu)} \omega_2(f;2x)_q\Big\{1+\left(\mu^2-1\right)\sin n\mu x\Big\}dx. \tag{7}$$

Воспользовавшись тем, что для произвольной функции $f \in H_q$, у которой $f^{(r)} \in H_q$, имеет место неравенство [16, с.287]

$$E_n(f)_{H_q} \leq \alpha_{n,r}^{-1}E_{n-r}(f^{(r)})_{H_q},\ n \geq r,\ n, r \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

с учётом неравенство (7) из (8) получаем

$$E_n(f)_{H_q} \leq \frac{(n-r)\mu}{(\pi-2)\alpha_{n,r}}\int\limits_0^{\pi/(2(n-r)\mu)} \omega_2(f^{(r)};2x)_q\Big\{1+\left(\mu^2-1\right)\sin(n-r)\mu x\Big\}dx.$$

Отсюда для произвольной функции $f \in W_q^{(r)}(\Phi;\mu)$ имеем:

$$E_n(f)_{H_q} \leq \frac{\pi}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{2(n-r)\mu}{\pi}\int\limits_0^{\pi/(2(n-r)\mu)} \omega_2(f^{(r)};2x)_q\Big\{1+(\mu^2-1)\sin(n-r)\mu x\Big\}dx\right) \leq$$
$$\leq \frac{\pi}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)\mu}\right). \tag{9}$$

Поскольку для произвольной функции $f \in H_q$, $1 \leq q \leq \infty$ имеет место неравенство [17, с.49] $E_n(f)_{H_{q,\rho}} \leq \rho^n E_n(f)_q,\ 1 \leq q \leq \infty,\ 0 < \rho \leq 1$, то из (9) следует, что при любом $n > r$, $n, r \in \mathbb{N}$

$$E_n(f)_{H_{q,\rho}} \leq \frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)\mu}\right). \tag{10}$$

Из (10) в силу соотношения (1) запишем

$$b_n\left(W_q^{(r)}(\Phi;\mu); H_{q,\rho}\right) \leq d_n\left(W_q^{(r)}(\Phi;\mu); H_{q,\rho}\right) \leq$$

$$\leq E_n\left(W_q^{(r)}(\Phi;\mu)\right)_{H_{q,\rho}} \leq \frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)\mu}\right). \tag{11}$$

С целью получения оценки снизу указанных $n$-поперечников во множество $\mathscr{P}_n \cap H_{q,\rho}$ введём в рассмотрение $(n+1)$-мерный шар полиномов

$$\mathscr{B}_{n+1} := \left\{p_n \in \mathscr{P}_n :\ \|p_n\|_{H_{q,\rho}} \leq \frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)\mu}\right)\right\}$$

и покажем, что $\mathscr{B}_{n+1} \subset W_q^{(r)}(\Phi;\mu)$. Заметим, что из неравенства [18, с.159]

$$\|p_n^{(r)}\|_{H_q} \leq \alpha_{n,r}\|p_n\|_q \quad (n > r,\ n, r \in \mathbb{N},\ 1 \leq q \leq \infty)$$

и доказанного А.Пинкусом [15, с.255] неравенства

$$\|p_n\|_{H_q} \leq \rho^{-n}\|p_n\|_{q,\rho} \quad (1 \leq q \leq \infty,\ 0 < \rho \leq 1),$$

верных для произвольного полинома $p_n \in \mathscr{P}_n$, получаем

$$\|p_n^{(r)}\|_{H_q} \leq \alpha_{n,r}\rho^{-n}\|p_n\|_{q,\rho} \quad (n > r,\, 1 \leq q \leq \infty,\, 0 < \rho \leq 1). \tag{12}$$

Теперь воспользовавшись неравенством [16, с.291]

$$\omega_2(p_n; 2x)_q \leq 2(1-\cos nx)_*\,\|p_n\|_{H_q}, \tag{13}$$

заменяя в нём $p_n$ на $p_n^{(r)}$ и затем применяя (12), для любого полинома $p_n \in \mathscr{B}_{n+1}$ будем иметь

$$\omega_2(p_n^{(r)}; 2x)_q \leq \frac{\pi}{(\pi-2)}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)\mu}\right)(1-\cos(n-r)x)_*. \tag{14}$$

Из (14), с учётом определения класса $W_q^{(r)}(\Phi;\mu)$ и ограничения (4), имеем

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega_2(p_n^{(r)}; 2x)_q\left(1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi x}{2t}\right)dx \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{(\pi-2)}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)\mu}\right)\frac{1}{t}\int\limits_0^t (1-\cos(n-r)x)_*\left(1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi x}{2t}\right)dx \leq \Phi(t).$$

Последнее неравенство означает, что шар $\mathscr{B}_{n+1} \subset W_q^{(r)}(\Phi;\mu)$. Отсюда, согласно определению бернштейновского $n$-поперечника, получаем

$$b_n\left(W_q^{(r)}(\Phi;\mu); H_{q,\rho}\right) \geq b_n\left(\mathscr{B}_{n+1}; H_{q,\rho}\right) \geq \frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)\mu}\right). \tag{15}$$

Сравнивая оценку сверху (11) и оценку снизу (14), получаем требуемые равенства (5), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

**2.** Для нахождения точных значений гельфандовского и линейного $n$-поперечников нам потребуется построение наилучшего линейного метода приближения функций класса $W_q^{(r)}(\Phi;\mu)$ в пространстве $H_{q,\rho}$. С этой целью для произвольной функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in \mathcal{A}(U)$ запишем следующий линейный полиномиальный оператор

$$\Lambda_{n-1,r,\rho}(f; z) \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f) z^k +$$

$$+\sum_{k=r}^{n-1}\left\{1+\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\rho^{2(n-k)}\left[\gamma_{k,r}\left(1-\left(\frac{k-r}{2n-k-r}\right)^2\right)-1\right]\right\}c_k(f)z^k \qquad (16)$$

степени $n-1$, где

$$\gamma_{k,r}\overset{def}{=}\frac{2\mu(n-r)}{\pi-2}\int_0^{\pi/2\mu(n-r)}\cos(k-r)x\Big(1-\sin(n-r)\mu x\Big)dx,\ \ k\geq r\geq 1,\ k,r\in\mathbb{N}.$$

**Теорема 2.** *Пусть $f$ – произвольная функция из класса $W_q^{(r)}(\Phi;\mu)$, $r\in\mathbb{N}$, $1\leq q\leq\infty$, $\mu\geq 1/2$, $0<\rho\leq 1$, $n$ – любое натуральное число больше $r$. Тогда справедливо неравенство*

$$\|f-\Lambda_{n-1,r,\rho}(f)\|_{H_{q,\rho}}\leq\frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)\mu}\right). \qquad (17)$$

*Если мажорирующая функция $\Phi$ при любом $t\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяет ограничению (4), то неравенство (17) неулучшаемо в том смысле, что существует функция $f_0(z)\in W_q^{(r)}(\Phi;\mu)$, обращающая его в равенство.*

**Доказательство.** Будем следовать схеме рассуждения, приведённой в работах [7] и [10]. Полагая

$$\mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f;z)=\sum_{k=0}^{r-1}c_k(f)z^k++\sum_{k=r}^{n-1}\left(1-\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\rho^{2(n-k)}\right)c_k(f)z^k,$$

для произвольной функции $f(z)\in W_q^{(r)}(\Phi;\mu)$ запишем интегральное представление разности

$$f(\rho z)-\mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f;\rho z)=\frac{\rho^n z^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}f^{(r)}(ze^{-it})\,\mathcal{K}_{n,r}(\rho,t)dt,\quad z\in U, \qquad (18)$$

где

$$\mathcal{K}_{n,r}(\rho,t)\overset{def}{=}\frac{1}{\alpha_{n,r}}+2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\rho^j}{\alpha_{n+j,r}}\cos jt. \qquad (19)$$

Справедливость представления (18) проверяется непосредственным вычислением путём разложения производной $f^{(r)}(z)$ в ряд Тейлора с последующим почленным интегрированием полученного подынтегрального выражения.

Следуя схеме рассуждений [16, с.288] и [6, с.325], в качестве промежуточного приближения функции $f(z)\in H_q$ с $f^{(r)}(z)\in H_q$ воспользуемся вспомогательной функцией, имеющей вид

$$\mathscr{F}_t(f,z)=$$

$$=\frac{\pi}{2t(\pi-2)}\int_0^t\left\{f^{(r)}(ze^{ix})+f^{(r)}(ze^{-ix})\right\}\left(1-\sin\frac{\pi x}{2t}\right)dx. \qquad (20)$$

Если полагать в (20) $t=t_*:=\pi/2(n-r)\mu$, $n>r$, $1/2\leq\mu<\infty$ и разлагать производные $f^{(r)}(z)$ в ряд Тейлора, то получим

$$\mathscr{F}(f^{(r)},z):=\mathscr{F}_{t^*}(f^{(r)},z)=$$

$$=\frac{\mu(n-r)}{\pi-2}\int_0^{\pi/2(n-r)\mu}\left\{f^{(r)}(ze^{ix})+f^{(r)}(ze^{-ix})\right\}(1-\sin(n-r)\mu x)\,dx=$$

$$=\sum_{k=r}^{\infty}\gamma_{k,r}\alpha_{k,r}c_k(f)z^{k-r}:=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_{k+r,r}\alpha_{k+r,r}c_{k+r}(f)z^k, \tag{21}$$

которое очевидно является элементом пространства $H_q$. Для произвольной функции $f(z)\in H_q$, полагая

$$Q_{n-r-1,2}(f;z)\overset{def}{=}\sum_{k=0}^{n-r-1}\left(1-\left(\frac{k}{2(n-r)-k}\right)^2\right)c_k(f)z^k$$

и, учитывая вид функции (21), запишем

$$Q_{n-r-1,2}(\mathscr{F}(f^{(r)});z)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-r-1}\gamma_{k+r,r}\,\alpha_{k+r,r}\,c_{k+r}(f)\left(1-\left(\frac{k}{2(n-r)-k}\right)^2\right)z^k. \tag{22}$$

Символом $\varphi_a^{(m)}(z)$ обозначим производную $m$-го ($m\in\mathbb{N}$) порядка функции $\varphi$ по аргументу $t$ комплексного числа $z=\rho e^{it}$. При этом

$$\varphi_a^{(1)}(z)=\frac{d\varphi(z)}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}=\varphi'(z)zi,\quad \varphi_a^{(m)}(z)=\left\{\varphi_a^{(m-1)}(z)\right\}_a',\ m\geq 2,\ m\in\mathbb{N}.$$

Известно [6, с.32], что для произвольного $z\in U$ справедливо равенство

$$\varphi(z)-Q_{n-r-1,2}(f;z)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_a^{(2)}(ze^{-it})\,e^{i(n-r)t}\,G_{2,n-r}(t)dt, \tag{23}$$

где

$$G_{2,n-r}(t)\overset{def}{=}\frac{1}{(n-r)^2}+2\sum_{k=j}^{\infty}\frac{\cos jt}{(n-r+j)^2}$$

– неотрицательная интегрируемая функция [15, лемма 2.2, с.251]. Из равенства (23), применяя обобщённого неравенство Минковского, получаем

$$\Big\|\varphi-Q_{n-r-1,2}(f)\Big\|_{H_q}\leq\frac{1}{(n-r)^2}\,\|\varphi_a^{(2)}\|_{H_q}. \tag{24}$$

Для произвольной функции $f(z)\in W_q^{(r)}(\Phi;\mu)$ построим линейный полиномиальный оператор

$$\Omega_{n-1,r,\rho}(f;\rho z)=\frac{\rho^n z^r}{2\pi}\int_0^{2\pi}Q_{n-r-1,2}\Big(\mathscr{F}(f^{(r)});ze^{-it}\Big)e^{i(n-r)t}\,\mathcal{K}_{n,r}(\rho,t)dt=$$

$$=\sum_{k=r}^{n-1}\gamma_{k,r}\,\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\,\rho^{2(n-k)}\left(1-\left(\frac{k-r}{2n-k-r}\right)^2\right)c_k(f)z^k, \tag{25}$$

в справедливости которого можно убедиться, учитывая произведение соотношения (19) и (22) и последующее почленно интегрирование полученного подынтегрального выражения. Полагая

$$\Lambda_{n-1,r,\rho}(f;z)\overset{def}{=}\mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f;z)+\Omega_{n-1,r,\rho}(f;z)$$

и используя интегральные представления (18) и (25), для любого $z \in U$ и $0 < \rho \leq 1$ запишем равенство

$$f(\rho z) - \Lambda_{n-1,r,\rho}(f; \rho z) =$$

$$= \frac{\rho^n z^r}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Big\{ f^{(r)}(ze^{-it}) - Q_{n-r-1,2}\Big(\mathscr{F}(f^{(r)}); ze^{-it}\Big)\Big\} e^{i(n-r)t} \mathcal{K}_{n,r}(\rho, t) dt.$$

Отсюда в силу обобщённого неравенства Минковского имеем

$$\Big\| f - \Lambda_{n-1,r,\rho}(f) \Big\|_{H_{q,\rho}} \leq \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \Big\| f^{(r)} - Q_{n-r-1,2}\Big(\mathscr{F}(f^{(r)})\Big)\Big\|_{H_q} \leq$$

$$\leq \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \left\{ \Big\| f^{(r)} - \mathscr{F}(f^{(r)}) \Big\|_q + \Big\| \mathscr{F}(f^{(r)}) - Q_{n-r-1,2}\Big(\mathscr{F}(f^{(r)})\Big) \Big\|_q \right\}. \tag{26}$$

Оценим первое слагаемое в правой части неравенства (26), применив снова вышеуказанное неравенство

$$\Big\| f^{(r)} - \mathscr{F}(f^{(r)}) \Big\|_q = \frac{(n-r)\mu}{\pi - 2} \cdot$$

$$\cdot \left\| \int\limits_0^{\pi/2(n-r)\mu} \Big\{ f^{(r)}(ze^{ix}) - 2f^{(r)}(z) + f^{(r)}(ze^{-ix}) \Big\} (1 - \sin(n-r)\mu x)\, dx \right\|_{H_q} \leq$$

$$\leq \frac{(n-r)\mu}{\pi - 2} \int\limits_0^{\pi/2(n-r)\mu} \omega_2(f^{(r)}; 2x)_q (1 - \sin(n-r)\mu x)\, dx. \tag{27}$$

Полагая $z = e^{it}$, введём обозначение $f^{(r)}(ze^{\pm ix}) := F(t \pm x)$ и, приступая к оценке второго слагаемого в правой части неравенства (26), следуя [16, с.343], будем считать, что $f^{(r)}$ – есть алгебраический полином $p_m$ некоторой степени $m \in \mathbb{N}$, поскольку совокупность всех полиномов всюду плотна в пространстве $H_q$. Очевидно, что при таком соглашении совместное приближение функции и её производной по аргументу в $H_q$ законно, а потому можно полагать, что при $m = 1, 2$, производные $F^{(m)} \in H_q$. В таком случае, в силу (24), учитывая (21), имеем:

$$\Big\| \mathscr{F}(f^{(r)}) - Q_{n-r-1,2}\Big(\mathscr{F}(f^{(r)})\Big) \Big\|_{H_q} \leq (n-r)^{-2} \Big\| \Big(\mathscr{F}(f^{(r)})\Big)_a^{(2)} \Big\|_{H_q} = \frac{\mu}{(n-r)(\pi-2)} \cdot$$

$$\cdot \left\| \int\limits_0^{\pi/2(n-r)\mu} \Big\{ F^{(2)}(t+x) + F^{(2)}(t-x) \Big\} (1 - \sin(n-r)\mu x)\, dx \right\|_{H_q}. \tag{28}$$

Выполнив дважды интегрирование по частям в правой части неравенства (28), запишем

$$\Big\| \mathscr{F}(f^{(r)}) - Q_{n-r-1,2}\Big(\mathscr{F}(f^{(r)})\Big) \Big\|_{H_q} \leq$$

$$\leq \frac{(n-r)\mu}{\pi - 2} \left\| \int\limits_0^{\pi/2(n-r)\mu} \Big\{ F(t+x) - 2F(t) + F(t-x) \Big\} \mu^2 \sin(n-r)\mu x dx \right\|_{H_q} \leq$$

$$\leq \frac{(n-r)\mu}{\pi-2} \int\limits_0^{\pi/2(n-r)\mu} \omega_2(f^{(r)};2x)_q \mu^2 \sin(n-r)\mu x dx. \tag{29}$$

Из неравенств (26) – (29) для произвольной функции $f(z) \in W_q^{(r)}(\Phi;\mu)$ имеем

$$\left\| f - \Lambda_{n-1,r,\rho}(f) \right\|_{H_{q,\rho}} \leq \frac{\rho^n (n-r)\mu}{(\pi-2)\alpha_{n,r}} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_0^{\pi/2(n-r)\mu} \omega_2(f^{(r)};2x)_q \Big\{ 1 + (\mu^2-1)\sin(n-r)\mu x \Big\} dx = \frac{\pi \rho^n}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}} \cdot$$

$$\cdot \left( \frac{2\mu(n-r)}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2(n-r)\mu} \omega_2(f^{(r)};2x)_q \Big\{ 1 + (\mu^2-1)\sin(n-r)\mu x \Big\} dx \right) \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \Phi\left( \frac{\pi}{2(n-r)\mu} \right).$$

Покажем, что множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (4) и принадлежащих классу $W_q^{(r)}(\Phi;\mu)$, не пусто. Для этой цели рассмотрим следующую функцию

$$f_0(z) \stackrel{def}{=} \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \Phi\left( \frac{\pi}{2(n-r)\mu} \right) z^n, \quad n > r, \ \mu \geq 1/2$$

и покажем, что $f_0(z)$ принадлежит классу $W_q^{(r)}(\Phi;\mu)$.

При доказательстве теоремы 1 мы показали, что $(n+1)$-мерная сфера $\mathscr{B}_{n+1}$ полиномов $p_n \in \mathscr{P}_n$ радиуса не более $\dfrac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \dfrac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \Phi\left( \dfrac{\pi}{2(n-r)\mu} \right)$ принадлежит классу $W_q^{(r)}(\Phi;\mu)$, причём мажоранта $\Phi$ удовлетворяет ограничению (4). Поскольку норма $f_0(z)$ равна

$$\|f_0\|_{q,\rho} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \Phi\left( \frac{\pi}{2(n-r)\mu} \right),$$

то функция $f_0(z)$ принадлежит $\mathscr{B}_{n+1}$ и, следовательно, $f_0(z) \in W_q^{(r)}(\Phi;\mu)$.

Учитывая вид линейного оператора (16), имеем $\Lambda_{n-1,r,\rho}(f_0) \equiv 0$, а потому

$$\left\| f_0 - \Lambda_{n-1,r,\rho}(f_0) \right\|_{H_{q,\rho}} = \left\| f_0 \right\|_{q,\rho} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \Phi\left( \frac{\pi}{2(n-r)\mu} \right), \tag{30}$$

Теорема 2 полностью доказана.

Доказанная теорема 2 в сочетании с равенством (5) позволяет сформулировать следующее общее утверждение.

**Теорема 3.** *Если мажоранта* $\Phi$ *удовлетворяет ограничению (4), то при любых* $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$ *и* $0 < \rho \leq 1$, $\mu \geq 1/2$ *справедливы равенства*

$$\pi_n\left( W_q^{(r)}(\Phi;\mu); H_{q,\rho} \right) = E\left( W_q^{(r)}(\Phi;\mu), \mathscr{P}_{n-1} \right)_{H_{q,\rho}} =$$

$$= \mathscr{E}_n\left( W_q^{(r)}(\Phi;\mu); \Lambda_{n-1,r,\rho} \right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \Phi\left( \frac{\pi}{2(n-r)\mu} \right). \tag{31}$$

*где $\pi_n(\cdot)$ – любой из $n$-поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, а наилучший линейный метод приближения $\Lambda_{n-1,r,\rho}(\cdot)$ определен равенством (16).*

**Доказательство.** Используя определения линейного $n$-поперечника, из неравенства (17) получаем оценку сверху

$$\delta_n\left(W_q^{(r)}(\Phi;\mu);H_{q,\rho}\right) \le E\left(W_q^{(r)}(\Phi;\mu),\mathscr{P}_{n-1}\right)_{H_{q,\rho}} \le$$

$$\le \mathscr{E}_n\left(W_q^{(r)}(\Phi;\mu);\Lambda_{n-1,r,\rho}\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)\mu}\right). \tag{32}$$

В силу неравенств (1), между вышеперечисленными $n$-поперечниками, сопоставляя оценку сверху (32), с соотношениями (5) получаем требуемые равенства (31). Этим параллельно доказано, что линейный полиномиальный оператор (15) является наилучшим линейным методом приближения класса $W_q^{(r)}(\Phi;\mu)$ ($r\in\mathbb{N}$, $\mu\ge 1/2$) в пространстве $H_{q,\rho}$ ($1\le q\le\infty$, $0<\rho\le 1$).

### Литература


1. Бабенко К.И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций. – Изв. АН СССР, сер. матем., 1958, т.22, с. 631-640.
2. Тайков Л.В. О наилучших линейных методах приближения функций классов $B^r$ и $H^r$. – Успехи мат. наук, 1963, т.18, №4(112), с. 183-189.
3. Scheick J.T. Polynomial approximation of functions analytic in a disk. – Proc. Amer. Math. Soc., 1966, v.17, pp. 1238-1243.
4. Белый В.И., Двейрин М.З. О наилучших линейных методах приближения на классах функций, определяемых союзными ядрами. – Метрические вопросы теории функций и отображений, 1971, №4, с. 37-54.
5. Двейрин М.З., Чебаненко И.В. О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций. // В кн.: Теория отображений и приближение функций. – Киев: Наукова думка, 1983, с. 62-73.
6. Вакарчук С.Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций. – Матем. заметки, 1995, т.57, №1, с. 30-39.
7. Вакарчук С.Б. О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций. – Матем. заметки, 1999, т.65, №2, с. 186-193.
8. Вакарчук С.Б. Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения. – Матем. заметки, 2002, т.72, №5, с. 665-669.
9. Вакарчук С.Б. О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости. – Укр. матем. журнал, 2004, т.56, №9, с. 1155-1171.
10. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. О наилучших линейных методах приближения функций классов Л.В.Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q\ge 1$, $0<\rho\le 1$. – Матем. заметки, 2009, т.85, №3, с. 323-329.
11. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге. – Мат. сборник, 2010, т.201, №8, с.3-22.
12. Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. О наилучших линейных методах и значениях поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана. – ДАН России, 2013, т.450, №5, с. 518-521.
13. Айнуллоев Н. Поперечники классов аналитических функций в единичном круге. – В кн.: Геометрические вопросы теории функций и множеств. Калинин, 1986, с. 91-101.
14. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений. – Успехи матем. наук, 1960, т.15, №3, с. 81-120.

15. Pinkus A. $n$-Widths in Approximation Theory – Berlin: Springer-Verlag, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985, 252 p.
16. Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций. – Матем. заметки, 1977, т.22, №2, с. 285-294.
17. Двейрин М.З. О приближении функций, аналитических в единичном круге // Метрические вопросы теории функций и отображений. – Киев: Науково думка, 1975, вып. 6, с. 41-54.
18. Тайков Л.В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций. – Матем. заметки, 1967, т.1, №2, с. 155-162.

УДК 517.5

## О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых

Шабозова А.А.

**(Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан)**

В работе рассматривается задача о приближённом вычислении криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и классов пространственных кривых. Пусть функция $f(M) := f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ определена и интегрируема вдоль кривой $\Gamma \subset R^m$ и

$$J(f;\Gamma) := \int_\Gamma f(M)dt = \int_\Gamma f(x_1, x_2, \ldots, x_m)dt. \tag{1}$$

Предположим, что на кривой $\Gamma$ установлено положительное направление, так что положение точки $M = M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ на кривой может быть определено длиной дуги $t = \breve{AM}$, отсчитываемой от начальной точки $A$. Тогда кривая $\Gamma$ параметрически выразится уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(t),\ x_2 = \varphi_2(t),\ \ldots,\ x_m = \varphi_m(t),\ (0 \le t \le L), \tag{2}$$

а функция $f(M)$ сведётся к сложной функции $f(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t), \ldots,\ \varphi_m(t))$ от переменной $t$. В этом случае интеграл (1) запишется в виде

$$J(f;\Gamma) = \int_0^L f(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t), \ldots,\ \varphi_m(t))\, dt. \tag{3}$$

Всякая квадратурная формула

$$J(f;\Gamma) \approx \mathcal{L}_N(f;\Gamma;P,T) := \sum_{k=1}^N p_k\, f\Big(\varphi_1(t_k),\ \varphi_2(t_k), \ldots,\ \varphi_m(t_k)\Big) \tag{4}$$

для приближённого вычисления интеграла (3) задаётся векторами коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^N$ и узлов $T = \{t_k : 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_N \le L\}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_N$ – произвольные действительные числа.

Погрешность квадратурной формулы (4) обозначим

$$\Big|R_N(f;\Gamma;P,T)\Big| = \Big|J(f;\Gamma) - \mathcal{L}_N(f;\Gamma;P,T)\Big|.$$

Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций $\{f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))\}$, определённых в точках кривой $\Gamma$ и интегрируемых на отрезке $[0, L]$, то положим

$$R_N(\mathfrak{M};\Gamma;P,T) = \sup\left\{\ \Big|R_N(f;\Gamma;P,T)\Big| :\ f \in \mathfrak{M}\right\}. \tag{5}$$

Пусть $\mathfrak{N}(L)$ – класс кривых $\Gamma$, заданных уравнениями (2), длина которых равна $L$. Наибольшую погрешность квадратурной формулы (4) на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}(L)$ обозначим

$$R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}(L);P,T)=\sup\Big\{R_N(\mathfrak{M};\Gamma;P,T):\ \Gamma\subset\mathfrak{N}(L)\Big\}. \tag{6}$$

Величину

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M},\mathfrak{N}(L))=\inf\Big\{R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}(L),P,T):\ (P,T)\Big\}, \tag{7}$$

будем называть оптимальной оценкой погрешности формулы (4) на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}(L)$. Если существует вектор $(P^0,T^0)$, для которого

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M},\mathfrak{N}(L))=R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}(L),P^0,T^0), \tag{8}$$

то этот вектор определяет наилучшую квадратурную формулу вида (4) в смысле С.М. Никольского [1] на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}(L)$.

Обозначим через $H^\omega:=H^\omega[0,L]$ — множество функций $\varphi(t)\in C[0,L]$, удовлетворяющих условию $|\varphi(t')-\varphi(t'')|\le\omega\left(|t'-t''|\right),\ t',t''\in[0,L]$, где $\omega(\delta)$ - заданный модуль непрерывности, то есть неубывающая полуаддитивная функция, в нуле равная нулю. Через $\bar{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}[0,L]$ обозначим класс гладких кривых $\Gamma\subset R^m$, заданных уравнениями (2), у которых координатные функции $\varphi_i(t)\in H^{\omega_i}[0,L]$, $i=\overline{1,m}$. Если $M'=M(x_1',x_2',\dots,x_m')\in R^m$, $M''=M(x_1'',x_2'',\dots,x_m'')\in R^m$, то введём в рассмотрение расстоянию:

$$R_p(M',M'')=\left\{\sum_{i=1}^m|x_i'-x_i''|^p\right\}^{1/p},\quad 1\le p<\infty.$$

Через $\mathfrak{M}_{R_p}$ обозначим класс функций $f(M)$, определённых на кривых $\Gamma\subset\bar{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}$ и для любых двух точек $M',M''\in\Gamma$ удовлетворяющих условию

$$\Big|f(M')-f(M'')\Big|\le R_p(M',M'').$$

Таким образом, будем писать $f(M)\in\mathfrak{M}_{\rho_1}$, если для любых двух точек $M',M''\in\Gamma\subset\bar{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}$ и любых $t'$, $t''\in[0,L]$ выполняется неравенство

$$\Big|f(M')-f(M'')\Big|\le\left\{\sum_{i=1}^m\omega_i^p\left(|t'-t''|\right)\right\}^{1/p},\quad 1\le p<\infty.$$

Основным результатом работы является следующая

**Теорема 1.** *Среди всех квадратурных формул вида (4) с произвольными векторами коэффициентами и узлами* $(P,T)$, $P=\{p_k\}_{k=1}^N$, $T=\{t_k\}_{k=1}^N:\ 0\le t_1<t_2<\ldots<t_N\le L$ *наилучшей для классов функций* $\mathfrak{M}_{\rho_i}$, $(i=1,2,3)$ *и кривых* $\bar{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}[0,L]$ *является формула средних прямоугольников*

$$\int_0^L f\left(\varphi_1(t),\,\dots,\,\varphi_m(t)\right)dt\approx\frac{L}{N}\sum_{k=1}^N f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right),\dots,\varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right).$$

*При этом для погрешности наилучшей формулы на классе функций* $\mathfrak{M}_{R_p}$, $1\le p<\infty$ *и кривых* $\bar{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}$ *справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho_2};\bar{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}\right)=(2N)\int_0^{L/(2N)}\left\{\sum_{i=1}^m\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}dt,\quad 1\le p<\infty. \tag{10}$$

**Доказательство.** Оценку снизу получим хорошо известным методом Н.П.Корнейчука [2]. Через $\mathfrak{M}_{R_p,T}$ обозначим множество функций $f(M) \in \mathfrak{M}_{R_p}$, определённых вдоль кривой $\Gamma \subset \bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$, которые в узлах вектора $T = \{t_k\}_{k=1}^N$ обращаются в нуль $f\left(\varphi_1(t_k),\,\ldots,\,\varphi_m(t_k)\right) = 0$, $k = \overline{1,N}$. Фиксируем произвольный вектор узлов $T = \{t_k\}_{k=1}^N$ и определим кривую $\Gamma_0$ параметрическими уравнениями $x_i = \varphi_i(t) := \min\limits_k \omega_i\Big(|t - t_k|\Big)$, $i = \overline{1,m}$, $0 \le t \le L$. Легко проверить, что функции $\varphi_i(t) \in \bar{H}^{\omega_i}[0,L]$, а значит $\Gamma_0$ принадлежит классу $\bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$. На кривой $\Gamma_0$ зададим функцию

$$f_T\left(\varphi_1(t),\,\ldots,\,\varphi_m(t)\right) = \min_{t_k} \sum_{i=1}^m \left\{\omega_i^p\Big(|t - t_k|\Big)\right\}^{1/p} = \sum_{i=1}^m \left\{\omega_i\Big(\min_k |t - t_k|\Big)\right\}^{1/p}$$

которая принадлежит классу $\mathfrak{M}_{R_p,T}$. Применяя леммы 2 из [2] и учитывая включение $\mathfrak{M}_{R_p,T} \subset \mathfrak{M}_{R_p}$ получаем оценку снизу погрешности формулы (4):

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{R_p}; \bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right) \ge \mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{R_p,T}; \bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right) =$$

$$= \inf_{(P,T)} \sup_{\Gamma \subset \bar{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}} \sup_{f \in \mathfrak{M}_{\rho_1,T}} \left|\int_0^L f(\varphi_1(t),\,\ldots,\,\varphi_m(t))dt\right| = \int_0^L f_T(\varphi_1(t),\,\ldots,\,\varphi_m(t))dt$$

$$= \sum_{i=1}^m \int_0^L \omega_i\Big(\min_k |t - t_k|\Big)dt \ge 2N \sum_{i=1}^m \int_0^{L/(2N)} \omega_i(t)dt. \tag{11}$$

С целью получения оценки сверху, равной правой части (11), зададим квадратурную формулу (4) векторами коэффициентов $P^0 = \{p_k^0 = L/N\}_{k=1}^N$ и узлов $T_0 = \{t_k^0 = (2k-1)L/(2N)\}$. Тогда для произвольной $f(M) \subset \mathfrak{M}_{R_p}$ и любой кривой $\Gamma \subset \bar{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ будем иметь

$$\Big|R_N(f;\Gamma;P^0,T^0)\Big| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)L/N}^{kL/N} \left|f\left(\varphi_1(t),\,\ldots,\varphi_m(t)\right) - f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right),\ldots,\varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right)\right| dt$$

$$\le \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)L/N}^{kL/N} \left\{\sum_{i=1}^m \omega_i\left(\left|t - \frac{2k-1}{2N}L\right|\right)\right\}^{1/p} dt =$$

$$= 2N \int_0^{L/(2N)} \left\{\sum_{i=1}^m \omega_i(t)\right\}^{1/p} dt. \tag{12}$$

Требуемое равенство (10) следует из сопоставления неравенств (11) и (12), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

В случае, когда $\omega_i(t) \equiv \omega(t),\ i = \overline{1,m};\ 0 \le t \le L$, класс кривых $\bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}([0,L])$ обозначим $\bar{H}^{\,\omega}_{\,m}[0,L]$. Из теоремы 1 как следствие получаем

**Теорема 2.** *Среди всех квадратурных формул вида (4) с произвольными векторами коэффициентов и узлов $(P,T)$ наилучшей для классов функций $\mathfrak{M}_{R_p}$, $1 \le p < \infty$ и кривых $\bar{H}^{\,\omega}_{\,m}[0,L]$ является формула средних прямоугольников. При этом для погрешности формулы на указанных классах функций и кривых справедливы точные оценки*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{R_p}; \bar{H}^{\,\omega}_{\,m}[0,L]\right) = 2\sqrt[p]{m}\,N \int_0^{L/(2N)} \omega(t)dt.$$

**Литература**

1. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1979.
2. Корнейчук Н.П. Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных. – Матем. заметки, 1968, т.3, №5, с.565-576.

УДК 517.9

## О построение интегральных многообразий системы разностных уравнений при расщеплении спектра матрицы

Шакарбеков К.С.[†], Якубов Н.С.[‡]

**([†]Таджикский националььных университет)**
**([‡]Таджикский технический университет имени академика М.С. Осими)**

Для отыскания инвариантных подпространств квадратной матрицы [1] и расщепления спектра матрицы [2] используется построение интегральных многообразий (ИМ) системы разностных уравнений [3].

Рассматривается матрица $F$ размера $m \times m$, которая разбита на блоки

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{1}$$

где $A-$матрица размера $q \times q$, $D-$ матрица размера $p \times p$ $(p = m - q;\ q \geqslant 1,\ p \geqslant 1)$. Для отыскания инвариантных подпространств матрицы $F$ используем систему разностных уравнений

$$X_{n+1} = AX_n + BY_n, \quad Y_{n+1} = CX_n + DY_n\,. \tag{2}$$

Ищем (ИМ) $G_1$ системы разностных уравнений (2) в виде векторного разностного уравнения

$$Y_n - K_nX_n \quad (n = 0,\ \pm\, 1,\ \pm\, 2,\ \pm\, 3, \ldots), \tag{3}$$

где $K_n-$матрица размера $p \times q$ $(p \times q = m)$.

Заменяя $n$ на $n+1$, получим уравнение $Y_{n+1} = K_{n+1}X_{n+1}$. Исключая $Y_{n+1},\ X_{n+1}$ в системе разностных уравнений (2), приходим к разностному уравнению

$$CX_n + DY_n = K_{n+1}(AX_n + BY_n). \tag{4}$$

Так как уравнение (4) выполняется вместе с уравнением (3) то исключая $Y_n$, приходим к матричному уравнению

$$C + DK_n = K_{n+1}(A + BK_n), \tag{5}$$

которое называется разностным уравнением расщепления.

Стационарное решение разностного уравнения ищется численным интегрированием разностных уравнений

$$\begin{aligned} &K_{n+1} = (C + DK_n)(A + BK_n)^{-1} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots); \\ &K_n = (K_{n+1}B - D)^{-1}(C - K_{n+1}A) \qquad (n = -1, -2, -3, \ldots). \end{aligned} \tag{6}$$

Аналогично ищется ИМ решений $G_2$ разностного уравнений (2) вида

$$X_n = S_nY_n \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots). \tag{7}$$

Стационарное решение матричного разностного уравнения (7) ищется как предельные решения уравнений

$$\begin{array}{ll} S_{n+1} = (AS_n + B)(CS_n + D)^{-1} & (n = 0, 1, 2, 3, \ldots); \\ K_n = (A - S_{n+1})^{-1}(S_{n+1}D - B) & (n = -1, -2, -3, \ldots). \end{array} \tag{8}$$

Имеет место следующая

**Теорема 1.** *Пусть спектр $\sigma$ матрицы $F$ разбита на два непустых множества окружностью $|Z| = \rho > 0$. Пусть $\sigma_1$ лежит в области $|Z| < \rho$ и соответствующее инвариантное подпространство матрицы $F$ определяется векторным уравнением $Y = K^{(1)}X$ , где $K^{(1)}$– матрица размера $p \times q$.* Пусть *$\sigma_2$ лежит в области $|Z| > \rho$ и соответствующее инвариантное подпространство определяется уравнением $X = S^{(2)}, Y,$* где *$S^{(2)}$–матрица размера $q \times p$. Тогда при почти всех начальных значениях $K_0, S_0$ существуют асимптотически устойчивые стационарные решения систем разностных уравнений расщепления (6),(8) и*

$$\lim_{n \to -\infty} K_n = K^{(1)}, \qquad \lim_{n \to +\infty} S_n = S^{(2)}.$$

При этом спектр матрицы $F$ расщепляется и

$$\sigma_1 = S_r(A + BK^{(1)}) = S_r(A - S^{(2)}C);$$
$$\sigma_2 = S_r(D - K^{(1)}B) = S_r(D + CS^{(2)}).$$

**Теорема 2.** *Пусть спектр матрицы $F$ разбита на два непустых множества $\sigma_1, \sigma_2$ окружностью $|Z| = \rho > 0.\sigma_2$ лежит в области $|Z| > \rho$ и соответствующее инвариантное подпространство матрицы $F$ определён уравнением $Y = K^{(2)}X, K^{(2)}$–матрица размера $p \times q.\sigma_1$ лежит в круге $|Z| < \rho$ и соответствующее инвариантное подпространство матрицы $F$ определяется уравнением $X = S^{(1)}Y$. Тогда при почти всех начальных значениях $K_0, S_0$ существуют асимптотически устойчивые стационарные решения систем разностных уравнений расщепления (6),(8) и существуют пределы*

$$\lim_{n \to -\infty} K_n = K^{(2)}, \lim_{n \to +\infty} S_n = S^{(1)}.$$

При известных матрицах $K^{(2)}$, $S^{(1)}$ спектр матрицы $F$ расщепляется и

$$\sigma_1 = S_r(D - K^{(2)}B) = S_r(D + CS^{(1)});$$
$$\sigma_2 = S_r(A + BK^{(2)}) = S_r(A - S^{(1)}C).$$

## Литература

1. Далецкий Ю.Л., Краейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. –М.: Наука, 1970. 534с.
2. Валеев К.Г. Расщепление спектра матрицы. –Киев: Вища школа, 1985. -272с
3. Валеев К.Г., Финин Г.С. Построение функций Ляпунова. –Киев: Наукова думка, 1981. -412с

УДК 517.948

# Уравнение разветвления Ляпунова - Шмидта для нелинейного оператора в банаховом пространстве

Эргашбоев Т.

**(Худжандский государственный университет им. ак. Б. Гафурова)**

Мы будем изучать локальные решения уравнения $F(x) = 0$, где $x$ точка некоторого банахового пространства или многообразия, в окрестности заданного решения $x_0$.

Пусть $X, Y$ – банаховы пространства, $F : X \to Y$ нелинейный оператор класса $C^k$, $k \geq 1$. Обозначим через, $B = d_{x_0}F$, где $x_0$ некоторая фиксированная точка.

$$\ker B = \{x \in X : Bx \prec 0\}, \quad \ker B^* = \{\psi \in Y^* : B^*\psi = 0\}$$

Здесь $B^* : Y^* \to X^*$ сопряжённый оператор, а

$$ImB = \{y \in Y : Bx = y\}$$

образ оператора $B$.

Оператор $F$ называется нетеровым, если пространства $\ker B$ и $\ker B^*$ конечномерны, а $ImB$ замкнут. Известно, что пространство $\ker B^*$ изоморфно сопряжённому пространству к $co\ker B = Y/ImB$.

Обозначим через $(\ker B)^{\perp}$, множество $\{y \in Y : \psi(y) = 0, \quad \forall \psi \in \ker B^*\}$. Имеем, $ImB = = (\ker B)^{\perp}$, поскольку $ImB$ замкнут.

Предположим, что оператор $F : X \to Y$ нетеров и пусть

$$\dim \ker B = n, \quad \dim \ker B^* = m.$$

Пусть далее $\varphi_{1,\dots,}\varphi_n$ – базис в $\ker B$, а $\psi_1, \dots, \psi_m$ – базис в $\ker B^*$. По теореме Хана - Банаха существуют функционалы $\gamma_{1,..,}\gamma_n$ из $X^*$ такие, что

$$(\varphi_i, \gamma_i) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, ..., n$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j \\ 0, \text{ если } i \neq j \end{cases}$$

Введём оператор $P$ – проектор $X$ на $\ker B$. Для $x \in X$ положим

$$Px = \sum_{i=1}^{n} (x, \gamma_i)\varphi_i$$

Оператор $P$ порождает следующее разложение пространства $X$ в прямую сумму $X = \ker B \oplus \widetilde{X}$, где $\widetilde{X}$–состоит из тех элементов $x \in X$, для которых

$$(x, \gamma_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Пусть $z_1, \dots, z_m$ – элементы из $Y$ такие, что

$$(z_k, \psi_l) = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \dots, m$$

Введём оператор $Q$ – проектор в $Y$: для $y \in Y$ положим

$$Qy = \sum_{j=1}^{m} (y, \psi_j) z_j \tag{1}$$

Оператор $Q$ порождает следующее разложение пространства $Y$ в прямую сумму пространств:

$$Y = L\left\{z_1, \ldots, z_m\right\} \oplus \widetilde{Y},$$

где $L\left\{z_1, \ldots, z_m\right\}$ – линейная оболочка элементов $z_1, \ldots, z_m$. $\widetilde{Y}$ состоит из тех элементов $Y$, для которых $(y, \psi_j) = 0$ и поэтому $\widetilde{Y} = ImB$.

Пусть $F : X \to Y$-нетеров оператор класса $c^P$, $P \geq 1$, $x_0 \in X$ и $F(x_0) = 0$.

Разложим $X$ и $Y$ в прямую сумму $X = \ker B \oplus \widetilde{X}$ $Y = Y_m \oplus \widetilde{Y}$, где $Y_m$ линейная оболочка элементов $z_1, \ldots, z_m$.

Оператор $Q_1 = I - Q$ является проектором на пространство $ImB$, где $B = d_{x_0}F$, а $Q$ – проектор, определённый с помощью формулы (1).

Если $x = y + \widetilde{x}$, где $y \in \ker B$, $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, то $d_{x_0}(Q_1 \circ F) = Q_1 \circ B$.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[rr, "B"] & & \mathrm{Im}B \\ X\big|_{\ker B} \arrow[urr, "\widetilde{B}"] & & \end{tikzcd}$$

Рассмотрим диаграмму (слева), где оператор $\widetilde{B}$ действует по правилу, $\widetilde{B}(clx) = Bx$, а $clx$ означает класс эквивалентности, содержащий точку $x$. $\widetilde{B}$ взаимно однозначно, так как если $\widetilde{B}(lx) = Bx$ и $\widetilde{B}(cly) = Bx$, то $\widetilde{B}(clx - cly) = 0$. Это означает, что $cl(x - y)$ содержит элемент ноль пространства $X$, поэтому $Clx = Cly$. Очевидно $Im\widetilde{B} = ImB$. Значит $B$ является изоморфизмом и $ImB$ – замкнут. Тогда по теореме Банаха об открытом отображении оператор $Q_1 F(x) = 0$.

В некоторой окрестности нуля $V$ из $\ker B$ существует отображение $h : V \to \widetilde{X}$ класса $C^p, P \geq 1$, такое, что всякое решение в окрестности точки $x_0$ записывается в виде $x_0 + y + h(y)$. Положим $H(y) = x_0 + y + h(y)$.

Очевидно $Q_1 \circ F \circ H \equiv 0$. Положим $\varphi = Q \circ F \circ H$.

**Свойства отображения $\varphi$.**

1. Если $F \in C^p$, то $\varphi$ как композиция отображений класса $C^p$, само является отображением этого класса;

2. $d_0\,\varphi$ =0, так как $d_0\varphi = Q \circ B \circ d_\circ H, \quad Q|_{ImB} = 0$;

3. $ind\,(d_0\varphi) = ind\,(d_{x_0}F)$, здесь $indB$ означает индекс оператора $B$ и он равен числу $\dim\ker B - \dim co\ker B$. Действительно, так как $\varphi$ отображение конечномерного пространства $\ker B$ в $coRerB$, то

$$ind\,(d_0\phi) = \dim\ker B - \dim coRerB =: ind\,(d_{x_0}F)\,;$$

4. Между множествами $\ker\varphi$ и $\ker F$ существует взаимно-однозначное соответствие, причём это соответствие осуществляет вложение $H$.

Пусть $y \in \ker\varphi$, т.е $\varphi(y) = 0$, тогда из $FH = QFH + (I - Q)\,FH = QFH = \varphi$ мы получим, что $FH(y) = \varphi(y) = 0$. Если $F(x) = 0$, т.е $x \in \ker F$, то $(I - Q)\,F(x) = Q_1 F(x) = 0$, отсюда получаем $x = x_0 + y + h(y) = H(y)$. Тогда имеем $\varphi(y) = QFH(y) = QF(x) = 0$. Таким образом, доказана

**Теорема.** Если $B = d_{x_0}F$ нетеров оператор класса $C^p$, $P \geq 1$ из банахового пространства $X$ в $Y$, то существует окрестность точки $x_0 U \subset X$ окрестность точки ноль $W \subset \ker B$ отображение класса $C^p$, $p \geq 1$, $\varphi : W \to Co\ker B$ такое, что $\varphi(0) = 0$ и отображение $H : W \to U$ такое , что из $\varphi(y) = 0$ следует $FH(y) = 0$.

Обратно из $F(x) = 0$ следует, что существует $y \in W$ такое, что $\varphi(y) = 0$ и $x = H(y)$.

**Литература**

1. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Треория ветвления решений нелинейных уравнений. М.:Наука, 1969.
2. Логинов Б.В. Треногин В.А. Об использовании групповой инвариантности в теории ветвления.- ДУ,1975, т.II, № 8, с.1519-1521.
3. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
4. Эргашбоев Т. К теории ветвления нелинейного оператора, инвариантного относительно группы. Успехи мат. наук, М.: 1984, т.39, №6, с.213-214

УДК 517.5

## О значении поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций

Юсупов Г.А., Миркалонова М.М.

**(Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан)**

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ – множество положительных чисел. Напомним необходимые в дальнейшем определения и факты. Пусть $X$ – банахово пространство, $S$ – единичный шар в $X$, $\mathfrak{N}$ – некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество в $X, L_n \subset X - n$-мерное подпространство. Величины

$$b_n(\mathfrak{N}, X) = \sup\Big\{\sup\Big\{\varepsilon > 0 : \ \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{N}\Big\} : \ L_{n+1} \subset X\Big\},$$

$$d_n(\mathfrak{N}, X) = \inf\Big\{\sup\Big\{\inf\Big\{\|f-\varphi\|_X : \ \varphi \in L_n\Big\} : \ f \in \mathfrak{N}\Big\} : \ L_n \subset X\Big\}$$

называют соответственно бернштейновским и колмогоровским $n$-поперечниками. Указанные $n$-поперечники удовлетворяют неравенства (см., напр., [1])

$$b_n(\mathfrak{N}, X) \leq d_n(\mathfrak{N}, X).$$

Всюду далее под $X$ будем понимать пространство Харди $H_p$, $1 \leq p \leq \infty$ функций $f(z)$, аналитических внутри единичного круга

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 < \rho < 1$$

с конечной нормой

$$\|f\| = \|f\|_p = \lim_{\rho \to 1-0} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^p dt \right)^{1/p},$$

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \sup\Big\{ |f(z)| : \ |z| < 1 \Big\}.$$

Принимая одни и те же обозначения нормы, мы тем самым подчеркиваем независимость полученных результатов от значения параметра $p$ в пространстве $H_p$.

Хорошо известно, что норма функций в пространстве $H_p$, $1 \leq p \leq \infty$ реализуется на угловых граничных значениях, которые в дальнейшем будем обозначать как $f(t) := f(e^{it}) = = \lim\limits_{\rho \to 1-0} f(\rho e^{it})$. В случае $p = \infty$ будем предполагать $f(z)$ непрерывной в замкнутом круге

$|z| \leq 1$. Граничные значения $f(t)$ функции $f(z) \in H_p$ характеризуем посредством нормы разностей первого и второго порядков

$$\Delta_1(f, x) = \|f(x+t) - f(t)\|,$$

$$\Delta_2(f, 2x) = \|f(x+t) - 2f(t) + f(t-x)\|,$$

а структурные свойства функции $f(z) \in H_p, 1 \leq p \leq \infty$ определим скоростью убывания к нулю модуля непрерывности и гладкости значений производных $r$-ых порядков по аргументу $z$ :

$$\omega(f_a^{(r)}, \delta) = \sup\Big\{\Delta_1(f, x) : \ |x| \leq \delta\Big\},$$

$$\omega_2(f_a^{(r)}, 2\delta) = \sup\Big\{\Delta_2(f, 2x) : \ |x| \leq \delta\Big\},$$

задавая эту скорость убывания посредством мажоранты некоторых усреднённых величин $\omega(f_a^{(r)}, \delta)$ и $\omega_2(f_a^{(r)}, 2\delta)$. При этом полагаем

$$f_a'(z) = f'(z)z_t' = f'(z)zi \quad \text{и} \quad f_a^{(r)}(z) = \big\{f^{(r-1)}(z)\big\}_a', \quad r \geq 2, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\mathcal{P}_n$ – множество алгебраических комплексных полиномов степени не выше $n$. Наилучшее приближение функции $f(z) \in H_p$ элементами $p_n \in \mathcal{P}_n$ определим равенством

$$E_{n-1}(f) = \inf\Big\{\|f - p_{n-1}\| : \ p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\Big\}.$$

Положим

$$H_{p,a}^{(r)} := \Big\{f(z) \in H_p : \ f_a^{(r)}(z) \in H_p\Big\}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

В работе [2] доказано, что для произвольной функции $f(z) \in H_{p,a}^{(r)}$ $(r \geq 1, \ r \in \mathbb{N})$ имеет место точное неравенство

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{2n^{r-1}} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(f_a^{(r)}, 2t)dt, \tag{1}$$

а в [3] указана зависимость между наилучшим приближением функции $f(z) \in H_{p,a}^{(r)}$ $(1 \leq p \leq \infty, \ r \geq 1, \ r \in \mathbb{N})$ и усреднённым модулем гладкости производной $r$-го порядка:

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{(\pi-2)n^{r-1}} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega_2(f_a^{(r)}, 2t)dt, \tag{2}$$

причём оба неравенства (2) и (3) обращаются в равенства для функции вида $f_0(z) = az^n \in H_{p,a}^{(r)}, \ a \in \mathbb{C}$. Неравенство (1) и (2) в случае модулей высших порядков при $p = 2$ обобщены в работе [4].

Пусть $\Phi_i(u)$ $(i = 1, 2)$ – непрерывные неубывающие выпуклые вниз при $u \geq 0$ функции такие, что $\lim\{\Phi_i(u) : \ u \to 0\} = \Phi_i(0) = 0$ $(i = 1, 2)$.

Исходя из неравенств (2) и (3), вводим в рассмотрение классы $W_a^{(r)}(\Phi_i)$ $(r \in \mathbb{N}, \ i = 1, 2)$ функций $f \in H_{p,a}^{(r)}$, которые при любом $h \in \mathbb{R}_+$, соответственно, удовлетворяют условия

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega(f_a^{(r)}, 2t)dt \leq \Phi_1(h), \quad \frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_2(f_a^{(r)}, 2t)dt \leq \Phi_2(h).$$

Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций, принадлежащий пространству $H_p$, $1 \le p < \infty$, то положим также

$$E_{n-1}(\mathfrak{M}) = \sup\Big\{E_{n-1}(f): \ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Далее введём следующие обозначения

$$(\sin nt)_* := \Big\{\sin nt, \text{ если } 0 < nt \le \pi/2; \ \ 1, \text{ если } nt \ge \pi/2\Big\},$$

$$(1-\cos nt)_* := \Big\{1-\cos nt, \text{ если } 0 < nt \le \pi; \ \ 2, \text{ если } nt \ge \pi\Big\}.$$

В принятых нами обозначениях справедлива следующая

**Теорема 1.** *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$ и мажоранта $\Phi_1$ при любом $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi_1(h)}{\Phi_1(\pi/(2n))} \ge \frac{\pi}{2nh}\int\limits_0^{nh}(\sin t)_* dt. \tag{3}$$

*Тогда имеют место равенства*

$$b_n\left(W_a^{(r)}(\Phi_1), H_p\right) = d_n\left(W_a^{(r)}(\Phi_1), H_p\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W_a^{(r)}(\Phi_1), H_p\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

*Множество функций $\{\Phi_1\}$, удовлетворяющих условию (6), не пусто. Ограничению (6) удовлетворяет, например, функция $\Phi_1^*(t) = t^\alpha$, где $\alpha = \pi/2 - 1$.*

**Следствие 1.** *В условиях теоремы 1 справедливы равенства*

$$b_n\left(W_a^{(r)}(\Phi_1^*), H_p\right) = d_n\left(W_a^{(r)}(\Phi_1^*), H_p\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W_a^{(r)}(\Phi_1^*), H_p\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\pi/2} n^{-(r-1)-\pi/2}.$$

Имеет место следующая

**Теорема 2.** *Пусть $r, n \in \mathbb{N}$ и мажоранта $\Phi_2$ при любом $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi_2(h)}{\Phi_2\big(\pi/(2n)\big)} \ge \frac{\pi}{\pi-2}\cdot\frac{1}{nh}\int\limits_0^{nh}(1-\cos t)_* dt. \tag{4}$$

*Тогда при всех $1 \le p < \infty$ имеют место равенства*

$$b_n\left(W_a^{(r)}(\Phi_2), H_p\right) = d_n\left(W_a^{(r)}(\Phi_2), H_p\right) = E_{n-1}\left(W_a^{(r)}(\Phi_2)\right)_{H_p} =$$

$$= \frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{1}{n^r}\,\Phi_2\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

*Множество мажорант $\{\Phi_2\}$, удовлетворяющих условию (4), не пусто.*

Нетрудно доказать, что условию (4) удовлетворяет, например, функция вида $\Phi_2^*(t) = t^\alpha$, где $\alpha = 2/(\pi-2)$.

**Следствие 2.** *В условиях теоремы 2 имеют место равенства*

$$b_n\left(W_a^{(r)}(\Phi_2^*), H_p\right) = d_n\left(W_a^{(r)}(\Phi_2^*), H_p\right) = E_{n-1}\left(W_a^{(r)}(\Phi_2^*), H_p\right) =$$

$$= (\pi/2)^{\pi/(\pi-2)}\,(\pi-2)^{-1}\,n^{-r-2/(\pi-2)}.$$

**Литература**


1. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений. – Успехи матем. наук, 1960, т.15, №3, с. 81-120.
2. Тайков Л.В. Некоторые точные неравенства в теории приближения функций. – Anal. math., 1976, v.2, №1, pp. 77-85.
3. Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций. – Матем.заметки, 1977, т.22, №2, с. 285-294.
4. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди $H_2$. – Матем. заметки, 2000, т.68, №5, с.796-800.

# Дифференциальные уравнения и уравнения математической физики

УДК 517.946

## Общее решение одного класса неоднородной модельной обобщенной системы Коши-Римана с сингулярной точкой

Ахмедов Р.

**(Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики, Худжанд)**

В настоящей работе приводится явный вид общего решения обобщенной системы Коши-Римана

$$\partial_{\overline{z}}w - \frac{\alpha}{2\overline{z}}w - \frac{\lambda}{2\overline{z}}\overline{w} = f(z), \quad z \in G, \tag{1}$$

где $z = x + iy = re^{i\phi}$, $\alpha \neq 0$ -произвольное вещественное и $\lambda \neq 0$ произвольное комплексное числа, $f(z)$- заданная и $w(z)$- искомая функция, $2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial y$,

$G-$область, содержащая внутри точку $z = 0$ и ограниченная гладким замкнутым контуром $\Gamma$.

Решения уравнения (1) рассматриваются в классе непрерывно дифференцируемых в $G-\{0\}$ функций, допускающие особенность ниже первого порядка в начале координат. Здесь приводится рассуждение, когда $\alpha > 0$. При $\alpha < 0$ результаты остаются неизменными.

**1. Определение основных ядер $\Omega_1(z,\zeta,\alpha)$ и $\Omega_2(z,\zeta,\alpha)$.**

Множество всех $\alpha > 0$ в зависимости от соотношений $\alpha$ и $|\lambda|$ разделим на следующее счетное множество подмножеств $\{\alpha\}$:

$$N_0 = \{\alpha : 0 < \alpha < |\lambda|\}$$

$$N_s = \left\{\alpha : \sqrt{(s-1)^2 + |\lambda|^2} \le \alpha < \sqrt{s^2 + |\lambda|^2}\right\}, \quad s = 1, 2, ...$$

Пусть -плоскость комплексного переменного $z = x + iy = re^{i\phi}$ и $\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\gamma}$ фиксированная точка на ней.

Определим на топологическом произведении $ExE$ пару функций $\Omega_1(z,\zeta,\alpha)$ и $\Omega_2(z,\zeta,\alpha)$ в зависимости от значений $\alpha$ и $|\lambda|$. Эти функции в дальнейшем будут использоваться в качестве ядер основного интегрального оператора. Вывод их можно осуществлять по схеме, предложенной в [1].

При $\alpha \in N_s^+, \quad s = 0, 1, 2, ...$

$$\Omega_1 = \begin{cases} -\sum_{k=0}^{s-1} \frac{P_{-k}e^{ik(\phi-\gamma)} + P_k e^{-ik(\phi-\gamma)}}{2\mu_k}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha-\mu_k} + \\ +\sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k e^{ik(\phi-\gamma)} + P_{-k}e^{-ik(\phi-\gamma)}}{2\mu_k}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha+\mu_k}, |z| < |\zeta| \\ \sum_{k=s}^{\infty} \frac{P_{-k}e^{ik(\phi-\gamma)} + P_k e^{-ik(\phi-\gamma)}}{2\mu_k}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha-\mu_k}, |z| > |\zeta|. \end{cases}$$

$$\Omega_2 = \begin{cases} -\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\lambda e^{ik(\phi-\gamma)}+\lambda e^{-ik(\phi-\gamma)}}{2\mu_k} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha-\mu_k} + \\ +\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda e^{ik(\phi-\gamma)}+\lambda e^{-ik(\phi-\gamma)}}{2\mu_k} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha+\mu_k}, |z| < |\zeta| \\ \sum_{k=s}^{\infty} \frac{\lambda e^{ik(\phi-\gamma)}+\lambda^{-ik(\phi-\gamma)}}{2\mu_k} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha-\mu_k}, |z| > |\zeta|. \end{cases}$$

Отметим, что в выражениях $\Omega_1, \Omega_2$ слагаемые с индексом $k = 0$ следует разделить на 2. Здесь $\mu_k = \sqrt{k^2 + |\lambda|^2}$, $P_{-k} = \mu_k - k, P_k = \mu_k + k, k = 0, 1, 2, ...$

В выражениях $\Omega_1, \Omega_2$ участвуют сомножители $\left(\frac{r}{\rho}\right)$ в степенях $\alpha + \mu_k$ и $\alpha - \mu_k$. Следующее утверждение определяет знаки этих чисел в зависимости от $\alpha, |\lambda|$ и $k$.

**Лемма 1.** Пусть $\alpha > 0$. Тогда $\alpha + \mu_k > 0$ для всех значений $\alpha, |\lambda|$ и $k \geq 0$. Если $\alpha \in N_s$, то для $k = 0, 1, ..., s - 1$ числа $\alpha - \mu_k \geq 0$ и для остальных $k \geq s$ числа $\alpha - \mu_k < 0$.

**2. Свойства функций $\boldsymbol{\Omega_1 (z, \zeta, \alpha), \Omega_2 (z, \zeta, \alpha)}$.**

**Лемма 2**. Функции $\Omega_1$ и $\Omega_2$ представимы в виде

$$\Omega_1 (z, \zeta, \alpha) = \frac{\zeta}{\zeta - z} + \Omega_1^0 (z, \zeta, \alpha)$$

$$\Omega_2 (z, \zeta, \alpha) = \Omega_2^0 (z, \zeta, \alpha) - \begin{cases} \ln \left|1 - \frac{z}{\zeta}\right|, |z| < |\zeta|, \\ \ln \left|1 - \frac{\zeta}{z}\right|, |z| > |\zeta|, \end{cases} \tag{2}$$

где $\Omega_1^0$ и $\Omega_2^0$ при фиксированном значении $\zeta = \zeta_0 \neq 0, \infty \quad (z = z_0 \neq 0, \infty)$ непрерывны по $z\, (no\zeta)$ всюду в плоскости $E$ за исключением точки $z = 0$ (точки $\zeta = \infty$), где они ограничены.

Пусть $s_0$-произвольно фиксированное целое неотрицательное число. Введем обозначение $\chi (\alpha, |\lambda|) = |\alpha - \mu_{s_0}|$, когда $\alpha \in N_{s_0}$.

**Лемма 3.** Пусть $0 < \beta < \min (1, \chi)$ .Тогда имеет место соотношения

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_G \left|\Omega_1^0 (z, \zeta, \alpha)\right| \frac{|z|^\beta}{|\zeta|^{2+\beta}} d\xi d\eta < 2M_1.$$

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_G |\Omega_2 (z, \zeta, \alpha)| \frac{|z|^\beta}{|\zeta|^{2+\beta}} d\xi d\eta < 2M_2.$$

Постоянные $M_1$ и $M_2$ зависят только от $|\lambda|$, причём $M_1$ и $M_2 \to 0$ при $|\lambda| \to 0$.

Осуществляя почленное дифференцирование функций $\Omega_1$ и $\Omega_2$ устанавливаем соотношения

$$\partial_{\overline{z}}\Omega_1 = \frac{\alpha}{2\overline{z}}\Omega_1 + \frac{\lambda}{2\overline{z}}\overline{\Omega_2}, \quad \partial_{\overline{z}}\Omega_2 = \frac{\alpha}{2\overline{z}}\Omega_2 + \frac{\lambda}{2\overline{z}}\overline{\Omega}_1. \tag{3}$$

В силу равенства (2) первое из уравнения (3) может быт записано в виде

$$\partial_{\overline{z}}\Omega_1^0 = \frac{\alpha}{2\overline{z}}\Omega_1 + \frac{\lambda}{2\overline{z}}\overline{\Omega}_2,$$

Поскольку функции $\Omega_1^0$ и $\Omega_2$ допускают обычные производные по $\overline{z}$, равные обобщенной производной по $\overline{z}$ в смысле Соболева С.Л., то для них имеют место соотношения

$$\iint\limits_G \left[\Omega_1^0 \partial_{\overline{z}} g + \left(\frac{\alpha}{2\overline{z}}\Omega_1 + \frac{\lambda}{2\overline{z}}\overline{\Omega_2}\right) \cdot g\right] dxdy = 0$$

$$\iint\limits_G \left[\Omega_2 \partial_{\overline{z}} g + \left(\frac{\alpha}{2\overline{z}}\Omega_2 + \frac{\lambda}{2\overline{z}}\overline{\Omega_1}\right) \cdot g\right] dxdy = 0$$

для любой функции $g(z)$ класса $D_1^0(G)$.

Напомним, что следуя И.Н. Векуа $g(z) \in D_1^0(G)$, если $g(z) \in C(G)$ и, кроме того, существует такая подобласть $G_g$ области $G$, вне которой $g(z) = 0$ [2.стр30] .

**3. Основной интегральный оператор.**

Обозначим через $C_0\left(\overline{G}\right)$- класс непрерывно дифференцируемых в $G-\{0\}$ и ограниченных в нуле функций с нормой

$$||f_0(z)||_{C_0\left(\overline{G}\right)} = \sup |f_0(z)|\,, z \in \overline{G,}$$

а через $C_{0,\beta}\left(\overline{G}\right)$- класс функций, представимых в виде

$$f(z) = |z|^{-\beta} f_0(z)\,, \quad f_0(z) \in C_0\left(\overline{G}\right), \quad \beta > 0,$$

с нормой

$$||f(z)||_{C_{0,\beta}\left(\overline{G}\right)} = ||f_0(z)||_{C_0\left(\overline{G}\right)} = \sup |z|^{\beta} |f(z)|\,, z \in \overline{G}.$$

Через $G_{\overline{z}}(G)$ обозначим класс функций, допускающих непрерывную в $G$ обобщенную производную по $\overline{z}$ в смысле С.Л. Соболева.

Введем в рассмотрение интегральный оператор

$$S_G f = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_G \left[\frac{\Omega_1(z,\zeta,\alpha)}{\zeta} f(\zeta) + \frac{\Omega_2(z,\zeta,\alpha)}{\overline{\zeta}} \overline{f(\zeta)}\right] d\xi d\eta$$

в котором $z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad \Omega_1$ и $\Omega_2$ - выше определенные функции.

**Лемма 4.** Пусть $f(z) \in C_{0,1+\beta}\left(\overline{G}\right)$, $0 < \beta < \min(1,\chi)$. Тогда $S_G f \in C_{o,\beta}\left(\overline{G}\right)$.

**Лемма 5.** Пусть $f(z) \in C_{0,1+\beta}\left(\overline{G}\right)$,$0 < \beta < \min(1,\chi)$. Тогда $S_G f \in C_{\overline{z}}(G - \{0\})$, т.е. $S_G f$ допускает в $G$ обобщенную в смысле Соболева С.Л. производную по $\overline{z}$, которая непрерывна в области $G - \{0\}$. При этом имеет место соотношение

$$\partial_{\overline{z}} S_G f = f + \frac{\alpha}{2\overline{z}} S_G f + \frac{\lambda}{2\overline{z}} \overline{S_G f}.$$

Следующее утверждение является очевидным следствием леммы 4 и 5.

**Теорема.** Общее решение уравнения (1) из класса $C_{0,\beta}\left(\overline{G}\right) \cap C_{\overline{z}}(G - \{0\})$,
$0 < \beta < \min(1,\chi)$, даётся формулой

$$w(z) = \ (z) + S_G f,$$

где $\Phi(z)$- общее решение однородного уравнения

$$\partial_{\overline{z}} \Phi - \frac{\alpha}{2z} \Phi - \frac{\lambda}{2\overline{z}} \overline{\Phi} = 0, \quad z \in G,$$

из класса $C_{0,\beta}\left(\overline{G}\right) \cap C_{\overline{z}}(G - \{0\})\,, 0 < \beta < \min(1,\chi)$.

## Литература


1. Усманов З.Д. Обобщенные системы Коши-Римана с сингулярной точкой. Математический институт с ВЦ АН ТаджССР.-Душанбе,1993, 244с.
2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз,1959,628с.

УДК 517.95

# Эллиптические системы первого порядка с коэффициентами, определенными во всей плоскости

Байзаев С.

**(Сибайский институт (филиал) Башкирского госуниверситета, Россия)**

**Введение.** Эллиптические уравнения первого порядка вида

$$Lw \equiv w_{\bar z} + q_1(z)w_z + q_2(z)\bar w_{\bar z} + a(z)w + b(z)\bar w = f(z), \tag{1}$$

где $z = x + iy$, $2\partial_{\bar z} = \partial_x + i\partial_y$, $|q_1(z)| + |q_2(z)| \le q_0 < 1$ достаточно широко изучены в работах М.А.Лаврентьева, И.Н.Векуа, Л.Г.Михайлова, В.Н.Монахова, Л.Берса их учеников и последователей (см., например, [1 – 4] и имеющуюся там библиографию).

Теория обобщенной системы Коши – Римана

$$w_{\bar z} + a(z)w + b(z)\bar w = 0, \tag{2}$$

в случае, когда коэффициенты $a(z)$ и $b(z)$ принадлежат пространству $L_{p,2}(C), p > 2$, $C-$комплексная плоскость, разработана И.Н.Векуа [1], Л.Берсом [4] и их последователями.

Как правило, краевые задачи в ограниченных областях для уравнений вида (1) являются нётеровыми (см., например, [1, 2, 5]). Для уравнений вида (2) свойство нётеровости краевых задач в неограниченных областях сохраняются, если коэффициенты этого уравнения принадлежат классу $L_{p,2}(C)$, $p > 2$. Если же этого условия нет, то свойство нётеровости краевых задач вообще говоря нарушается (см. [6, 7]).

В связи с выше сказанным представляло интерес изучение уравнений вида (1), а также эллиптических систем вида

$$MW \equiv W_{\bar z} + A(z)W + B(z)\bar W = 0, \tag{3}$$

$W = (w_1, w_2, ..., w_n)^T$, $A$, $B-$матрицы, с коэффициентами, определенными в неограниченных областях, в частности во всей плоскости и в полуплоскости. Частные случаи системы (3) рассматривались в работах В.С.Виноградова и Д.Сафарова (см., например, [8, 9]).

В данной статье будут приведены результаты, как полученные автором лично, так и полученные совместно с Э. Мухамадиевым и учениками автора. Приводятся проблемы, представляющие научный интерес.

**Эллиптические уравнения.** Введем пространства $\mathrm{C}_\alpha$ и $\mathrm{C}^1_\alpha$. $\mathrm{C}^1_\alpha-$банахово пространство функций $w(z)$, ограниченных на С вместе с первыми частными прозводными, причем последние равномерно непрерывны по Гёльдеру с показателем $\alpha \in (0,\ 1)$; $\mathrm{C}_\alpha-$банахово пространство функций, ограниченных на С и равномерно непрерывных по Гёльдеру с показателем $\alpha \in (0,\ 1)$. Нормы в $\mathrm{C}_\alpha$ и $\mathrm{C}^1_\alpha$ определяются равенствами

$$\|w\|_\alpha = \sup_z |w(z)| + \sup_{z_1 \ne z_2} |z_1 - z_2|^{-\alpha} |w(z_1) - w(z_2)|,$$

$$\|w\|_{1,\alpha} = \|w\|_\alpha + \|w_x\|_\alpha + \|w_y\|_\alpha.$$

Функцию $f(z)$, определенную во всей плоскости называют слабо осциллирующей на бесконечности, если она удовлетворяет условию

$$\lim_{z\to\infty} \max_{|\zeta - z| \le 1} |f(z) - f(\zeta)| = 0.$$

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1) принадлежат пространству $\mathrm{C}_\alpha$ и являются слабо осциллирующими на бесконечности. Справедливы следующие утверждения [10, 11].

**Теорема 1**. *Для того чтобы оператор $L$: $\mathrm{C}^1_\alpha \;\to\; \mathrm{C}_\alpha$ был нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\varepsilon_0 = \varliminf_{z\to\infty}(|b(z)| - |a(z)|) > 0. \tag{4}$$

При выполнении условия (4) индекс оператора $L : \mathrm{C}^1_\alpha \;\to\; \mathrm{C}_\alpha$ будет равен индексу Коши функции $b(z)$ на бесконечности.

**Теорема 2**. *Пусть выполнено условие (4) и $0 < \varepsilon < 2\varepsilon_0/(1 + q_0)$. Если функция $w$(z) является решением уравнения $Lw = 0$ и удовлетворяет условию роста $|w(z)| \le Ke^{\varepsilon|z|}$, то она убывает на бесконечности как $e^{-\varepsilon|z|}$.*

Исследование уравнений вида (1) в гёльдеровых пространствах функций было продолжено в работах [12, 13].

Наряду с задачей об ограниченных во всей плоскости решениях уравнений вида (2), важным является изучение вопроса о поведении решений таких уравнений на бесконечности. Для случая, когда $a(z) \equiv 0$ и $b(z)-$антианалитический полином степени $n$, получено следующее утверждение об оценке снизу регулярных, т.е. непрерывно дифференцируемых и не имеющих в конечной точке особенностей решений уравнения (2) (см. [14]).

**Теорема 3.** Пусть $w(z)$ *регулярное во всей плоскости решение уравнения (2). Тогда найдутся такое число $r_0$, зависящее от $b(z)$ и число $c$, зависящее от $w(z)$* и *$b(z)$, что для любого $r \ge r_0$ имеет место оценка*

$$\max_{|z|\le r}|w(z)| > c\frac{e^{2r}}{r^{n+1}}.$$

**Следствие.** Уравнение (2) не имеет регулярных ненулевых решений, растущих на бесконечности не быстрее чем $|z|^N$ ($N-$целое неотрицательное число).

В отличие от уравнения (2), уравнение

$$w_{\bar z} + nz^{2n-1}\bar w = 0,$$

где $n-$ натуральное число имеет ненулевые ограниченные во всей плоскости решения вида $w(z) = z^{n-1}e^{-|z|^{2n}}$.

**Проблемы.** 1. Изучить задачу о нётеровости оператора $L : \mathrm{C}^1_\alpha \;\to\; \mathrm{C}_\alpha$ и найти формулу для индекса без предположения условия слабой осцилляции коэффициентов.

2. Изучить задачу о поведении решений уравнений вида (1) на бесконечности.

**Эллиптические системы.** Для системы (3) в работах [6, 12, 15] изучены задачи о разрешимости в гёльдеровых пространствах вектор-функций $C^1_\alpha$, в пространстве умеренно растущих распределений $S'$ и задача о решениях степенного роста, т.е. решениях $W(z)$, определенных на всей плоскости и удовлетворяющих условию

$$\|W(z)\| \le K\left(1 + |z|^N\right), \tag{5}$$

где $\|\cdot\| -$ норма в $C^n$, $K-$постоянная, зависящая от $W(z)$, $\quad N-$целое неотрицательное число. Например, в случае, когда $A = 0$, $B-$постоянная матрица установлены следующие теоремы.

**Теорема 4.** *Для того чтобы система (3) в пространстве $S'$ имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы матрица $B\bar B$ имела хотя бы одно собственное значение, лежащее на полуоси $(-\infty,\ 0]$.*

**Теорема 5.** *Пространство $P_N$ решений задачи (3), (5) является:*

*а) бесконечномерным, если матрица $B\bar{B}$ имеет хотя бы одно отрицательное собственное значение;*

*б) конечномерным, если матрица $B\bar{B}$ не имеет отрицательных собственных значений, причем*

$$\dim P_N = 2\left[n(N+1) - \sum_{j=0}^{N} \operatorname{rang} D_j\right],$$

где $D_{2k+1} = \left(B\bar{B}\right)^{k+1}$, $D_{2k} = \bar{B}\left(B\bar{B}\right)^{k}$.

Для случая $A \neq 0$ утверждение теоремы 4 сохраняется при условии, что хотя бы при одном значении $z \in C$ матрица

$$F(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{iz}{2}E + A & B \\ \bar{B} & \dfrac{i\bar{z}}{2}E + \bar{A} \end{pmatrix}$$

где $E-$единичная матрица $n$-го порядка, была вырожденной (см. [16]). Если в теореме 5 в случае б) матрица $B$ является обратимой, то пространство $P_N$ будет нулевым. Для матриц второго порядка $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ необходимым и достаточным условием наличия отрицательного собственного значения матрицы $B\bar{B}$ являются одновременное выполнение следующих соотношений:

$$|a| = |d|, \ \ |a|^2 + b\bar{c} < 0, \ \ ad\overline{bc} \geq 0.$$

Пусть в системе (3) $A(z) \equiv 0$, элементы матрицы $B(z)$ принадлежат пространству $C_\alpha$ и являются слабо осциллирующими на бесконечности. Тогда из каждой последовательности $B(z+h_k)$, $h_k \to \infty$ можно выделить подпоследовательность $B(z+h_{k_j})$, равномерно сходящуюся на каждом компакте плоскости, причем пределом будет постоянная матрица. Множество таких предельных матриц, построенных для всевозможных последовательностей $h_k \to \infty$, обозначим через $H(B)$.

Справедлива следующая

**Теорема 6.** *Для того чтобы оператор $M$: $\mathrm{C}^1_\alpha \ \to \ \mathrm{C}_\alpha$ был нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы для всех матриц $B_0 \in H(B)$* матрица $B_0\bar{B}_0$ *не имела собственных значений, лежащих на полуоси* $(-\infty, \ 0]$.

Для случая $n = 2$ установлено [17], что индекс оператора $M : \mathrm{C}^1_\alpha \ \to \ \mathrm{C}_\alpha$ равен индексу Коши функции $\det B(z)$ на бесконечности.

**Проблемы.** 1. Получить теоремы типа 4 и 5 для системы (3) в случае $A \neq 0$.

2. Получить необходимые и достаточные условия наличия (отсутствия) отрицательного собственного значения матрицы $B\bar{B}$ для случая матриц порядка три, четыре и т.д.

3. Доказать гипотезу: в случае нётеровости индекс оператора $M : \mathrm{C}^1_\alpha \ \to \ \mathrm{C}_\alpha$ равен индексу Коши функции $\det B(z)$ на бесконечности.

Для вещественной эллиптической системы вида

$$U_x + AU_y + BU = 0 \tag{6}$$

где $A$, $B$ – постоянные матрицы, причем у матрицы $A$ нет вещественных собственных значений, исследованы задачи о многообразии всех решений, о решениях из пространства $S'$, о нахождении решений, определенных во всей плоскости и растущих при $|x| + |y| \to \infty$ не быстрее степенной функции (см. [18]).

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ – различные собственные значения матрицы $A$, $(m \leq n)$, $C$ – матрица, приводящая матрицу $A$ к канонической форме Жордана и $s_k$ – порядок жордановой клетки $J_k(\lambda_k)$.

Справедлива следующая

**Теорема 7.** *Пусть матрицы $A$ и $B$ перестановочны. Тогда общее решение системы (6) определяется формулой*

$$U(x,\ y) = e^{-Bx} C V(x,\ y),$$

*где*

$$V = (V_1,\ \ldots,\ V_m)^T,\ V_k = (v_{1,k},\ \ldots,\ v_{s_k,k}),\quad k = 1,\ \ldots,\ m,$$

$$v_{l,k} = \sum_{j=0}^{s_k-l} x^{s_k-l-j} \varphi_{j,k}^{(s_k-l-j)}(\lambda_k x - y),\quad l = 1,\ \ldots,\ s_k,$$

*$\varphi_{j,k}$– произвольные аналитические функции комплексной переменной.*

Решения системы (6), растущие при $|x| + |y| \to \infty$ не быстрее степенной функции имеют вид

$$U(x,y) = C(e^{-iRe(\lambda_1\bar{\mu_1}x-\mu_1 y)/Im\lambda_1} p_{1N}(\lambda_1 x - y), ..., e^{-iRe(\lambda_n\bar{\mu_n}x-\mu_n y)/Im\lambda n} p_{nN}(\lambda_n x - y))^T$$

где $\mu_j$- собственные значения матрицы $B$, $p_{jN}(z)$ полиномы относительно $z$ степени не выше $N$, причем пространство таких решений будет конечномерным и его размерность равна $(N+1)n$.

**Теорема 8.** *Пусть $n = 2$. Тогда многообразие решений системы (6) из пространства $S'$ состоит:*

*а) из нулевой функции при $detB < 0$,*

*б) из многочленов относительно $x, y$ при $detB = 0$,*

*в) из квазимногочленов вида*

$$U(x,\ y) = e^{i(\xi_0 x + \eta_0 y)} \sum_{\substack{k,j \geq 0,\\ k+j \leq m}} a_{kj} x^k y^j + e^{-i(\xi_0 x + \eta_0 y)} \sum_{\substack{k,j \geq 0,\\ k+j \leq m}} b_{kj} x^k y^j$$

*при $detB > 0$, здесь $a_{kj}, b_{kj}$ - постоянные векторы из $R^2$, $m$ - целое неотрицательное число.*

Отметим, что в этой теореме число $m$ равно порядку функции $U(x, y)$, рассматриваемую как обобщённую функцию из $S'$ и этот порядок является конечным.

**Проблемы.** 1. Изучить при $n > 2$ для системы (6) задачи о решениях из пространства $S'$ и о нахождении решений, определенных во всей плоскости и растущих при $|x| + |y| \to \infty$ не быстрее степенной функции.

2. Исследовать разрешимость системы (6) с переменными коэффициентами в гёльдеровых пространствах $C^1_\alpha$.

## Литература


1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции.– М.: Наука, 1988. – 509 с.
2. Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. – Новосибирск, СО Наука, 1977. – 424 с.
3. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. – Душанбе, 1963. – 183 с.

4. Bers L. At outline of the theory of pseudoanalytic functions. Bull. Amer. Math. Soc., v. 62 (1956), p. 291 – 375.
5. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.3. Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир, 1987. – 694 с.
6. Байзаев С. Эллиптические системы с ограниченными коэффициентами на плоскости. – Новосибирск. НГУ, 1999. – 74 с.
7. Байзаев С. Исследования по теории ограниченных решений эллиптических систем на плоскости. Докторская диссертация. – Новосибирск. НГУ, 1999.
8. Виноградов В.С. О теореме Лиувилля для обобщенных аналитических функций // ДАН СССР, 1968. – Т. 183, № 3. – С. 503 – 506.
9. Сафаров Д. О размерности пространства решений степенного роста для одного класса эллиптических систем // Дифференциальные уравнения, 1979. - Т. 15, № 1. – С. 112 – 115.
10. Мухамадиев Э., Байзаев С. К теории ограниченных решений обобщенной системы Коши - Римана // ДАН СССР, 1986. – Т. 287, № 2. – С. 280 – 283.
11. Байзаев С., Мухамадиев Э. Об индексе эллиптических операторов первого порядка на плоскости // Дифференциальные уравнения, 1992. – Т. 28, № 5. – С. 818 – 827.
12. Байзаев С., Мухамадиев Э. О нормальной разрешимости эллиптических систем первого порядка в гёльдеровых пространствах функций на плоскости //Доклады АН Республики Таджикистан, 2004. – Т. 47, № 3. – С. 40 – 43.
13. Байзаев С., Мухамадиев Э. О нормальной разрешимости эллиптических уравнений на плоскости в пространстве Гёльдера// Вестник Новосибирского госуниверситета. Серия "Математика, механика, информатика", 2006. – Т. 6. – Вып. 1. – С. 3 – 13.
14. Байзаев С., Исомаддинова Р.М. О поведении решений одной эллиптической системы на бесконечности // Доклады АН Республики Таджикистан, 2012. – Т. 55, № 10. – С. 785 – 790.
15. Байзаев С. О медленно растущих решениях одной многомерной эллиптической системы // Доклады АН ТаджССР, 1991. – Т. 34, № 6. – С. 329 – 332.
16. Байзаев С. Об умеренно растущих решениях одной многомерной эллиптической системы // Доклады АН Республики Таджикистан, 2009. – Т. 52, № 7. – С. 501– 506.
17. Байзаев С., Мухамадиев Э. О нётеровости и индексе многомерных эллиптических операторов в гёльдеровых пространствах // В книге "Современные методы в теории краевых задач", труды Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения-XI". Ч. 1. – Воронеж, 2000.
18. Байзаев С., Воситова Д.А. О решениях одной системы уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными // Уфимский математический журнал. 2013. –Т. 5, № 2. – С. 12 – 17.

УДК 517.95

# О нётеровости одного класса многомерных эллиптических систем в гёльдеровых пространствах

Байзаев С.[†], Воситова Д.А.[‡]

**([†]Сибайский институт (филиал) Башкирского госуниверситета, Россия)**
**([‡]Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова)**

В статье рассматриваются вопросы нормальной разрешимости и нётеровости в гёльдеровых пространствах $C^1_\alpha$ [1] многомерных комплексных эллиптических систем первого порядка вида

$$Lw \equiv w_{\bar{z}} + A(z)\;\bar{w} = 0, \tag{1}$$

где $w = (w_1, ..., w_n)^T$, $A(z)-$ комплексная матрица порядка $n$. Как показано в наших работах (см. [1]), в общем случае оператор $L\;:\;C^1_\alpha \to C_\alpha$ не будет нётеровым. Отметим, что если рассмотреть оператор $L$ в гёльдеровых пространствах вектор-функций, определённых в ограниченной области, то он будет нётеровым (см. [2]). В работах В.С. Виноградова, Д. Сафарова (см. например, [3, 4]) рассмотрена задача о решениях степенного роста для эллиптических систем вида (1), когда $A$ постоянная матрица второго порядка. Для более общего случая, а именно, когда $A$ постоянная комплексная матрица $n$-го порядка в работах [5, 6] для системы (1) изучена задача о разрешимости в пространствах умеренно растущих распределений и функций степенного роста.

Предположим, что в системе (1) матрица $A$ является постоянной. Рассмотрим задачу об ограниченных во всей плоскости регулярных, то есть принадлежащих классу $C^1$, решениях однородной системы

$$Lw \equiv w_{\bar{z}} + A\,\bar{w} = 0. \tag{2}$$

Пусть $w\,(z)$ регулярное решение системы (2). Тогда в силу теоремы о гладкости решений эллиптических систем (см. [7]) функция $w\,(z)$ будет бесконечно дифференцируемой и удовлетворяет системе второго порядка

$$\Delta w - 4A\,\bar{A}\,w = 0, \tag{3}$$

где $\Delta-$ оператор Лапласа.

Будем исследовать систему (3). Если этой системе произвести замену $w = B\omega$, где новая искомая вектор-функция, $B-$ матрица, приводящая матрицу $A\,\bar{A}$ к канонической форме Жордана, то для вектор-функции $\omega$ получим следующую систему

$$\Delta\omega - 4diag\,[\Lambda_1\,, \Lambda_2,\;...,\;\Lambda_m]\,\omega = 0, \tag{4}$$

где $\Lambda_k\;\;(k = \overline{1,\;m})-$ жорданова клетка порядка $s_k$ :

$$\Lambda_k = \left(\begin{array}{l} \lambda_k\;\;1\;\;\;0\;...\;\;0 \\ 0\;\;\;\lambda_k\;\;1\;...\;\;0 \\ .................... \\ 0\;\;\;...\;\;...\,\lambda_k\;\;1 \\ 0\;\;\;...\;...\;\;0\;\;\lambda_k \end{array}\right),$$

$s_1 + s_2 + ... + s_m = n, \quad \lambda_1,\;...,\;\lambda_m\,(m \le n)-$ различные собственные значения матрицы $A\,\bar{A}$. Заметим, что система (4) распадается на $m$ независимые системы:

$$\Delta u_k - 4\Lambda_k u_k = 0\,,\quad k = \overline{1,\;m}. \tag{5}$$

где

$$u_1 = (\omega_1, ..., \omega_{s_1})^T u_2 = (\omega_{s_1+1}, ..., \ \omega_{s_1+s_2})^T, \ ..., \ u_n = (\omega_{s_1+...+s_{m-1}+1}, ..., \ \omega_n)^T.$$

Эти системы относятся к системам вида

$$\begin{cases} \Delta v_1 \ - \ 4\mu\, v_1 \ - \ 4v_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta v_{N-1} - 4\mu\, v_{N-1} - 4v_N = 0 \\ \Delta v_N - 4\mu\, v_N = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Для системы (6) рассмотрим задачу о регулярных решениях, определённых во всей плоскости и растущих при $z \to \infty$ не быстрее степенной функции, то есть удовлетворяющих условию

$$|\, v_j(z)\, | \le K(1 + |z|^p), \ \ j = \overline{1, \ N} \tag{7}$$

$p$–целое неотрицательное число, $K$–постоянная, зависящая от решения.

Справедлива следующая

**Лемма.** Пусть $\mu > 0$. *Тогда задача (6)-(7) имеет только нулевое решение.*

Предположим, что в системе (2) матрица $A$ является симметрической. Тогда собственные значения матрицы $A\bar{A}$ будут неотрицательными. Поэтому, учитывая лемму, получим следующую теорему о задаче регулярных решений системы (2), растущих при $z \to \infty$ не быстрее чем степенная функция.

**Теорема 1.** *Пусть в системе (2) матрица $A$ симметрическая и невырожденная. Тогда задача о регулярных решениях системы (2), растущих при $z \to \infty$ не быстрее чем степенная функция, имеет только нулевое решение.*

Пусть теперь матрица  является переменной и ее столбцы принадлежат пространству $_\alpha$. Тогда оператор $L\,:\ C^1_\alpha \to C_\alpha$ является линейным и ограниченным.

Справедлива следующая

**Теорема 2.** *Пусть элементы матрицы $A(z)$ являются слабо осциллирующими на бесконечности и найдётся такое число $R > 0$, что при $|z| > R$ матрица $A(z)$ является симметрической. Тогда оператор $L\,:\ C^1_\alpha \to C_\alpha$ будет нётеровым в том и только в том случае, когда выполняется условие*

$$\varliminf_{z\to\infty} |\det A(z)| > 0.$$

**Литература**


1. Байзаев С. Эллиптические системы с ограниченными коэффициентами на плоскости. Новосибирск. НГУ, 1999. 74 с.
2. Боярский Б.В. В кн.: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз. 1960. С. 461 – 483.
3. Виноградов В.С. ДАН СССР, 1968. Т. 183, №3. С. 503 – 506.
4. Сафаров Д. Дифференциальные уравнения, 1979. Т. 15, №1. С. 112 – 115.
5. Байзаев С. Доклады АН ТаджССР. 1991. Т.34, №6. С. 329 – 332.
6. Байзаев С. Доклады АН Республики Таджикистан. 2009. Т. 52, №7. С. 501 – 506.
7. Берс Л. , Джон Ф. , Шехтер М. Уравнения с частными производными М.: Мир, 1966, 351с.

УДК 517.956

# Применение метода регуляризации Ломова при решении сингулярных задач

Бобохонов К., Туйчиев О.

**(Худжандский государственный университет им. ак. Б. Гафурова)**

Рассмотрим следующую сингулярную задачу

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon u^l - A(x)u = h(x) \tag{1.1}$$

$$u(0,\varepsilon) = u^0 \tag{1.2}$$

где $A(T) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2+\cos t} & \sin t \\ \sin t & -\sqrt{2-\cos t} \end{pmatrix}$

Для решений таких сингулярных задач применим метод регуляризации Ломова. Задача рассмотрено для случаи когда матрица A(t) является матрицей второго порядка. Применим метод регуляризации Ломова:

1) Определяем спектр $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$матрицы A(t), т.е. находим корни характеристического уравнения

$$\det((t) - \lambda(t)E) = 0 \tag{1.3}$$

при каждом $t$ . Здесь E единичная матрица.

2) найдём собственные векторы матрицы A(t), решив алгебраические системы

$$(t)b_i(t) = \quad \lambda_i(t)b_i(t)(i = 1, 2) \tag{1.4}$$

получим собственные вектора $b_1(t), b_2(t)$.

3) Произведем расширение оператора $L_\varepsilon$ до некоторого оператора $T_\varepsilon$ с помощью спектра предельного оператора A(t) по следующей схеме.

Наряду с независимой переменной $t$ введем регуляризирующие независимые переменные по формулам

$$\tau_1 = -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_1(s)ds = -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (-\sqrt{2}+1)ds = \frac{\sqrt{2}-1}{\varepsilon}s\,\Big|^1{}_0 = \frac{\sqrt{2}-1}{\varepsilon} \equiv \phi_1(t,\varepsilon)$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \lambda_2(s)ds = -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (-\sqrt{2}-1)ds = \frac{\sqrt{2}+1}{\varepsilon}s\,\Big|^1{}_0 = \frac{\sqrt{2}+1}{\varepsilon} \equiv \phi_1(t,\varepsilon) \tag{1.5}$$

И будем изучать вместо искомого решения $u(t,\varepsilon)$ задачи (1.1) некоторую расширенную функцию $\widetilde{v}(t,\tau,\varepsilon)$. От расширенной функции потребуем, чтобы ее сужение, тождественно совпадало с решением (1), т.е

$$\widetilde{v}(t,\tau,\varepsilon)\,\big|_{\tau=\phi(t,\varepsilon)} \equiv u(t,\varepsilon) \tag{1.6}$$

В этих условиях

$$\dot{v}\,(t,\varepsilon) \equiv \left(\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon}D_\lambda\widetilde{v}\right)_{\tau=\phi(t.\varepsilon)} \tag{1.7}$$

где

$$D_\lambda = \lambda_1(t)\frac{\partial}{\partial\tau_1} + \lambda_2(t)\frac{\partial}{\partial\tau_2}$$

определяет дифференцирование в направлении спектрального вектора $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t))$.

Учитывая соотношение (1.5), (1.6) и задачу (1.1), для определения функции $\widetilde{\upsilon}(t, \tau, \varepsilon)$ естественно поставить следующую задачу:

$$\begin{aligned} &T_\varepsilon \widetilde{\upsilon} \equiv \varepsilon \tfrac{\partial \widetilde{\upsilon}}{\partial t} + D_\lambda \widetilde{\upsilon} + A(t)\widetilde{\upsilon} = 0, \\ &\widetilde{\upsilon}(0,0,\varepsilon) = \upsilon^0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Если в уравнение (1.8) поставим $\varepsilon = 0$ то получим

$$T_0 \widetilde{\upsilon} \equiv \lambda_1(t) \frac{\partial \widetilde{\upsilon}}{\partial t_1} + \lambda_2(t) \frac{\partial \widetilde{\upsilon}}{\partial t_2} - A(t)\widetilde{\upsilon} = 0 \tag{1.8a}$$

$$\widetilde{\upsilon}(0,0,\varepsilon) = \upsilon^0$$

Задача (1.1) регуляризована так, что выполняется условие

$$(T_\varepsilon \widetilde{\upsilon})_{t=\phi(x,\varepsilon)} = L_\varepsilon u$$

которое мы будем называть необходимым условием регуляризации. При выполнении этого условия мы вправе ожидать, что приближения к решению задачи (1.8) после сужения будут приближениями к решению исходной задачи (1.1).

Поскольку мы предполагаем, что задача (1.8) регулярна по $\varepsilon$, то естественно определять её решение в виде ряда классической теории возмущений:

$$\widetilde{\upsilon} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \upsilon_i(t, \tau) \tag{1.9}$$

Поставим этот ряд в задачу (1.8) и, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon$ . Для определения коэффициентов ряда мы получим следующие итерационные задачи:

$${}_0\upsilon_0 = 0, \upsilon_0(0,0) = \upsilon^0 \tag{1.10}$$

$${}_0\upsilon_1 = -\frac{\partial \upsilon_0}{\partial t}, \upsilon_1(0,0) = 0 \tag{1.11}$$

..................

$${}_0\upsilon_i = -\frac{\partial \upsilon_{i-1}}{\partial t}, \upsilon_i(0,0) = 0 \tag{1.12}$$

Чтобы решать задачи (1.10) – (1.12) выберем такой класс функции, в котором задачи (1.10) – (1.12) однозначно разрешимы, если их решать последовательно. Если мы найдем решение всех задач (1.10) – (1.12), то тем самым ряд (1.9) построен.

### Литература

1. Ломов С.А. Асимптотическое поведение решений обыкновеновенных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих малый параметр. ТР. МЭИ, 1962, 42.
2. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущенный. М.: Наука, 1981.

УДК 517.955

# Об одной смешанной задаче для модельного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка

Гадозода М.

**(ТТУ им. акад. М. Осими, г. Душанбе, Таджикистан)**

В настоящей работе нами рассматривается модельное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка вида:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{2n-1} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + u\right)^{2n-1} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} + u\right)^{2n-1}, \tag{1}$$

где $n \geq 2$ – заданные натуральные числа; $t \in [0, T]$, $T > 0$ $(x, y) = \overline{\Omega} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a,$ $0 \leq y \leq b\} \in R^2$, $u(t, x, y)$ – искомая функция. Рассматриваемое уравнение (1) является следствием операторного уравнения вида [1]

$$(Lu)^n = \sum_{j=1}^{m} (L_j u)^n$$

при заданных дифференциальных операторах в двухмерном пространстве.

Наша цель заключается в исследовании решения уравнения (1) в ограниченной области.

Для этого, к уравнению присоединим начальные и граничные условия:

$$u(0, x, y) \; = \; u_0(x, y), \; (x, y) \in \overline{\Omega} \tag{2}$$

$$\begin{cases} u(x, y) \text{ ограничена при } x \to +0, \; y \to +0; \\ u(a, y) = u(x, b) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Будем искать решение задачи (1)-(3) в виде [2-6]:

$$u\,(t, x, y) = T(t) \cdot \vartheta(x, y) \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1) и разделяя переменные, получаем для $T(t)$ уравнение

$$T^{/}(t) + \lambda T(t) = 0, \tag{5}$$

а для функции $\vartheta(x, y)$- следующую краевую задачу:

$$\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \vartheta\right)^{2n-1} + \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \vartheta\right)^{2n-1} + (\lambda\vartheta)^{2n-1} = 0, \tag{6}$$

$$\begin{cases} \vartheta(x, y) \text{ ограничена при } x \to +0, \; y \to +0; \\ \vartheta(a, y) = \vartheta(x, b) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Также эту задачу будем решать методом разделения переменных, т. е. полагая

$$\vartheta\,(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \tag{8}$$

и производя разделение переменных, получаем следующие одномерные задачи на собственные значения

$$X^{//} + \frac{1}{x}X + (1 + \nu)X = 0, \tag{9}$$

$$X(x) \text{ ограничена при } x \to +0,\ X(a) = 0. \tag{10}$$

$$Y^{//} + \frac{1}{y}Y^{/} + (1+\chi)Y = 0, \tag{11}$$

$$Y(y) \text{ ограничена при } y \to +0,\ Y(b) = 0 \tag{12}$$

где $\nu$ и $\chi$- постоянные разделения переменных, связанные с $\lambda$ соотношением $\nu^{2n-1} + \chi^{2n-1} = \lambda^{2n-1}$, называемым уравнением согласования.

Пусть $1 + \upsilon > 0$, тогда собственные функции и собственные значения задач (9)-(10) и (11)-(12) соответственно имеют вид:

$$X_k(x) = I_0\left(\frac{\mu_k}{a}\right), \quad \upsilon_k = \frac{\mu_k^2}{a^2} - 1,\ k \in N,$$

$$Y_m(y) = I_0\left(\frac{\mu_m y}{b}\right), \chi_m = \frac{\mu_m^2}{b^2} - 1,\ m \in N$$

Таким образом, собственным значениям

$$\lambda_{k,m} = \sqrt[2n-1]{\upsilon_k^{2n-1} + x_m^{2n-1}} \tag{13}$$

соответствуют ортогональные с весом $\rho(x,y) = xy$ собственные функции

$$\vartheta_{k,m}(x,y) = A_{k,m} I_0\left(\frac{\mu_k x}{a}\right) I_0\left(\frac{\mu_m y}{b}\right)$$

где $\vartheta_{k,m}$ – некоторый постоянный множитель. Выберем его так, чтобы норма функции $\vartheta_{k,m}(x,y)$ с весом $\rho(x,y) = xy$ была равна единице

$$\|\vartheta_{k,m}(x,y)\|^2 = \int_0^a \int_0^b \vartheta_{k,m}^2(x,y)dxdy =$$

$$= A_{k,m}^2 \int_0^a \int_0^b I_0^2\left(\frac{\mu_k x}{a}\right) I_0^2\left(\frac{\mu_m y}{b}\right) dxdy = A_{k,m}^2 \cdot \frac{a^2 b^2}{2} I_1^2\left(\mu_k\right) I_1^2(\mu_m) = 1,$$

откуда

$$A_{k,m} = \frac{2}{ab \cdot I_1(\mu_k) I_1(\mu_m)}$$

Ортогональность функций $\{\vartheta_{k,m}(x,y)\}$очевидна (см. напр.[2]) и, следовательно, функции

$$\vartheta_{k,m}(x,y) = \frac{2}{abI_1(\mu_k)I_1(\mu_m)} I_0\left(\frac{\mu_k x}{a}\right) I_0\left(\frac{\mu_k y}{b}\right) \tag{14}$$

образуют полную ортонормированную систему собственных функций в пространстве $L_2(\overline{\Omega})$.

Собственным значениям $\lambda_{k,m}$, определяемой формулой (13), соответствуют также решения уравнения (5)

$$T_{k,m}(t) = B_{k,m} \exp(-\lambda_{k,m} t)$$

где $B_{k,m}$ – произвольная постоянная.

Обратимся теперь к решению основной задачи (1)-(3). Нетрудно заметить, что функция

$$u(t,x,y) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} {}_{k,m} \cdot \vartheta_{k,m}(,) \exp(-\lambda_{k,m} t), \tag{15}$$

где $\vartheta_{k,m}(x,y)$ – определяется формулой (14), а $B_{k,m}$ – является коэффициентами Фурье функций $u_0(x,y)$ по полной ортонормированной системе собственных функций $v_{k,m}(x,y)$ в пространстве $L_2(\overline{\Omega})$:

$$B_{k,m} = \frac{2}{abI_1(\mu_k)I_1(\mu_m)} \int\limits_0^a \int\limits_0^b xyu_0(x,y)I_0\left(\frac{\mu_k x}{a}\right)I_0\left(\frac{\mu_m y}{b}\right)dxdy \tag{16}$$

будет единственным обобщенным решением смещанной задачи (1)-(3) (см. напр.[3,4])

Имеет место

**Теорема**. Пусть $u_0(x,) \in L_2(\bar{\Omega})$ и удовлетворяет условиям

$$u_0(x,y) \text{ ограничена при } x \to +0,\ y \to +0$$

$$u_0(x,y)|_{x=a} = u_0(x,y)|_{x=b} = 0.$$

Тогда функция $u(t,x,y)$, определяемая рядом (15), где $\vartheta_{k,m}(x,y)$ и $B_{k,m}$ – определяются соответственно формулами (14) и (16), является единственным обобщенным решением смешанной задачи (1)-(3), принадлежащих пространству $([0,T] \cap L_2(\overline{\Omega})) \cap C^{/}((0,T];L_2(\Omega))$.

**Литература**


1. Юнуси М. Об одном классе модельных уравнений с экстремальным свойством. Вестник национального университета, 2004, серия математика, № 1, с.128-135.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. –М., "Наука", 1977, 736стр.
3. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. -М. "Высш. школа", 1977,431с.
4. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. –М. "Наука", 1973, 407стр.
5. Беляев Н. М., Рядно А. А. Методы теории теплопроводности ч. 1. -М. "Высш. школа", 1982, 327с.
6. Гадозода М. Об одной смешанной задаче для одного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. Вестник технического университета, №4(20), 2012г., стр.4-6.


УДК 517.955

## О представлении решений одного дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка

Гадозода М., Хафизов Х.М., Саидов Ш. А.

**(ТТУ им. акад. М. Осими, г. Душанбе, Таджикистан)**

В настоящей работе рассматривается дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка вида:

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + p\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_j^4} + p_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + q_j u\right)^n \tag{1}$$

где $m, n$ $(m,n \geq 2)$ – заданные натуральные числа; $t \geq 0, (x_1, x_2, ...x_m) \in R^m$; $p,\ p_j,\ q_j\ (j = \overline{1,m})$ – действительные числа, $u(x_1, x_2, ...x_m)$ – искомая функция.

В работе [1] доказано, что модельное уравнение с экстремальным свойством вида

$$L = \max_{\alpha \in A} \left\{ \sum_{j=1}^m \alpha_j (L_j u)^s \right\}^{\dfrac{1}{s}}$$

где $A = \{\, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) : 0 < \alpha_j < 1, \ \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j^{\frac{k}{k-s}} = 1 \,\}$, $k > s > 0$ эквивалентно следующему уравнению

$$(Lu)^k = \sum_{j=1}^{m} (\, L_j u\,)^k$$

Следствием этого уравнения при

$$L = \frac{\partial^4}{\partial t^4} + p\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad L_j = \frac{\partial^4}{\partial x_j^4} + p_j\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + q_j$$

является уравнение (1).

Наша цель заключается в исследовании решения уравнения (1) в экспоненциальном классе решений.

Для этого, к уравнению присоединим начальные условия:

$$\frac{\partial^{1-i} u}{\partial t^{1-i}}(t_0, x_{01}, x_{02}, ..., x_{0m}) = u_{0i} \quad (i = \overline{1,4}) \tag{2}$$

и переопределенную систему дифференциальных уравнений [1-3]

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + p\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Cu, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_j^4} + p_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = C_j u\,(j = \overline{1,m}) \tag{3}$$

которая определяет класс экспоненциальных решений уравнения (1). Здесь $C$ и $C_j$ $(j = \overline{1,m})$ – произвольные действительные числа, являющиеся решением уравнения согласования:

$$\sum_{j=1}^{m} C_j^n = C^n \tag{4}$$

Пусть $C > 0$, $C_j - q_j > 0 (j = \overline{1,m})$. Тогда решение уравнения (1) в экспоненциальном классе, т. е. в классе функций, удовлетворяющих систему (3), с учетом (2) представляется в виде:

$$u(t, x_1, x_2, ..., x_m) = \Bigg\{ A_0 \exp\left[\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+4C}-p}{2}}(t-t_0)\right] +$$

$$+ B_0 \exp\left[-\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+4C}-p}{2}}(t-t_0)\right] + D_0 \cos\left[\sqrt{\frac{p+\sqrt{p^2+4C}}{2}}(t-t_0)\right] +$$

$$+ E_0 \sin\left[\sqrt{\frac{p+\sqrt{p^2+4C}}{2}}(t-t_0)\right]\Bigg\} \cdot \prod_{j=1}^{m}\Bigg\{ \exp\left[\sqrt{\frac{\sqrt{p_j^2-4(q_j-C_j)}-p_j}{2}}(x_j-x_{0j})\right] +$$

$$+ \exp\left[-\sqrt{\frac{\sqrt{p_j^2-4(q_j-C_j)}-p_j}{2}}(x_j-x_{0j})\right] +$$

$$+ \cos\left[\sqrt{\frac{\sqrt{p_j^2-4(q_j-C_j)}+p_j}{2}}(x_j-x_{0j})\right] +$$

$$+\sin\left[\sqrt{\frac{\sqrt{p_j^2-4(q_j-C_j)}+p_j}{2}}(x_j-x_{0j})\right]\Bigg\} \quad (5)$$

где $A_0, B_0, D_0, E_0$ произвольные постоянные числа. Потребуем, что решения вида (5) удовлетворяли начальным условиям (2), откуда легко следует:

$$A_0=\frac{2u_{01}\sqrt{C(\sqrt{p^2+4C}+p)}-\sqrt{2}u_{02}(\sqrt{p^2+4C}+p)+2\sqrt{2}(u_{03}+u_{04})}{4\cdot 3^m\cdot\sqrt{p^2+4C}\cdot\sqrt{\sqrt{p^2+4C}-p}}$$

$$B_0=\frac{2u_{01}\sqrt{C(\sqrt{p^2+4C}+p)}-\sqrt{2}u_{02}(\sqrt{p^2+4C}+p)+2\sqrt{2}(u_{03}-u_{04})}{4\cdot 3^m\cdot\sqrt{p^2+4C}\cdot\sqrt{\sqrt{p^2+4C}-p}}$$

$$D_0=\frac{u_{01}(\sqrt{p^2+4C}-p)-2u_{03}}{2\cdot 3^m\cdot\sqrt{p^2+4C}}$$

$$E_0=\frac{u_{01}(\sqrt{p^2+4C}-p)-2u_{04}}{\sqrt{2}\cdot 3^m\cdot\sqrt{p^2+4C}\cdot\sqrt{\sqrt{p^2+4C}+p}}$$

Пусть $C>0,\ C_j-q_j=0(j=\overline{1,m})$. Тогда, как и раньше, решение уравнения (1) с учетом (2) представляется в виде:

$$u(t,x_1,x_2,...,x_m)=\left(\frac{3}{2}\right)^m\Bigg\{A_0\exp\left[\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+4C}-p}{2}}(t-t_0)\right]+$$
$$+B_0\exp\left[-\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+4C}-p}{2}}(t-t_0)\right]+D_0\cos\left[\sqrt{\frac{p+\sqrt{p^2+4C}}{2}}(t-t_0)\right]+$$
$$+E_0\sin\left[\sqrt{\frac{p+\sqrt{p^2+4C}}{2}}(t-t_0)\right]\Bigg\}\cdot\prod_{j=1}^m\{1+x_j-x_{0j}+$$
$$+\cos\left[\sqrt{p_j}(x-x_j)\right]+\sin\left[\sqrt{p_j}(x-x_j)\right]\}\ \text{при } p>0, p_j>0(j=\overline{1,m}); \quad (6)$$

$$u(t,x_1,x_2,...x_m)=\Bigg\{A_0\exp\left[\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+4C}-p}{2}}(t-t_0)\right]+$$
$$+B_0\exp\left[-\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+4C}-p}{2}}(t-t_0)\right]+D_0\cos\left[\sqrt{\frac{p+\sqrt{p^2+4C}}{2}}(t-t_0)\right]+$$
$$+E_0\sin\left[\sqrt{\frac{p+\sqrt{p^2+4C}}{2}}(t-t_0)\right]\Bigg\}\times\prod_{j=1}^m\Bigg\{1+x_j-x_{0j}+\exp\left[\sqrt{|p_j|}(x_j-x_{0j})\right]+$$
$$+\exp\left[-\sqrt{|p_j|}(x_j-x_{0j})\right]\Bigg\}, \qquad p_j<0\ (j=\overline{1,m}>); \quad (7)$$

Пусть $C > 0,\ C_j - q_j < 0(j = \overline{1,m})$. Тогда, аналогичное решение уравнения (1) с учетом (2) представляется в виде:

$$u(t,x_1,x_2,...x_m) = \left(\frac{3}{2}\right)^m \left\{A_0 \exp\left[\ \sqrt{\frac{\sqrt{p^2+4C}-p}{2}}(t-t_0)\right] + \right.$$

$$+ B_0 \exp\left[-\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+4C}-p}{2}}(t-t_0)\right] + D_0 \cos\ \left[\sqrt{\frac{p+\sqrt{p^2+4C}}{2}}(t-t_0)\right] +$$

$$\left. +E_0 \sin\left[\ \sqrt{\frac{p+\sqrt{p^2+4C}}{2}}\ (t-t_0)\right]\right\} \times \prod_{j=1}^{m} \left\{\cos\left[\sqrt{\frac{p_j-\sqrt{p_j^2-4(q_j-C_j)}}{2}}(x_j-x_{0j})\right] + \right.$$

$$+\sin\left[\sqrt{\frac{p_j-\sqrt{p_j^2-4(q_j-C_j)}}{2}}(x_j-x_{0j})\right] + \cos\ \left[\sqrt{\frac{p_j+\sqrt{p_j^2-4(q_j-C_j)}}{2}}(x_j-x_{0j})\right] +$$

$$\left. +\sin\ \left[\sqrt{\frac{p_j+\sqrt{p_j^2-4(q_j-C_j)}}{2}}(x_j-x_{0j})\right]\right\} \quad (8)$$

где, постоянные $A_0, B_0, D_0, E_0$ определяются как и раньше. Имеет место

**Теорема.** Пусть $C$ и $C_j$ $(j = \overline{1,m})$ – являются решением уравнения согласования (4). Тогда решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2), в простом классе представляется в виде (5) - (8) .

### Литература

1. Юнуси М. Об одном классе модельных уравнений с экстремальным свойством. Вестник национального университета, 2004, серия математика, № 1, с.128-135
2. Гадозода М., Кодиров О.К. Об одном классе дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка, Вестник национального университета (серия естественных наук). №,1 (49) Душанбе, 2009г., с. 49-53.
3. Гадозода М., Кодиров О.К. Представления решений одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. Паёми Донишгохи техники. Вестник технического университета №4. 2009 г., стр. 5-7.

УДК 517.925

## О регуляризаторе оператора класса Трибеля с матричными коэффициентами

Гаибов Д.

**(Российско-Таджикский (Славянский) университет, Душанбе)**

В настоящем докладе построен регуляризатор для оператора класса Трибеля и найдены оценки некоторых интегральных операторов, которые получаются в результате применения регуляризирующего оператора к оператору класса Трибеля.

Пусть $m$ – натуральное, $\mu v$ – вещественные числа, причем $v > \mu + 2m$. Положим

$$\chi_l = \frac{1}{2m}\left(v\left(2m-l\right)+\mu l\right), \quad l = 0, 2, \ldots, 2m.$$

Пусть $\Omega = (a, b)$, где $-\infty \leq a < b < +\infty$, и пусть $\rho\left(t\right)$ – бесконечно дифференцируемая в $\Omega$ положительная функция, т.е. $\rho\left(t\right) \in C^{\infty}\left(\Omega\right)$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{t \to -\infty} \rho\left(t\right) = \lim_{t \to +-\infty} \rho\left(t\right) = +\infty, \quad \rho\left(t\right) \geq 1, \tag{1}$$

$$\left|\frac{d^k}{dt^k}\rho\left(t\right)\right| \leq c_k \rho^{1+k}\left(t\right), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots .c_k > 0. \tag{2}$$

Введем в рассмотренный класс $\Im^{m,n}_{\mu,v}\left(\Omega; \rho\left(t\right)\right)$ (см [1]) дифференциальных операторов $A$ вида

$$A = \sum_{l=0}^{m} \rho^{\chi_{2l}}\left(t\right) B_l\left(t\right) \frac{d^{2l}}{dt^{2l}} + \sum_{k=0}^{2m-1} A_k\left(t\right) \frac{d^k}{dt^k},$$

где $B_l\left(t\right) = \left(b_l^{ij}\right)_{i,j=1}^n, A_k\left(t\right) = \left(a_k^{ij}\right)_{i,j=1}^n \in C^{\infty}\left(\Omega, \mathrm{End}C_n\right), \ l = \overline{0, m}$ и $k = \overline{0, 2m-1}$ – Эрмитовые квадратные матрица-функции порядка $n$ с бесконечно дифференцируемыми элементами, такие что

$$\sup_{t \in \Omega}\left\|\frac{d^k}{dt^k} B_l\left(t\right)\right\| < +\infty, \quad k = 0,\ 1,\ 2\ \ldots, \quad l = \overline{0,\ m},$$

$$B_0\left(t\right) \geq CI\,, \quad \left(-1\right)^m B_m\left(t\right) \geq CI, \quad \left(-1\right)^l B_l\left(t\right) \geq 0, \quad l = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1\,,$$

где $C > 0$, $I$ – единичная матрица $(n \times n)$.

Наконец для всех $j = 0, 1, 2, \ldots$ квадратные матрица-функции $A_k\left(t\right)$, $(k = 0, 1, 2, \ldots, 2m-1)$ порядка $n$ удовлетворяет условиям

$$B_0\left(t\right) \geq CI\,, \quad \left(-1\right)^m B_m\left(t\right) \geq CI, \quad \left(-1\right)^l B_l\left(t\right) \geq 0, \quad l = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1\,,$$

$$\lim_{t \to a+0} \rho^{-j-\chi_k}\left(t\right)\left\|\frac{d^j}{dt^j} A_k\left(t\right)\right\| = 0, \quad \lim_{t \to b-0} \rho^{-j-\chi_k}\left(t\right)\left\|\frac{d^j}{dt^j} A_k\left(t\right)\right\| = 0,$$

Символом $L_{p,l}\left(\Omega\right)^n$ обозначим пространство вектор-функции $u\left(t\right) = \left(u_1\left(t\right), u_2\left(t\right), \ldots, u_n\left(t\right)\right)$ определенных в $\Omega$ с конечно формой

$$\|\, u \,\|_{L_{p.\ l}(\Omega)^n} = \left[\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} l^p\left(t\right) \left|\, u_j\left(t\right) \right|^p dt\right]^{1/p},$$

где $l\left(t\right) \in C'\left(\Omega\right)$ – положительная весовая функция для которой выполняется оценка

$$l'\left(t\right) = 0\left(1\right)\ l\left(t\right)\ q^{\omega}\left(t\right), \ \left(t \to a+0, \ t \to b-0\right)\,,$$

$$q\left(t\right) = b_0\left(1\right) \rho^{\chi_0}\left(t\right), \quad \omega = \frac{1}{2m}\,.$$

Введем интегральный оператор $F_\lambda$ с ядром

$$F_\lambda\left(t,\ \tau\right) = \frac{1}{2p}\left(\phi\theta\left(t-\tau\right)\right)\delta^{-1}\left(\tau\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{is(t-\tau)}\left(a\left(\tau,\ s\right)+\lambda\right)^{-1} ds,$$

где $\phi \in C_0^\infty(R)$ – неотрицательная функция, такая что $\phi(t) = 1$ при $|t| < 1$,

$$\delta(t) = q^\omega(\tau), \quad q(\tau) = B_0(\tau)\rho^{\chi_0}(\tau), \quad \omega = \frac{1}{2m},$$

$$a(t, s) = \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \rho^{\chi_{2l}}(\tau) B_l(\tau) s^{2l}, \quad \tau, t, \lambda > 0, \quad s \in R.$$

Существует достаточно малое число $\theta > 0$ и достаточное большое число $\lambda > 0$ такие, что

$$F_\lambda : C_0^\infty(\Omega)^n \to C_0^\infty(\Omega)^n.$$

Обозначим $B^k(\Omega)^n = B^k(\Omega;\ C_n)$, $k \in z$, $k \geq 0$ класс измеримы вектор-функций $u(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t))$, таких, что

$$\operatorname{ess\,sup} \sum_{j=0}^{k} \| u^{(j)}(t) \| < +\infty,$$

$B_0^k(\Omega;\ C_n)$ – класс финитных функций

$$u \in B^k(\Omega;\ C_n).$$

$\tilde{L}_{p,\,l}$ – класс непрерывных операторов в $L_{p,\,l}$.

**Теорема.** Существует числа $\theta$, $x > 0$, зависящие только от $m$ такие, что если оператор $A \in \Im_{\mu,v}^{m,n}(\Omega; \rho(t))$ и выполнено равенство $|l'(t)| \leq \chi\delta^{-1}(t)\, l(t)$, то оператор $F_\lambda \in \tilde{L}_{p,l}$ $1 \leq p < +\infty$. При этом для любой функции $\vartheta \in B_0^1(\Omega)^n$ функция

$$w(t) = \int_\Omega F_\lambda(t, \tau)\vartheta(\tau)\, d\tau \in B_0^{2m}(\Omega)^n$$

и удовлетворяет равенству

$$(A + \lambda E)\, w = \vartheta + G_\lambda \vartheta, \tag{3}$$

где $G_\lambda$ – некоторый интегральный оператор такой, что

$$G_\lambda \in \tilde{L}_{p,l}, \|G_\lambda\|_{p,l} \leq \frac{1}{3}.$$

## Литература

1. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980, с. 510.
2. Бойматов К.Х. Сильно вырождающиеся эллиптические дифференциальные операторы класса Трибеля // Известия ВУЗов, 1988, №8, с. 39-47
3. Бойматов К.Х., Лизоркин П.И. Дифференциальные уравнения, 1989, т.25, ;4, с. 578-588.

УДК 517.91

# Интегральное представление решений и задача Коши-Рикье для уравнения, полученного итерированием обыкновенного дифференциального оператора первого порядка с внутренней сингулярной точкой

Дадоджонова М.Я., Олимов А.Г.

**(Худжандский государственный университет им. ак. Б. Гафурова)**

Пусть $\Gamma = (a, b)$ интервал вещественной числовой оси, $c$ точка удовлетворяющая неравенству $a < c < b$ и $\Gamma_c = \Gamma \backslash \{c\}$. На множестве $\Gamma_c$ рассмотрим уравнение вида

$$A_{1,c}^n y = \frac{f(x)}{|x-c|} \tag{1}$$

где $A_{1,c}y \equiv y' + \dfrac{p(x)}{|x-c|}y - \dfrac{q(x)}{|x-c|}$- обыкновенный дифференциальный оператор первого порядка, $n$ - натуральное число, $A_{1,c}^s y = A_{1,c}\left(A_{1,c}^{s-1}y\right)$, $A_{1,c}^0 y \equiv y$, $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$- известные функции, заданные на $\Gamma_c$, а $y(x)$- искомая на $\Gamma_c$ функция.

Определение. Решением уравнения (1) называется функция $y(x)$, удовлетворяющая условиям $A_{1,c}^s y \in C^1(\Gamma_c)$ $\quad s = \overline{0, (n-1)}$, которая обращает это уравнение в тождество относительно точек $\Gamma_c$.

Отметим, что исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами посвящено ряд работ, например [1- 4]. В работе [2] уравнение (1) изучено в случае $n = 1$, а в работе [3] в случае $n \geq 1$. В них построены интегральные представления решений уравнения в зависимости от расположения сингулярной точки $x = c$ на $\overline{\Gamma}$. Рассмотрены случаи, когда она совпадает с левой, правой граничной точкой интервала и является внутренней ее точкой. С помощью полученных формул исследованы поведение решений в окрестности сингулярной точки. В работе [2] решены задачи типа Коши.

Целью настоящей работы является применение интегрального представления общего решения уравнения (1), полученного в работе [3] к изучению свойства решений в окрестности сингулярной точки, выяснению постановки и решению задачи Коши - Рикье.

В работе [3], в частности доказано следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть в уравнении (1) сингулярная точка является
промежуточной точкой интервала $\Gamma$, т.е. удовлетворяет неравенству $a < c < b$.

Пусть $p(x)$, $q(x)$, $f(x) \in C(\Gamma_c)$ ., а в самой точке $c$ имеют разве лишь разрыв первого рода и функция $p(x)$ удовлетворяет условию Гельдера, т.е.

$|p(x) - p(c+0)| \leq H_3^+(x-c)^{h_3^+}$ при $x \to c+0$,$|p(-0) - p(x)| \leq H_3^-(c-x)^{h_3^-}$ при $x \to c-0$, где $H_3^\pm - const.$,$0 < h_3^\pm \leq 1$ и $p(c+0) > 0$,$p(c-0) < 0$.

Тогда общее решение уравнения (1) выражается следующей формулой:

$$y(x) = \left\{ \begin{array}{ll} K_c^{1,-}\left[p, q, f, C_{10}, C_{11}, ..., C_{1(n-1)}\right] \text{при} & a < x < c \\ K_c^{1,+}\left[p, q, f, C_{20}, C_{21}, ..., C_{2(n-1)}\right] \text{при} & c < x < b \end{array} \right) \tag{2}$$

где

$$K_c^{1,-}\left[p, q, f, C_{10}, C_{11}, \ldots, C_{1(n-1)}\right] = (-x)^{p(c-0)} \exp\left[-w_{p,c}^{1,-}(x)\right]\left[\sum_{j=0}^{n-1} C_{1j}\frac{(c-x)^j}{j!} - \right.$$

$$-\int\limits_x^c \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-\xi)^j}{j!} q(\xi)(-\xi)^{-p(-0)-1} \exp\left[w_{p,}^{1,-}(\xi)\right] d\xi-$$

$$\left. -\int\limits_x^c \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} f(\xi)(c-\xi)^{-p(c-0)-1} \exp\left[w_{p,c}^{1,-}(\xi)\right] d\xi \right],$$

$$K_c^{1,+}\left[p,q,f,C_{20},C_{21},...,C_{2\,(n-1)}\right] =$$

$$= (x-c)^{-p(c+0)} \exp\left[-w_{p,c}^{1,+}(x)\right] \left[ \int\limits_c^x \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-\xi)^j}{j!} q(\xi)(\xi-c)^{p(c+0)-1} \exp\left[w_{p,c}^{1,+}(\xi)\right] d\xi + \right.$$

$$\left. + \int\limits_c^x \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} f(\xi)(\xi-c)^{p(c+0)-1} \exp\left[w_{p,c}^{1,+}(\xi)\right] d\xi + \sum_{j=0}^{n-1} C_{2j} \frac{(x-c)^j}{j!} \right]$$

$$w_{p,c}^{1,-}(x) = \int\limits_x^c \frac{p(c-0)-p(t)}{c-t} dt, \quad w_{p,c}^{1,+}(x) = \int\limits_c^x \frac{p(t)-p(+0)}{t-c} dt,$$

а

$$C_{kj},\ k=1,2, j=\overline{0,\ (n-1)}$$

- произвольные постоянные.

Замечание 1. В случае $p(c+0)>0, \quad p(c-0)<0$ непосредственно из представления (2) следует, что все решения уравнения (1) выражаемые этой формулой в окрестности точки $c$стремятся к бесконечности, и их порядок определяется следующими соотношениями:

$$y(x) = O\left((c-x)^{p(c-0)}\right) \text{ при } \quad x \to c-0, \quad y(x) = O\left((x-c)^{-p(c+0)}\right) \text{ при } \quad x \to c+0.$$

Замечание 2. Аналогичные результаты имеют место и для других случаев значений чисел $p(c+0)$, $p(c-0)$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для степеней оператора $A_{1,c}$ от функции вида (2) имеет место формула

$$A_{1,c}^s y = \left\{ \begin{array}{l} K_{c,s}^{1,-}\left[p,q,f,C_{1s},...,C_{1(n-1)}\right] \text{ при } \quad a<x<c \\ K_{c,s}^{1,+}\left[p,q,f,C_{2s},...,C_{2\,(n-1)}\right] \text{ при } \quad c<x<b \end{array} \right., \quad s=\overline{1,(n-1)}. \tag{3}$$

и что решения уравнения (1) удовлетворяют следующим характеристическим

равенствам:

$$\left[(c-x)^{-p(c-0)} A_{1,c}^s y\right]_{x=c-0} = C_{1s}, \quad \left[(x-c)^{p(c+0)} A_{1,c}^s y\right]_{x=c+0} = C_{2s} \quad s=\overline{0,\ (n-1)}. \tag{4}$$

Интегральное представление (2) позволяет ставить и решить следующую задачу Коши – Рикье: при выполнении условий теоремы 1 найти решение уравнения (1) удовлетворяющее одному из следующих групп граничных условий:

$$\left[(c-x)^{-p(c-0)} A_{1,c}^s y\right]_{x=c-0} = y_3^{s,-}, \quad \left[(x-c)^{p(c+0)} A_{1,c}^s y\right]_{x=c+0} = y_3^{s,+}, \ s=\overline{0,\ (n-1)}; \tag{5}$$

$$\left[(c-x)^{-p(c-0)} A_{1,c}^s y\right]_{x=c-0} = \left[(x-c)^{p(c+0)} A_{1,c}^s y\right]_{x=c+0} = y_3^s s=\overline{0,\ (n-1)} \tag{6}$$

где $y_3^{s,-} y_3^{s,+}, y_3^s$, $s=\overline{0,(n-1)}$ заданные постоянные числа.

Для нахождения решения задачи, удовлетворяющее условиям (5) используем интегральное представление (2), формулу (3) для степеней оператора $A_{1,c}$и характеристические равенства (4). В случаях $a<x<c$ и $c<x<b$, требуя выполнение, соответственно первой и второй группы условий (5), находим значение произвольных постоянных: $\overline{C_{1s}=y_3^{s,-}, C_{2s}=y_3^{s,+}}$ $s=\overline{0,\,(n-1)}$. Найденные значения произвольных постоянных $C_{ks}$, $k=1,2$, $s=\overline{0,\,(n-1)}$ подставляя в формулу (2), находим решение уравнения (1) удовлетворяющее условиям (5), которая выражается формулой

$$y\left(x\right)=\left\{\begin{array}{ll} K_c^{1,-}\left[p,q,f,y_3^{0,-},y_3^{1,-},...,y_3^{n-1,-}\right] \text{при} & a<x<c \\ K_c^{1,+}\left[p,q,f,y_3^{0,+},y_3^{1,+},...,y_3^{n-1,+}\right] \text{при} & c<x<b \end{array}\right. \tag{7}$$

Покажем, что найденное решение задачи Коши - Рикье является единственным. С этой целью установим, что вообще эта задача не может иметь два различных решения.

При помощи математической индукции легко доказать, что для функций $y_1\left(x\right)$ и $y_2\left(x\right)$, удовлетворяющих условиям определения приведенного в начале статьи, справедлива формула

$$A_{1,c}^s y_1-A_{1,c}^s y_2=B_{1,c}^s\left(y_1-y_2\right), \quad s=0,1,2,...,n, \tag{8}$$

где $B_{1,c}v\equiv v'\left(x\right)+\dfrac{p(x)}{|x-c|}v\left(x\right)$ линейный обыкновенный дифференциальный оператор первого порядка, $B_{1,c}^0 v\equiv v$.

Теперь допустим, что задача Коши - Рикье имеет два различных решения $y_1\left(x\right)$ и $y_2\left(x\right)$, $y_1\left(x\right)\neq y_2\left(x\right)$. Тогда на основании формулы (8) заключаем, что их разность $v\left(x\right)=y_1\left(x\right)-y_2\left(x\right)$ будет решением уравнения

$$B_{1,c}^n v=0, \tag{9}$$

причем удовлетворяющим следующим граничным условиям в точке $x=c$:

$$\left[(c-x)^{-p(c-0)}\,B_{1,c}^s y\right]_{x=c-0}=0\,,\quad \left[(x-c)^{p(c+0)}\,B_{1,c}^s y\right]_{x=c+0}=0\,,\ s=\overline{0,\,(n-1)}. \tag{10}$$

Уравнение (9) является частным случаем уравнения (1), поэтому его
общее решение, в силу формулы (2) записывается следующим образом:

$$v\left(x\right)=\left\{\begin{array}{ll} (c-x)^{p(c-0)}\exp\left[-w_{p,c}^{1,-}\left(x\right)\right]\cdot\left[\sum\limits_{j=0}^{n-1}C_{1j}\frac{(c-x)^j}{j!}\right] & \text{при} \quad a<x<c \\ (x-c)^{-p(c+0)}\exp\left[-w_{p,c}^{1,+}\left(x\right)\right]\cdot\left[\sum\limits_{j=0}^{n-1}C_{2j}\frac{(x-c)^j}{j!}\right] & \text{при} \quad c<x<b. \end{array}\right. \tag{11}$$

Для степеней оператора $B_{1,c}v$ на основании формулы (3) справедлива следующая формула:

$$B_{1,c}^s v=\left\{\begin{array}{l} (c-x)^{p(c-0)}\exp\left[-w_{p,c}^{1,-}(x)\right]\cdot\left[\sum\limits_{j=s}^{n-1}C_{1j}\dfrac{(c-x)^{j-s}}{(j-s)!}\right],\ \text{при}\ a<x<c \\ (x-c)^{-p(c+0)}\exp\left[-w_{p,c}^{1,+}\left(x\right)\right]\cdot\left[\sum\limits_{j=s}^{n-1}C_{2j}\dfrac{(x-c)^{j-s}}{(j-s)!}\right],\ \text{при}\ c<x<b \end{array}\right.,$$

$$s=\overline{1,(n-1)}, \tag{12}$$

С помощью равенств (11) и (12), находим, что единственное решение уравнения (9) удовлетворяющее условиям (10) будет функция $v\left(x\right)\equiv 0$. Отсюда следует, что $y_1\left(x\right)\equiv y_2\left(x\right)$.

Значить задача Коши – Рикье с условиями (5) два различных решения иметь не может, и ее найденное решение (7) единственное.

Аналогичным образом находится удовлетворяющее условиям (6) единственное решение уравнения (1). Оно имеет вид:

$$y\,(x) = \left\{ \begin{array}{l} K_c^{1,-}\left[p, q, f, y_3^0\,, y_3^1, ..., y_3^{n-1}\right] \text{при} \quad a < x < c \\ K_c^{1,+}\left[p, q, f, y_3^0\,, y_3^1, ..., y_3^{n-1}\right] \text{при} \lesssim x < b \end{array} \right. \qquad (13)$$

Таким образом, справедливо утверждение

**Теорема 2.** Пусть относительно уравнения (1) выполняются условия теоремы 1. Тогда задача Коши - Рикье имеет единственное решение, причем решение удовлетворяющее условиям (5) дается формулой (7), а условиям (6) дается формулой (13).

**Литература**


1. Раджабов Н. Шевчук В. Доклады АН Тадж. ССР,1989, т.32, №8, с.506-509.
2. Rajabov N. Introduction to ordinary differential equations with singular and super-singular coefficients.-Dushanbe, 1998.- 160p.
3. Дадоджонова М.Ё., Раджабов Н.Р.,Олимов А.Г. Вестник педагогического университета. Издание Таджикского государственного педагогического университета им. Садриддина Айни.- Душанбе, 2013, №5(54). - С. 39-43.
4. Олимов А.Г. Современные проблемы математики и ее приложения. Материалы международной научной конференции, посвященной 70- летию члена-корр. АН Республики Таджикистан Мухамадиева Э.М. (Душанбе, 28 – 30 июня 2011г.). - Душанбе: “Дониш”, 2011.- С. 99 – 101.
5. Олимов А.Г.Ученые записки. Естественные и экономические науки. Издание Худжандского государственного университета им. академика Б.Г.Гафурова.- Худжанд, 2010, №2(17). - С. 17-19.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т.3.- М.: ГИФМЛ, 1963.- 656с.
7. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.- М.: ГИФМЛ, 1959.- 468с.


УДК 517.968.2

# О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками, зависящими от полюса

Джангибеков Г., Валиев Н.Г.

**(Таджикский национальный университет)**

Пусть $D$ - ограниченная область комплексной плоскости, граница $\Gamma$ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова, не пересекающихся между собой и содержащая внутри точку $z = 0$, $I$ - тождественный оператор, $a(z), b(z), c(z), d(z), q(z)$ - непрерывные в $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$ комплекснозначные функции, причем $|q(z)| \leq q_0 < 1$ при всех $z \in \overline{D}$.

В пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2):$

$$L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-\frac{2}{p}}|f(z)| = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-\frac{2}{p}}} = ||F||_{L^p}\}$$

рассмотрим следующий сингулярный интегральный оператор

$$A = a(z)I + b(z)K + c(z)S_q + d(z)\overline{S}_qK, \qquad (1)$$

где
$$(Kf)(z) = \overline{f(z)}, \quad (S_q f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{\left(\zeta - z + q(z)(\overline{\zeta} - \overline{z})\right)^2},$$
черта над функцией означает переход к комплексно-сопряженным значениям, а двумерный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Оператор (1) в случае $q(z) \equiv 0$ изучен в работе [1]. В [2] нами был исследован случай когда в (1) $b(z) = c(z) = 0$ и $|q(z)| \leq q_0 < 1$. В данной работе устанавливаются необходимые и достаточные условия нётеровости сингулярных интегральных операторов типа $A$ в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ и получены формулы для вычисления индекса.

Поскольку символ оператора $S_q$ (см. [2]) равен
$$\Phi_z(\sigma) = \frac{\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}{1 - q(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}, \; (\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2, \; 0 < |\sigma| < \infty),$$
то тогда, согласно [3], свойства оператора $A$ определяются свойствами матрицы
$$G_z(\sigma) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)\frac{\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}{1-q(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}} & b(z) + d(z)\frac{\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}}{1-\overline{q(z)}\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}} \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\frac{\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}{1-q(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}} & \overline{a(z)} + \overline{c(z)}\frac{\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}}{1-\overline{q(z)}\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}} \end{pmatrix}, \; z \in \overline{D}.$$

**Лемма.** *Матрица $G_z(\sigma)$ невырожденна для всех $z \in \overline{D}$ и $\sigma (det G_z(\sigma \neq 0)$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из неравенств*
$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu(z)|, \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{2}$$
$$|\Delta_2(z) - \Delta_1(z)|q(z)|^2 - 2Re(\overline{\lambda(z)}q(z))| > |\lambda(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu(z)|, \forall z \in \overline{D}, \tag{3}$$
*где*
$$\Delta_(z) = |a|^2 - |b|^2, \quad \Delta_2 = |c|^2 - |d|^2, \quad \lambda = \overline{a}c - b\overline{d}, \quad \mu = a\overline{d} - \overline{b}c.$$
Рассмотрим следующие ограниченные в $L^p_{\beta-2/p}(D), (1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ операторы $T_1 = \overline{a(z)}I - b(z)K, T_2 = \overline{d(z)}I - c(z)K$. Из леммы следует, что при выполнении условия (2) оператор $T_1$ имеет непрерывный обратный, причем
$$A = T_1^{-1}A_1, \quad A_1 = \Delta_1(z)I + \lambda(z)S_q + \overline{\mu(z)}KS_q.$$
В случае (3) оператор $T_2$ имеет непрерывный обратный
$$A = T_2^{-1}A_2, \quad A_2 = \mu(z)I - \lambda(z)K - \Delta_2(z)KS_q.$$
Таким образом, исследование нётеровости и индекса оператора $A$ сводится к соответствующему исследованию операторов $A_1$ и $A_2$. Из результатов [3] следует, что для нётеровости $A$ необходимо выполнение (2) или (3).

Имеет место

**Теорема.** *Для нётеровости оператора $A$ в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий*
$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu(z)|, \forall z \in \overline{D}, \tag{4}$$
$$\begin{aligned} &|\Delta_2(z) - \Delta_1(z)|q(z)|^2 - 2Re(\overline{\lambda(z)}q(z))| > \\ &> |\lambda(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu(z)|, \forall z \in \overline{D}; \; \mu(t) \neq 0, \forall t \in \Gamma. \end{aligned} \tag{5}$$

*При этом, если выполнено (4), то оператор $A$ имеет ограниченный обратный, а при выполнении (5) его индекс $\varkappa$ равен*

$$\varkappa = 2Ind_{\Gamma}\mu(\tau).$$

**Замечание.** Если в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(E)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ будем рассматривать оператор

$$A_1 = a(z)I + b(z)K + c(z)S^E_q + d(z)\overline{S^E}_q K,$$

где $E$ -комплексная плоскость $z = x + iy$, а $E_1$ - её пополнение одной бесконечно удалёной точкой, а функции $a(z), b(z), c(z), d(z)$ - определены и непрерывны на $E_1$,

$$(S^E_q f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_E \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{\Big(\zeta - z + q(z)(\overline{\zeta} - \overline{z})\Big)^2},$$

то при выполнении условии (2) и (3) оператор $A_1$ обратим в указанных пространствах.

**Обобщение.** Аналогичный результат в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,$ $0 < \beta < 2)$ получен для оператора

$$A = a(z)I + b(z)K + c(z)S_{mq} + d(z)\overline{S}_{mq}K,$$

где

$$(S_{mq}f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi}\iint_D \frac{|\zeta - z|^{2(m-1)}f(\zeta)ds_\zeta}{\Big((\overline{\zeta} - \overline{z})^m + (-1)^{m-1}q(z)(\zeta - z)^m\Big)^2}.$$

## Литература

1. Бойматов К.Х., Джангибеков Г. - Успехи математических наук, 1988, т.43, в.3, с. 171-172.
2. Джангибеков Г., Валиев Н. - ДАН РТ, 2013, т. 56, №1.
3. Duduchava R. - On multidimensional singular integral operators . J. Operator Theory. 1984. V. 11. p.41-76; p.199-214.
4. Михлин С.Г. - Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.; Физматгиз, 1962. 254 с.

УДК 517.968.2

# Об одном модельном сингулярном интегральном уравнении с нечётной характеристикой

Джангибеков Г., Козиев Г.

**(Таджикский национальный университет)**

В комплексной плоскости $z = x + iy$ рассмотрим уравнение

$$f(z) = \frac{\lambda}{2\pi i}\frac{z}{|z|}\iint_{|\zeta|\le 1}\frac{e^{-i\theta}}{|\zeta - z|^2}\overline{f(\zeta)}ds_\zeta + g(z),\ |z| \le 1, \tag{1}$$

где $\lambda$ - произвольное комплексное число, $\theta = \arg(\zeta - z)$, черта над функцией означает переход к комплексно-сопряжённым значениям, а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Будем исследовать вопрос нётеровости и индекса уравнение (1) в лебеговом пространстве с весом $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ :

$$L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-\frac{2}{p}}|f(z)| = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-\frac{2}{p}}} = ||F||_{L^p}\}.$$

Отметим, что в интеграле (1) характеристика (см.[1]) $u(z,\theta) = \frac{\lambda}{2\pi i}\frac{z}{|z|}e^{-i\theta}$ входит в нечётной степени, и в начале координат по различным лучам имеет различный предел. В случае чётной хариктеристики такое уравнение изучен в работе [2].

Следуя схеме работ [2],[3] будем искать решение уравнение (1) $f(z)$ в виде следующего ряда Фурье

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(r)e^{ik\varphi}, \quad f_k(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)e^{-ik\varphi}d\varphi, \quad z = re^{i\varphi}. \tag{2}$$

Тогда для нахождения коэффициентов Фурье решения уравнения (1) получим бесконечную систему пар одномерных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} f_k(r) =& \frac{\lambda}{2\pi i}\int_0^1 \sqrt{\tau}\frac{\partial}{\partial r}(Q_{k-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}(\tau)))\overline{f_{-k}(\rho)}d\rho + \\ &+ \frac{(2k-1)\lambda}{4\pi i}\int_0^1 \frac{\sqrt{\tau}}{r}Q_{k-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}(\tau))\overline{f_{-k}(\rho)}d\rho + g_k(r), \end{aligned} \tag{3}$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ , $Q_{k-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}(\tau))$ - функция Лагранжа второго рода [4] имеющий вид

$$Q_{k-\frac{1}{2}}(ch(\tau)) = \int_0^{\pi} \frac{\cos k\alpha d\alpha}{\sqrt{2\,\mathrm{ch}\,\tau - 2\cos\alpha}}, \quad \mathrm{ch}\,\tau = \frac{\tau + \frac{1}{\tau}}{2}, \quad \tau = \frac{\rho}{r}. \tag{4}$$

Поскольку функция Лагранжа имеет логарифмический особенность при $\tau = 1$ (см.[4],[5]), то первый интеграл даёт одномерный сингулярный интеграл по отрезку [0,1], а второй интеграл с суммируемым однородным ядром степени $-1$. Одномерные относительно коэффициентов Фурье $f_k(r), \overline{f_{-k}(r)}, (k = 0, \pm 1, \cdots)$ системы сингулярных интегральных уравнений с однородными ядрами степени (-1) (3) изучались в работах [6],[7]. В соответствии с исходными пространствами $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ их следует рассматривать в пространствах $L^p_{\beta-\frac{1}{p}}(0,1)$.

Редуцируя указанную систему к интегральным уравнениям относительно коэффициентов $f_k(r)(k \geq 0)$ показывается, что норма соответствующих интегральных операторов при $k \to \infty$ стремятся к нулю, благодаря этому удаётся показать, что существует такое число $N > 0$, что при $|k| > N$ системы (3) разрешимы единственным образом для любых свободных членов из $L^p_{\beta-\frac{1}{p}}(0,1)$, т.е. система обрывается. Это позволяет показать, что найденные коэффициенты Фурье $f_k(r)$ составляют некоторую функцию $f(z)$ из исходного пространства $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$, т.е. ряд (2) сходится.

Таким образом установлены необходимые и достаточные условия нётеровости уравнения (1) в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ и получена формула для индекса уравнения. Отметим, что условия нётеровости и индекс уравнения зависят от параметра $\lambda$ и показателей $p$ и $\beta$.

**Литература**

1. Михлин С. Г. - Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнени. М.: Физматгиз, 1962, 264 с.
2. Джангибеков Г. - Докл.АН ТаджССР, 1977, т. 20, №5, с. 3-5.
3. Михайлов Л. Г. - ДАН СССР, 1970, т. 190, №2, с. 270-275.
4. Лебедов И. И. - Специальные функции и их приложения, М.: Физматгиз, 1963, 359 с.
5. Гобсон Е. В. - Теория сферических функций, М.: Физматгиз, 1952, 476 с.
6. Михайлов Л. Г. - Интегральные уравнения с ядром, однородным степени - 1, Душанбе, Дониш, 1966, 49 с.
7. Дудучава Р. В. - Интегральные уравнения свёртки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики, Тбилиси, Мецниереба, 1979, 133 с.

УДК 517.968

# О формуле обращения для одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов

Джангибеков Г., Мамадкаримова М.

**(Таджикский национальный университет)**

Пусть $D$ – ограниченная область комплексной плоскости, границ $\Gamma$ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова, не пересекающихся между собой; $I$ – тождественный оператор, $a(z), b(z)$ – непрерывные в $\overline{D} = D\bigcup\Gamma$ комплекснозначные функции. В пространстве $L^p(D), 1 < p < \infty$ рассмотрим следующий

$$A \equiv a(z)I + b(z)S_m, \tag{1}$$

где оператор $S_m$ действует по формуле

$$(S_m)(f) = \frac{(-1)^m m}{\pi} \int\int_D \frac{e^{-2im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) dS_\zeta,$$

$m$-натуральное число, $dS_\zeta$ – элемент плоской меры Лебега, $\theta = arg(\theta - z)$, а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Из результатов [1] следует, что для нетеровости оператора $A$ в $L_p(D)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$|a(z)| > |b(z)| \tag{2}$$

для всех $z \in \bar{D}$, а при выполнении условия (2) оператор $A$ имеет ограниченный обратный.

В настоящей заметке в явном виде найден двухсторонний регуляризатор оператора $A$ и в случае круговой области и постоянных коэффициентов $a$ и $b$ найден обратный оператор $A^{-1}$.

Прежде всего заметим, что из (2) следует, что $a(z) \neq 0$ в $\bar{D}$ и поэтому вместо оператора $A$ будем рассматривать оператор

$$A_0 \equiv I - q(z)S_m, \tag{3}$$

где $-q(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$, т.е. $|q(z)| < 1, z \in \bar{D}$.

Введем теперь следующий сингулярный интегральный оператор

$$(S_m q f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi} \int\int_D \frac{|\zeta - z|)^{2(m-1)} f(\zeta) dS_\zeta}{[(\zeta - z)^m + (-1)^m q(z)(\bar{\zeta} - \bar{z})^m]^2}. \tag{4}$$

Характеристика $u(z,\theta) \quad (\theta = arg(\zeta - z))$ оператора $S_{mq}$ имеет вид

$$u(z,\theta) = \frac{e^{-2im\theta}}{(1+(-1)^m q(z)e^{-2im\theta})^2}.$$

Очевидно, что $u(z,\theta)$ является ограниченной функцией и, как нетрудно убедиться, удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} u(z,\theta)d\theta = 0, \quad z \in \bar{D}.$$

Поэтому из результатов [3], следует,что оператор $S_{mq}$ ограничен в пространстве $L^p(D)$ $1 < p < \infty$.

**Лемма.** *Пусть $f(z) \in L^p(D), 1 < p < \infty$. Тогда имеют место формулы:*

$$\begin{aligned} q(z)(S_m S_{mq} f)(z) = (S_{mq} f)(z) - (S_m f)(z) + T, \\ q(z)(S_{mq} S_m f)(z) = (S_{mq} f)(z) - (S_m f)(z) + T, \end{aligned} \tag{5}$$

*где $T$-вполне непрерывный оператор.*

Имеют место

**Теорема 1.** *Пусть в (2) $|q(z)| < 1, \quad z \in \bar{D}$. Тогда оператор*

$$A_1 = I + q(z)S_{mq}$$

*является левым и правым регуляризатором оператора*

$$A_0 = I - q(z)S_m$$

*в пространстве $L^p(D), 1 < p < \infty$.*

**Теорема 2.***Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ и $q(z) = const, |q| < 1$. Тогда оператор*

$$A_1 = I + qS_{mq}$$

*является правым м левым обратным оператором для оператора*

$$A_0 = I - qS_m$$

*в пространстве $L^p(D), 1 < p < \infty$.*

## Литература


1. Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах. – Матем. заметки. 1989, т.46, в.5, с. 91-93.
2. Джангибеков Г. О нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами.-Известия ВУЗов, математика. 1992, №9, с.25-37.
3. Calderon A., Zygmund A. On singular integrals -American J. math. 1956, 78, p.289-309.
4. Манджавидзе Г. Ф. В кн: Дифференциальные и интегральные уравнения, Тбилиси, 1979, с.165-186.

УДК 517.968

# Задача Неймана для общих эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с двумя функциями от двух переменных

Джангибеков Г.[†], Одинабеков Д.[‡]

([†]Таджикский национальный университет)
([‡]Таджикский государственный университет коммерции)

В настоящей работе в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ рассмотрим следующую эллиптическую систему второго порядка с двумя функциями от двух переменных

$$a(z)W_{z\overline{z}} + b(z)\overline{W}_{\overline{z}z} + c(z)W_{zz} + d(z)\overline{W}_{\overline{z}\overline{z}} + e(z)W_{\overline{z}\overline{z}} + h(z)\overline{W}_{zz}+$$

$$+a_1(z)W_{\overline{z}} + b_1(z)\overline{W}_z + c_1(z)W_z + d_1(z)\overline{W}_{\overline{z}} + e_1(z)W + h_1(z)\overline{W} = g(z), \qquad (1)$$

где $z = x+iy, W = u(x,y)+iv(x,y)$,формальные производные по $z$ и $\overline{z}$ определяются обычным образом

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

коэффициенты $a(z), b(z)$, и т.д. будем считать непрерывными функциями в $\overline{D}$, а $g(z) \in L^p(D)$, $2 < p < \infty$.

**Задача Неймана.** *Найти непрерывные решения системы (1) в области* $\overline{D}$ *из класса* $W_p^2(D)$, $2 < p < \infty$, *удовлетворяющие на границе* $\Gamma$ *условию*

$$\frac{\partial W}{\partial n} \mid_\Gamma = 0 \qquad (2)$$

Поскольку [1-3] любая функция, обладающая в D обощенными производными второго порядка с непрерывными в $\overline{D}$ первыми производными, удовлетворяющая условия (2) и

$$\int_\Gamma W(z)ds_z = 0$$

может быть единственным образом представлена в виде

$$W(z) = \iint_D \hat{G}(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta$$

$$f(z) \in L^p(D), \qquad 2 < p < \infty$$

где

$$\hat{G}(z,\zeta) = \frac{2}{\pi}ln|(z-\zeta)(1-z\overline{\zeta})| - \frac{1}{\pi}(|z|^2 + |\zeta|^2) + \frac{3}{4}$$

Вычислив производные функции W(z) и подставляя их значения в систему (1), мы для определении неизвестной функции $f(z)$ из пространства $L^p(D)$, $2 < p < \infty$. получим сингулярный интегральный оператор, который была изучена в работе [4]

Сформулируем основной результат для задачи (1), (2)

**Теорема**. Для того чтобы задача Неймана (2) для эллиптической системы (1) была нетеровой, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:

$$1)\ \Delta_1(z) > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + |\mu_1(z)|^2 - |\lambda_1(z)|^2 + |\mu_3(z)|^2 - |\lambda_3(z)|^2}$$

$$\text{для } \forall z \in \overline{D},\ \omega_1(t) \neq 0 \text{ при } \ t \in \Gamma$$

$$2)\ \Delta_2(z) > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + |\mu_1(z)|^2 - |\lambda_1(z)|^2 - |\mu_3(z)|^2 - |\lambda_3(z)|^2}$$

$$\text{для } \forall z \in \overline{D},\ \omega_2(t) \neq 0 \text{ при } \ t \in \Gamma$$

$$3)\ \Delta_3(z) > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + |\mu_3(z)|^2 - |\lambda_3(z)|^2 - |\mu_2(z)|^2 + |\lambda_3(z)|^2}$$

$$\text{для } \forall z \in \overline{D},\ \omega_3(t) \neq 0 \text{ при } \ t \in \Gamma$$

где

$$\Delta_1 = |a|^2 - |b|^2,\ \Delta_2 = |c|^2 - |d|^2,\ \Delta_3 = |e|^2 - |h|^2$$

$$\lambda_1 = \overline{a}c - b\overline{d},\ \lambda_2 = \overline{h}c - e\overline{d},\ \lambda_3 = \overline{a}e - b\overline{h},$$

$$\mu_1 = a\overline{d} - \overline{b}c,\ \mu_2 = h\overline{d} - \overline{e}c,\ \mu_3 = a\overline{h} - \overline{b}e,$$

$$\chi(z) = \begin{cases} M(z), \text{если } \Delta_j(z) > 0 \\ m(z), \text{если } \Delta_j(z) < 0 \end{cases}$$

**Литература**


1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции //М.: Физматгиз,1959.627
2. Боярский Б.В. Докт. дис. // М. 1959
3. Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. // М. Наука 1987. 415с
4. Джангибеков Г. // ДАН СССР, 1993, т. 330, №4, с. 415-417.


УДК 517.968.2

## Задача Дирихле для эллиптических систем двух уравнений четвертого порядка на плоскости


Джангибеков Г., Худжаназарова Г.

**(Таджикский национальный университет)**


В работе изучается вопрос разрешимости задачи Дирихле для одной эллиптической системы двух уравнений четвертого порядка на плоскости методом перехода к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению по ограниченной области (см. [1-4])

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ - единичный круг комплексной плоскости $z = x + iy$. Рассмотрим дифференциальное уравнение 4 - го порядка

$$\begin{aligned} &a_{4,0}(z)\frac{\partial^4\omega}{\partial\overline{z}^4} + a_{2,2}(z)\frac{\partial^4\omega}{\partial\overline{z}^2\partial z^2} + a_{0,4}(z)\frac{\partial^4\omega}{\partial z^4} + \\ &+ b_{4,0}(z)\frac{\partial^4\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^4} + b_{2,2}(z)\frac{\partial^4\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^2\partial z^2} + b_{0,4}(z)\frac{\partial^4\overline{\omega}}{\partial z^4} + \\ &+ \sum_{k+j=0}^{3}\left[a_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\omega}{\partial\overline{z}^k\partial z^j} + b_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}\right] = g(z), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\omega(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, коэффициенты уравнения $a_{k,j}(z),\ b_{k,j}(z)\,(k,j = 0,\ldots,4)$ будем считать непрерывными в $\overline{D}$, $g(z) \in L^p(D)$, $2 < p < \infty$,

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

По главной части системы (1) построим матрицу-функцию

$$\mathcal{G}_z(\sigma) = \begin{pmatrix} a_{4,0}(z)\overline{\sigma}^4 + a_{2,2}(z)\sigma^2\overline{\sigma}^2 + a_{0,4}(z)\sigma^4 & b_{4,0}(z)\overline{\sigma}^4 + b_{2,2}(z)\sigma^2\overline{\sigma}^2 + b_{0,4}(z)\sigma^4 \\ \overline{b_{4,0}(z)}\sigma^4 + \overline{b_{2,2}(z)}\sigma^2\overline{\sigma}^2 + \overline{b_{0,4}(z)}\overline{\sigma}^4 & \overline{a_{4,0}(z)}\sigma^4 + \overline{a_{2,2}(z)}\sigma^2\overline{\sigma}^2 + \overline{a_{0,4}(z)}\overline{\sigma}^4 \end{pmatrix}.$$

Эллиптичность системы (1) означает, что для любой точки $z \in \overline{D}$ и любого не равного нулю комплексного числа $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ должно выполняться неравенство $\det \mathcal{G}_z(\sigma) \neq 0$. Очевидно, что

$$\det \mathcal{G}_z(\sigma) \equiv \det \mathcal{F}_z(t) = |P_z(t)|^2 - |Q_z(t)|^2 \neq 0$$

для всех $z \in \overline{D}$, и $|t| = 1$, где через $\mathcal{F}_z(t)$ обозначен матричный полином

$$\mathcal{F}_z(t) = \begin{pmatrix} P_z(t) & Q_z(t) \\ \overline{P_z(t)} & \overline{Q_z(t)} \end{pmatrix},$$

$$P_z(t) = a_{4,0}(z)\overline{t}^4 + a_{2,2}(z) + a_{0,4}(z)t^4, \quad Q_z(t) = b_{4,0}(z)\overline{t}^4 + b_{2,2}(z) + b_{0,4}(z)t^4.$$

Множество всех полиномиальных матриц вида $\mathcal{F}_z(t)$, удовлетворяющих условию $\det \mathcal{F}_z(t) = |P_z(t)|^2 - |Q_z(t)|^2 > 0\,(< 0)$ для всех $z \in \overline{D}, |t| = 1$, обозначим через $F^+\,(F^-)$.

Две матрицы $F^1_z(t)$, $F^2_z(t)$ из класса $F^+$ назовем гомотопными, т.е. $F^1_z(t) \sim F^2_z(t)$, если существует семейство полиномиальных матриц $F^+_z(t;\tau)$ из $F^+_z$ непрерывно зависящих от действительного параметра $\tau : 0 \leq \tau \leq 1$, такое, что

$$F^+(t;0) \equiv F^1_z(t), \quad F^+(t;1) \equiv F^2_z(t).$$

Две эллиптические системы из множества всех эллиптических систем 1) с одинаковой главной частью, такой, что $\mathcal{G}_z(\sigma) \in F^+$ можно тогда и только тогда соединить непрерывным путем в $F^+$, если характеристические матричные полиномы этих систем гомотопны. Известно [2], что соотношение гомотопии разбивает $F^+$ на пять классов гомотопии - связанные открытые компоненты:

класс $\varepsilon_0 : Ind_{|t|=1}P_z(t) = 0$, т.е. полином $P_z(t)$ - внутри единичного круга $|t| = 1$ корней не имеет;

класс $\varepsilon_j\,(1 \leq j \leq 4) : Ind_{|t|=1}P_z(t) = j$, т.е. полином $P_z(t)$ - внутри единичного круга $|t| = 1$ имеет ровно $j$ - то корней.

Эти классы образуют полную систему множества $F^+$, т.е. $F^1_z$ и $F^2_z$ из $F^+$ принадлежат некоторому классу $\varepsilon_k\,(k = 0,1,2,3,4,5)$ тогда и только тогда, когда $F^1_z \sim F^2_z$.

**Задача Дирихле.** Найти функцию $\omega(z)$ из класса $W^4_p(D) \cap C(\overline{D})$, удовлетворяющую внутри $G$ уравнению (1), а на ее границе $\Gamma$ двум краевым условиям

$$\omega(z)\Big|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0, \tag{2}$$

где $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ - означает производную по направлению внешней нормали в точках контура $\Gamma$.

Известно [2],[3], что любая комплекснозначная функция класса $W^4_p(D) \cap C(\overline{D})$, удовлетворяющая на границе $\Gamma$ однородным краевым условиям (2), представляется в виде

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D G_4(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta, \tag{3}$$

с произвольной комплекснозначной плотностью $f(z) \in L_p(D)$, $p > 1$, где $G_4(z,\zeta)$ функция Грина бигармонического уравнения области $D$ :

$$G_4(z,\zeta) = |\zeta - z|^2 \ln\left|\frac{1 - z\overline{\zeta}}{\zeta - z}\right|^2 - (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2).$$

Очевидно, что все производные от функции $\omega(z)$ по $z$ и $\overline{z}$ до 3 - го порядка дают интегральные операторы с непрерывными ядрами или с ядрами, имеющими слабую особенность и, следовательно, являются вполне непрерывными в $L_p(D)\,(1 < p < \infty)$ операторами.

Подставляя в исходное дифференциальное уравнение (1) значения производных функций $\omega(z)$, для определения функции $f(z)$ получим следующее двумерное сингулярное интегральное уравнение:

$$\begin{aligned}
&(a_{2,2}I + b_{2,2}K)f+\\
&+\big(a_{4,0}I + b_{0,4}K\big)\big(S_2f - 3\overline{z}^2B_2f + 4\overline{z}^4B_1f - 4\overline{z}^2S_1B_1f\big)+\\
&+\big(a_{0,4}I + b_{4,0}K\big)\big(S_{-2}f - 3z^2B_{-2}f + 4z^4B_{-1}f - 4z^2S_{-1}B_{-1}f\big)+\\
&+(Tf)(z) = g.
\end{aligned} \tag{4}$$

Уравнение (4) относится к классу уравнений изученных в работе [4]. Прежде чем формулировать основной результат, вытекающий из [4], введем следующие вспомогательные непрерывные в $\overline{D}$ функции:

$$\Delta_1 = |a_{2,2}|^2 - |b_{2,2}|^2,\ \lambda_1 = \overline{a_{2,2}}a_{4,0} - b_{2,2}\overline{b_{0,4}},\ \lambda_2 = \overline{b_{4,0}}a_{4,0} - a_{0,4}\overline{b_{0,4}},$$
$$\Delta_2 = |a_{4,0}|^2 - |b_{0,4}|^2,\ \eta_1 = a_{2,2}\overline{b_{0,4}} - \overline{b_{2,2}}a_{4,0},\ \eta_2 = b_{4,0}\overline{b_{0,4}} - \overline{a_{0,4}}a_{4,0},$$
$$\Delta_3 = |a_{0,4}|^2 - |b_{4,0}|^2,\ \lambda_3 = \overline{a_{2,2}}a_{0,4} - b_{2,2}\overline{b_{4,0}},\ \eta_3 = a_{2,2}\overline{b_{4,0}} - \overline{b_{2,2}}a_{0,4},$$
$$M(z) = \max_{|t|=1} Re\big\{\eta_2(z)t^2 - \big(\lambda_1(z) + \overline{\lambda_3(z)}\big)t\big\},$$
$$-m(z) = \min_{|t|=1} Re\big\{\eta_2(z)t^2 - \big(\lambda_1(z) + \overline{\lambda_3(z)}\big)t\big\},$$
$$\chi(z) = \begin{cases} M(z), & \text{если} \quad \Delta_j(z) > 0,\\ m(z), & \text{если} \quad \Delta_j(z) < 0,\ j = 1,2,3.\end{cases}$$

**Теорема 1** *Для того, чтобы задача Дирихле (2) для эллиптической системы (1) была нетеровой, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условии:*

$$|\Delta_1(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + |\eta_1(z)|^2 - |\lambda_1(z)|^2 + |\eta_3(z)|^2 - |\lambda_3(z)|^2}$$
$$\text{\textit{для всех}} \quad z \in \overline{D}; \tag{5}$$

$$|\Delta_2(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + |\eta_1(z)|^2 - |\lambda_1(z)|^2 + |\eta_2(z)|^2 - |\lambda_2(z)|^2}$$
$$\text{\textit{для всех}} \quad z \in \overline{D},\ \lambda_1(t)\lambda_2(t) + \Delta_2(t)\eta_1(t) \neq 0,\ \text{\textit{для всех}} \quad t \in \Gamma; \tag{6}$$

$$|\Delta_3(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + |\eta_3(z)|^2 - |\lambda_3(z)|^2 + |\eta_2(z)|^2 - |\lambda_2(z)|^2}$$
$$\text{\textit{для всех}} \quad z \in \overline{D},\ \lambda_2(t)\lambda_3(t) - \Delta_3(t)\eta_3(t) \neq 0,\ \text{\textit{для всех}} \quad t \in \Gamma. \tag{7}$$

*При этом, если выполнено (5), то задача фредгольмова (т.е. ее индекс равен нулю); если выполнено (6), то индекс задачи равен*

$$\varkappa = 4Ind_{\Gamma}(\lambda_1(t)\lambda_2(t) + \Delta_2(t)\eta_1(t));$$

*если выполнено (7), то*

$$\varkappa = -4Ind_{\Gamma}(\lambda_2(t)\lambda_3(t) - \Delta_3(t)\eta_3(t)).$$

**Замечание**. Выполнению областных условий (5), (6), (7) соответствует принадлежность системы (1) к гомотопическим классам $\varepsilon_2$, $\varepsilon_4$, $\varepsilon_0$.

### Литература

1. Векуа И.Н. - Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959, 628с.
2. Боярский Б.В. - Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций.- Дисс.докт.физ.мат.наук. Москва, 1960. 1959, 628с.
3. Джураев А. - Метод сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука. 1987. 415с.
4. Джангибеков Г. - ДАН России, 1993, т.330,№4, 415-417

УДК 517.968

## Нетеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов

Джангибеков Г., Чоршанбиева М.Ч.

**(Таджикский национальный университет)**

Пусть $D$ - ограниченная область комплексной плоскости, граница $\Gamma$ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова, не пересекающихся между собой, $I$ - тождественный оператор, $m$-целое число, a(z), b(z), c(z), d(z)-непрерывные в $\overline{D} = D\bigcup\Gamma$ комплекснозначные функции. В пространстве $L^p(D)$, $1 < p < \infty$ рассмотрим следующий сингулярный интегральный оператор

$$A = a(z)I + b(z)K + c(z)S_n + d(z)\overline{S_m}K, \tag{1}$$

где

$$(Kf)(z) = \overline{f(z)}, \quad (S_mf)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi}\iint_D \frac{e^{-2im\theta}}{|\zeta - z|^2}f(\zeta)ds_\zeta$$

$$\overline{S_m} = KS_mK = S_{-m},$$

$m \geq n \geq 1$, черта над функцией означает переход к комплексно-сопряженным значениям, $\theta = arg(\zeta - z)$. При $m = n$, оператор (1) включается в класс операторов, изученных в работе [1], для которых получены необходимые и достаточные условия нетеровости в $L^p(D)$, $1 < p < \infty$ и формулы для вычисления индекса. Случай $b(z) \equiv 0, n = -1$ изучен в работе [2].

Прежде всего, аналогично [3], устанавливаем, что оператор $A$ будет нетеровым, тогда и только тогда, когда нетеровым является

$$U = \begin{pmatrix} a(z)I + c(z)S_n & b(z)I + d(z)\overline{S_m} \\ \overline{b(z)}I + \overline{d(z)}S_m & \overline{a(z)}I + \overline{c(z)}\overline{S_n} \end{pmatrix}$$

в $L^p(D)$, $1 < p < \infty$. Поскольку символ оператора $S_m$ (см [4]) равен $(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma})^m$ $(\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \neq 0)$, то, согласно [5], для нетеровости операторной матрицы U необходимо, чтобы $detG_A(z,t) \neq 0$ для всех $z \in \overline{D}, |t| = 1,$ где $G_A(z,t)$-матрица символ оператора $A$ (см.[6], гл. VI.4 )

$$G_A(z;t) = \begin{pmatrix} \overline{a(z)} + \overline{c(z)}\bar{t}^n & \overline{b(z)} + \overline{d(z)}t^m \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\bar{t}^m & \overline{a(z)} + \overline{c(z)}t^n \end{pmatrix}.$$

Непосредственным вычислением получим

$$detG_A(z,t) = |a(z) + c(z)\bar{t}^n|^2 - |b(z) + d(z)t^m|^2 \neq 0 \tag{2}$$

для $\forall z \in \overline{D},\ |t| = 1,$ где $t = e^{-2i\varphi} = \dfrac{\overline{\sigma}}{\sigma}$. Вводя обозначения

$$\triangle_1(z) = |a(z)|^2 - |b(z)|^2, \quad \triangle_2(z) = |d(z)|^2 - |c(z)|^2,$$

перепишем неравенство (2) в виде

$$\triangle_1(z) - \triangle_2(z) - 2Re(\bar{b}dt^m - \bar{a}ct^n) \neq 0 \tag{3}$$

Заметим, что если неравенство (3) выполнено для всех $z \in \overline{D},\ |t| = 1$, то тогда $\triangle_1(z) - \triangle_2(z) \neq 0$ для $\forall z \in \overline{D}$, ибо тригонометрический полином

$$P_{2m}(\varphi) = 2Re\Big(\overline{b(z)}d(z)e^{2mi\varphi} - \overline{a(z)}c(z)e^{2ni\varphi}\Big)$$

свободного члена не имеет и поэтому обязательно обращается в нуль при некотором $\varphi$: $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Введем обозначения

$$M = \max_{|t|=1} Re(\bar{b}dt^m - \bar{a}ct^n),$$

$$-m = \min_{|t|=1} Re(\bar{b}dt^m - \bar{a}ct^n).$$

Очевидно, что неравенство (3) равносильно двум условиям

$$\triangle_1(z) - \triangle_2(z) > 2M(z), \quad \forall z \in \overline{D},$$

$$\triangle_1(z) - \triangle_2(z) < -2m(z), \quad \forall z \in \overline{D},$$

где здесь $M(z) > 0, \quad m(z) < 0$.

**Теорема.** *Для нетеровости оператора $A$ в пространстве $L^p(D)$ $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий*

$$|\triangle_1(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + \triangle_1(z)\triangle_2(z)},\ \forall z \in \overline{D}, \tag{4}$$

$$|\triangle_2(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + \triangle_1(z)\triangle_2(z)}, \quad \forall z \in \overline{D},$$

$$\prod_{k=1}^{n}\Big(\overline{b(t)} + \overline{d(t)}\sqrt[n]{|a(t)c^{-1}(t)|^m}\exp i(\varphi + 2k\pi)n^{-1}\Big) \neq 0, \quad \forall t \in \Gamma,$$

*При этом если выполнено условие (6), то индекс оператора $A$ равен нулю, а если выполнено условие (7), то индекс оператора $A$ равен*

$$\kappa = \sum_{k=1}^{n} 2Ind_{\Gamma}\Big(\overline{b(t)} + \overline{d(t)}\sqrt[n]{|a(t)c^{-1}(t)|^m}\exp i(\varphi + 2k\pi)n^{-1}\Big) \neq 0, \tag{5}$$

## Литература


1. Джангибеков Г. – ДАН СССР, 1990, т. 313, №3, с. 541-545.
2. Джангибеков Г., Бакоева М. – Вестник Хорогского университета, 2006, серия 1, №7, с.16-23.
3. Векуа Н.П. – Системы сингулярных интегральных уравнений. – М, Наука,1970, 379 с.
4. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.Физматгиз, 1962, 254 с.
5. Duduchava R. – J. Operator Theory, 1984. v.11. pp. 41-76.

УДК 532.546

# К решение двухслойной краевой задачи при наличии нелинейного испарения

Жамуратов К., Умаров Х.

**(Гулистанский государственный университет, Узбекистан)**

Будем предлогать, что каналы (водохранилища) с вертикальными откосами совершенны как по характеру, так и по степени вскрытия.

При наполнении новых каналов и водохранилищ происходит подъем уровня грунтовых вод (УГВ) $h\left(x,t\right)$, и если первоначальной уровень $h_l$ в пласте расположен ниже критический глубины $y_0$, то наступит такой момент времени $t_0$, что уровень воды в них достигнет значения $h_{kr}$. При дальнейшем подъеме уровня воды в канале, в силу зависимости испарения $\varepsilon$ от УГВ:

$$\varepsilon = \begin{cases} f\left(h - h_{kr},\, t\right), & h > h_{kr}; \\ 0, & h \leqslant h_{kr}. \end{cases} \tag{1}$$

появляются две области движения с подвижной границей раздела $x = l\left(t\right)$, причем в области $\psi_1\left(t\right) = h\left(0,\, t\right) > h\left(x,\, t\right) > h\left(l\left(t\right),\, t\right) = h_{kr}$ будет иметь место испарение, а в области $h_l \leqslant h\left(x,\, t\right) \leqslant h_{kr}$отсутствовать.

Рассмотрим движение грунтовых вод вблизи новых каналов (водохранилищ) в пласте с кусочно-постоянным коэффициентом фильтрации, т.е. $k\left(x\right) = k_1,\ 0 < x < x_1,\ k\left(x\right) = k_2,$ $x_1 < x < +\infty$, где $x_1$– граница раздела двух зон, с коэффициентами $k_1$, $k_2 = const$, при наличии испарения с поверхности грунтового потока, зависящего от УГВ и времени по формуле (1).

С учетом сделанных выше предположений, задачу определения $h\left(x,t\right)$ и неизвестной границы раздела $x = l\left(t\right)$ сформулируем следующим образом.

Найти функции $h\left(x,t\right)$ и $l\left(t\right)$, $l\left(t_0\right) = 0$ при следующих условиях

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a_{i,j}^2\left(x,t\right)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon}{\mu}, \quad \left(x,t\right) \in \Omega_{ij}^{t_s}, \tag{2}$$

$$h\big|_{t=t_0} = \psi_1\left(t\right); \quad h\big|_{x=0} = \varphi_1\left(x\right), \quad h\big|_{x\to+\infty} = h_l, \tag{3}$$

$$h\big|_{x=l(t)-0} = h\big|_{x=l(t)+0} = h_{kr}, \tag{4}$$

$$a_{i,1}^2\left(x,t\right)\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=l(t)-0} = a_{i,2}^2\left(x,t\right)\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=l(t)+0}, \tag{5}$$

$$h\big|_{x=x_1-0} = h\big|_{x=x_1+0}\quad, \tag{6}$$

$$a_{i,1}^2\left(x,t\right)\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=x_1-0} = a_{i,2}^2\left(x,t\right)\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=x_1+0}\quad. \tag{7}$$

Здесь $\psi_1\left(t\right)$ – закон подъёма уровня в канале, $\varphi_1\left(x\right)$ – кривая депрессии в момент $t = t_0$, $\mu$ – коэффициент водоотдачи (эффективная пористость), $k$ – коэффициент фильтрации пласта;

$a_{i,j}^2\left(x,t\right) = k_i \cdot \overline{h_j} \cdot \mu^{-1}$ – коэффициент уровне проводности, причем индекс $i = 1,\, 2$ относится к коэффициентам фильтрации, а индекс $j = 1,\, 2$ к среднему значению $\overline{h_j}$ при линеаризации уравнения Буссинеска; $s = 0,\ 1$. Поэтому, в зависимости от изменения времени и в зависимости от того, имеет ли место пересечение кривой $x = l\left(t\right)$ и прямой $x = x_1$, имеем различные случаи:

$$\text{I. } a_{i,j}^2(x,t)=\begin{cases} a_{1,1}^2, & (x,t)\in\Omega_{1,1}^{t_0}=\{(x,t): t_0<t<t_1;\, 0<x<l(t)\},\\ a_{1,2}^2, & (x,t)\in\Omega_{1,2}^{t_0}=\{(x,t): t_0<t<t_1;\, l(t)<x<x_1\},\\ a_{2,2}^2, & (x,t)\in\Omega_{2,2}^{t_0}=\{(x,t): t_0<t<t_1;\, x_1<x<+\infty\}.\end{cases}$$

$$\text{II. } a_{i,j}^2(x,t)=\begin{cases} a_{1,1}^2, & (x,t)\in\Omega_{1,1}^{t_0}=\{(x,t): t_1<t<T;\, 0<x<x_1\},\\ a_{2,1}^2, & (x,t)\in\Omega_{2,1}^{t_0}=\{(x,t): t_1<t<T;\, x_1<x<l(t)\},\\ a_{2,2}^2, & (x,t)\in\Omega_{2,2}^{t_0}=\{(x,t): t_1<t<T;\, l(t)<x<+\infty\}.\end{cases}$$

где $t_1$ – такое значение времени $t$, при котором выполняется неравенства $l(t_1)\leqslant x_1$.

Могут быть случаи, когда на расчетном промежутке времени кривая $x=l(t)$ не пересекает прямой $x=x_1$, тогда случай II исключается из рассмотрения. Такой случай имеет место, например, если расстояние $x_1$ достаточно большое или же коэффициент фильтрации $k_1$ слишком мал.

Рассмотрим случай I. При этом из (2) – (7) получим следующую задачу

$$\frac{\partial h_1}{\partial t}=a_{1,1}^2(x,t)\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}-\frac{\varepsilon}{\mu},\quad (x,t)\in\Omega_{1,1}^{t_0},\tag{8}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t}=a_{1,2}^2(x,t)\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2},\quad (x,t)\in\Omega_{1,2}^{t_0},\tag{9}$$

$$\frac{\partial h_3}{\partial t}=a_{2,2}^2(x,t)\frac{\partial^2 h_3}{\partial x^2},\quad (x,t)\in\Omega_{2,2}^{t_0},\tag{10}$$

$$h_1|_{x=0}=\psi_1(t);\quad h_1|_{x=l(t)-0}=h_{kr},\quad t>t_0\tag{11}$$

$$h_1|_{x=l(t)+0}=h_{kr},\quad t>t_0,\quad h_2(x,t)|_{t=t_0}=\overline{\varphi_1}(x)\tag{12}$$

$$a_{1,1}^2\left.\frac{\partial h_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l(t)-0}=a_{1,2}^2\left.\frac{\partial h_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l(t)+0},\quad t>t_0\tag{13}$$

$$h_3(x,t)|_{x=x_1+0}=h_2(x,t)|_{x=x_1-0},\quad h_3(x,t)|_{t=t_0}=\overline{\overline{\varphi_1}}(x),\tag{14}$$

$$k_1\left.\frac{\partial h_2(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_1-0}=k_2\left.\frac{\partial h_3(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_1+0},\quad t>t_0\tag{15}$$

$$h_3(x,t)|_{x\to+\infty}=h_l\quad .\tag{16}$$

Предположим, что в точке $(x_1,t_0)$ выполняется условия согласования.

Уравнение (10) вместе с условиями (14), (15) составляет первую краевую задачу для уравнения теплопроводности на полупрямой $x>x_1$, решение которой имеет вид:

$$\overline{h_3}(y,t)=\int\limits_0^\infty G_1(y,\,\xi;\,a_{2,2}(t-t_0))\overline{\overline{\overline{\varphi_1}}}(\xi)\,d\xi+a_{2,2}^2\int\limits_{t_0}^t\left.\frac{\partial G_1(y,\,\xi;\,a_{2,2}(t-\tau))}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}h_2(x_1,\tau)\,d\tau,\tag{17}$$

где $y=x-x_1$, $h_3(x,t)=h_3(y+x_1,t)=\overline{h_3}(y,t)$, $\overline{\overline{\varphi}}_1(x)=\overline{\overline{\varphi}}_1(y+x_1)=\overline{\overline{\overline{\varphi}}}_1(y)$, $\overline{\overline{\varphi}}_1(x_1)=\overline{\overline{\overline{\varphi}}}_1(0)$, $G_1$– ест функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой $y>0$.

Введя замену переменных $\lambda=y\cdot\left(2a_{2,2}\sqrt{t-\tau}\right)^{-1}$ преобразуем второе слагаемое правой части (17) к следующему виду

$$\overline{h_3}(y,t)=\int\limits_0^\infty G_1(y,\,\xi;\,a_{2,2}(t-t_0))\overline{\overline{\overline{\varphi_1}}}(\xi)\,d\xi+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{y/2a_{2,2}\sqrt{t-t_0}}^\infty e^{-\lambda^2}\cdot h_2\left(x_1,t-\frac{y^2}{4a_{2,2}^2\cdot\lambda^2}\right)d\lambda.$$

Учитывая равенства $\frac{\partial G_1}{\partial y} = -\frac{\partial G_2}{\partial \xi}$, $\overline{\overline{\overline{\varphi_1}}}(0) = h_2(x_1, t_0)$, где $G_2$ – функция Грина второй краевой задачи на полупрямой $y > 0$ для уравнения теплопроводности [1], вычислим производную функции $\overline{h}_3$:

$$\frac{\partial \bar{h}_3}{\partial y} = \int\limits_0^\infty G_1(y,\, \xi;\, a_{2,2}(t-t_0))\, \overline{\overline{\overline{\varphi_1}}}'(\xi)\, d\xi - \frac{y}{\sqrt{\pi}\cdot a_{2,2}^2} \int\limits_{y/2a_{2,2}\sqrt{t-t_0}}^{\infty} -$$

$$-\lambda^2 e^{-\lambda^2} \cdot \left.\frac{\partial h_2(x_1, z)}{\partial z}\right|_{z = t - \frac{y^2}{4\cdot a_{2,2}^2\cdot\lambda^2}} d\lambda$$

Задача (9), (11), (12) относится к типу задач, исследованных в работе [2]. Применяя методику упомянутой работы, получаем два интегральных уравнений Вольтера относительно неизвестных $h_1$, $l'(t)$. Тем самим получим замкнутую систему интегральных уравнений относительно неизвестных $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_{2y}$, $h_{3y}$, $l'(t)$ исследование которой проводится как в работе [2].

## Литература

1. Положий Г. И. Уравнения математической физики. – М. : Высшая школа, 1964, – 560 с.
2. А. Бегматов, К. Жамуратов. О приближенном решение одной задачи фильтрации при наличии нелинейного испарения. В сб. "Краевые задачи для уравнений математической физики". – Ташкент, ФАН, 1980. с. 28 – 44.

УДК 517.927

# Задача Римана – Гильберта для обобщенной системы Коши – Римана с сингулярными коэффициентами

Зарифбеков М.Ш.

**(Технологический университет Таджикистана)**

Пусть в комплексной плоскости $z = x+iy$ область $D = \{z : |z| < 1\}$ обозначает единичный круг, а Γ ее границу $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$. Будем рассматривать следующую обобщенную систему Коши – Римана

$$\partial_{\overline{z}}\omega + \frac{b(z)e^{in\varphi}}{2\overline{z}}\overline{\omega} = g(z), \quad z \in D, \tag{1}$$

где $n$ - целое число, $\varphi = \arg z$, $b(z)$ - заданная в $\overline{D}$ измеримая ограниченная функция, имеющая предел $\lim_{z\to 0} b(z) = b(0)$, а $g(z)$ - заданная функции класса $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $2 < p < \infty$, $\beta$ - некоторое число: $0 < \beta < 1$.

Требуется найти непрерывные в $\overline{D}-0$ решения уравнения (1) из класса $W^1(D) \cap L^p_{\beta-2/p}(D)$ $2 < p < \infty, 0 < \beta < 1$, удовлетворяющие на окружности Γ условию

$$Re(z^{-m}\omega) = 0, \tag{2}$$

где $m$ - целое число.

Наряду с задачей (1), (2) будем рассматривать сопряженную однородную задачу

$$\partial_{\overline{z}}\psi - \frac{\overline{b(z)}e^{-in\varphi}}{2\overline{z}}\overline{\psi} = 0, \quad z \in D, \tag{1*}$$

$$Re(z^{m+1}\psi) = 0, \quad z \in \Gamma, \tag{2*}$$

причем решения отыскиваются в классе функций $W^1(D) \cap L^q_{\beta'-2/q}(D)$, где $1 < q < 2$ $1 < \beta' < 2$.

Для сингулярной обобщенной системы Коши - Римана Л.Г. Михайловым в монографии [1] и З.Д. Усмановым в [2],[3] при различных условиях малости коэффициента $b(z)$ получены утверждения о многообразии решений и разрешимости краевых задач. Остается по прежнему актуальной задача изучения системы (1) без условия малости коэффициента $b(z)$.

Отметим, что в работе З.Д. Усманова [2] была изучена при $n = 0, m \geq 0$ в классе $C_\beta(D), 0 < \beta < 1$, причем при этом требовалась, чтобы коэффициент $b(z)$ был непрерывен в $\overline{D}$ и в точке $z = 0$ удовлетворял условию Гельдера.

В предлагаемой работе мы будем изучать задачу (1), (2) без каких либо условий малости коэффициента $b(z)$ методом интегральных уравнений по области, разработанным И.Н.Векуа в монографии [4], при этом в отличие от [4] получаемые здесь интегральные операторы не являются вполне непрерывными, а содержат суммируемые однородные ядра порядка $(-2)$.

Рассмотрим задачу (2) для модельного уравнения

$$\partial_{\overline{z}}\omega + \frac{\lambda e^{in\varphi}}{2\overline{z}}\overline{\omega} = g(z), \quad z \in D, \tag{3}$$

где $\lambda \equiv const$.

Сформулируем основной результат для задачи (2)

**Теорема 1.** Для нормальной разрешимости задачи (2), (3) в классе $W^1 \cap L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(2 < p < \infty, 0 < \beta < 1)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$|\lambda| \neq R_\beta(k) = \sqrt{(k+\beta)(n-k+\beta)}, \tag{4}$$

где $n \neq -1$, $k = n_0 + \delta, \ldots, n$ при $n \geq 0$, $k = n_0 + \delta, \ldots, -1$ при $n \leq -2$ .

Если $n = -1$, то задача нормально разрешима при любых значениях параметра $\lambda$.

Теперь в случае нормальной разрешимости задачи (2), (3) обозначим через $\varkappa^+$ - число линейно независимых над полем вещественных чисел решений однородной задачи ($g(z) = 0$), а через $\varkappa^-$ - число необходимых и достаточных условий разрешимости задачи в $W^1 \cap L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(2 < p < \infty,\ 0 < \beta < 1)$ (т.е. условия ортогональности правой части (3) к решению модельной сопряженной задачи $(1^*), (2^*)$). Тогда при $m \geq 0$ для модельной задачи (2), (3) имеет место

**Теорема 2.** a). Пусть $0 \leq n \leq 2m$. Тогда, если $\lambda \neq R_\beta(k)$, $n_0 + \delta \leq k \leq n$, то неоднородная задача (2), (3) безусловно разрешима, при этом если $|\lambda| < R_\beta(n)$, то однородная задача имеет $\varkappa^+ = 2m + 1$ линейно независимых решений; если $R_\beta(n + 1 - k_0) < |\lambda| < R_\beta(n - k_0)$, $k_0 = 1, 2, \ldots, n_0$, то $\varkappa^+ = 2(m - k_0) + 1$; если $|\lambda| > R_\beta(n_0 + \delta)$, то $\varkappa^+ = 2m - n$.
b). $n \geq 2m+1$. Тогда, если $|\lambda| < R_\beta(n)$, то $\varkappa^+ = 2m+1$; если $R_\beta(n+1-k_0) < |\lambda| < R_\beta(n-k_0)$ $k_0 = 1, 2, \ldots, n - 2m$, то $\varkappa^+ = 2m - k_0 + 1, \varkappa^- = k_0$; если $R_\beta(n + 1 - k_0) < |\lambda| < R_\beta(n - k_0)$ $k_0 = n - 2m + 1, n - 2m + 2, \ldots, n_0$, то $\varkappa^+ = n - 2k_0 + 1, \varkappa^- = n - 2m$; если $|\lambda| > R_\beta(n_0 + \delta)$, то $\varkappa^+ = 0$, $\varkappa^- = n - 2m$.
c). Пусть $n = -1$. Тогда однородная задача (2), (3) при всех значениях параметра $\lambda$ имеет $2m + 1$ линейно независимых решений, а неоднородная задача безусловно разрешима.
d). Пусть $n \leq -2$. Тогда при выполнении условия 4 неоднородная задача (2), (3) разрешима безусловно. При этом, если $|\lambda| < R_\beta(-1)$, то однородная задача имеет $2m+1$ линейно независимых решений; если $R_\beta(k_0) < |\lambda| < R_\beta(k_0 - 1)$ $k_0 = -1, -2, \ldots, n_0 + 1$, то $\varkappa^+ = 2(m - k_0) + 1$; если $|\lambda| > R_\beta(n_0 + \delta)$, то $\varkappa^+ = 2m - n$.

При $m < 0$ для модельной задачи (2), (3) справедлива

**Теорема 3.** a). Пусть $n \geq 0$. Тогда, если $\lambda \neq R_\beta(k)$, $n_0 + \delta \leq k \leq n$, то однородная задача (2), (3) нетривиальных решений не имеет, при этом если $|\lambda| < R_\beta(n)$, то для разрешимости неоднородной задачи требуется выполнение $\varkappa^- = -2m - 1$ условий разрешимости; если

$R_\beta(n+1-k_0) < |\lambda| < R_\beta(n-k_0)$, $k_0 = 1, 2, \ldots, n_0$, то $\varkappa^- = -2(m-k_0)-1$; если $|\lambda| > R_\beta(n_0+\delta)$, то $\varkappa^- = -2m + n$.

b). Пусть $n = -1$. Тогда однородная задача (2), (3) при всех значениях параметра $\lambda$ нетривиальных решений не имеет, а для разрешимости неоднородной требуется выполнение $-2m-1$ условий разрешимости.

c). Пусть $n \le -2$. Тогда, если $|\lambda| < R_\beta(-1)$, то однородная задача нетривиальных решений не имеет, а для разрешимости неоднородного требуется выполнение $-2m-1$ условий разрешимости; если $R_\beta(k_0) < |\lambda| < R_\beta(k_0-1)$ $k_0 = -1, -2, \ldots, n_0+1$, то $\varkappa^+ = -2k_0$, $\varkappa^- = -2m-1$; если $|\lambda| > R_\beta(n_0+\delta)$, то $\varkappa^+ = -n-1$, $\varkappa^- = -2m-1$.

**Литература**


1. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его премения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами// Душанбе, Дониш, 1963, -183с
2. Усманов З.Д. //Дифференциальне уравнения. 1972. т. 8. №12, с. 2267-2270.
3. Усманов З.Д. Обощенные системы Коши-Римана с сингулярной точкой. //Душанбе 1993. 224с.
4. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции . М.: Физматгиз, 1959. 296с


УДК 521.1

## Периодические решения окрестности положения равновесия задачи трех тел

Икромов А.

**(Российско-Таджикский (славянский) университет, Душанбе)**

Рассматривается дифференциальное уравнение [1]

$$(1+\varepsilon \cdot \cos \upsilon) \cdot (z'' + 2iz') = z - \mu + 2\partial_{\bar z} R\,(z)\,, \tag{1}$$

описывающее движение плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел; здесь $\varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$ и $\mu \varepsilon\,(0, 1/2)$ параметры, $\upsilon$ – переменная, по которой вычисляются производные

$$F\,(z,\ \bar z;\ \bar\mu) = (z-\mu)\cdot(\bar z - \mu) + 2\,(1-\mu)\cdot(z\bar z)^{-1/2} + \mu\,(z-1)\cdot(\bar z - 1)^{-1/2}). \tag{2}$$

Это уравнение (см. (1)) допускает пять равновесных решения – точек либрации.

В работе изучается вопрос о существовании в малой окрестности точки равновесия $1/2 - i\sqrt{3}/2$ нестационарных $2\pi q$ $(q = 2, 3, \ldots)$ периодических решений уравнения (1). Для этого уравнения (1) представляется в виде

$$L\,(z - z_0) + \varepsilon L_0\,(z - z_0) = 2R_2\,(z - z_0)\,, \tag{3}$$

где $L \overset{\det}{=} z'' + 2iz' - b_{10}z + b_{01}\bar z$, $b_{10} = 3/2$, $b_{01} = 3/2$, $[\mu\,(\bar z_0 - z) - \bar z_0]$ – оператор, $L_0 = (z'' + 2iz')\cos \upsilon$, а $2R_2\,(z - z_0)$ – остаточный член разложения

$$\partial_{\bar z} R\,(z) = \partial_{\bar z} R\,(z_0) + \left(\partial^2_{z\bar z} R\right)(z_0)\,(z - z_0) + \left(\partial^2_{\bar z\bar z} R\right)(z_0)\,(\bar z - \bar z_0) + R_2\,(z - z_0)\,.$$

Ядро $N\,(L)$ действующего в пространстве $H$ ($H$ – вещественное гильбертово пространство комплекснозначных $2\pi q$-периодических функций суммируемых с квадратом на отрезке $[0, 2\pi q]$) оператора $L$ двумерно. Пусть $P$ – ортогональный проектор на $N\,(L)$; тогда оператор $L + P$ непрерывно обратим.

Решение уравнения (3) ищется в виде $z = z_0 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 w(v, \varepsilon)$, где $z_1 - 2\pi q$ – периодическое решение уравнения (2), а $w$ – подлежащая определению $2\pi q$-периодическая функция. Тогда уравнение (3) эквивалентно системе

$$\omega = A(\omega, \varepsilon) + \phi, \tag{4}$$

$$P\omega = \phi. \tag{5}$$

где $\omega = (L+P)\,w$, $\phi \in N(L)$ и

$$A(\omega,\ \varepsilon) = 2\varepsilon^{-2} R_2 \left[\varepsilon z_1 + \varepsilon^2 (L+P)^{-1} \omega\right] - L_0 \left[z_1 + \varepsilon (L+P)^{-1} \omega\right].$$

Положим

$$\gamma = \max |z_1(v)|,$$
$$0 \le v \le 6\pi$$
$$q(\varepsilon, \rho) = 6\varepsilon \left\|(L+P)^{-1}\right\| (\gamma + \varepsilon M \rho) \left[1 - \varepsilon (\gamma + \varepsilon M\rho)\right]^{-4} + \varepsilon M/2,$$
$$M = 2\left[(3 + |b_{10} - 1| + |b_{01}|) \left\|(L+P)^{-1}\right\| + 1\right].$$

Теорема 2.1. Пусть числа $\rho_0$, $\rho$ и $\varepsilon$ удовлетворяют неравенству

$$\rho_0 + \left[\frac{21}{4}\gamma (1 - \varepsilon\gamma)^{-4} + |b_{10}| + |b_{01}|\right] \|z_1\| \le \left[1 - q(\varepsilon,\ \rho)\right] \rho.$$

Тогда уравнение (4) для каждой функции $\phi \in N(L)$, $\|\phi\| \le \rho_0$, имеет в шаре $\|\omega\| < \rho$, пространства $H$ единственное решение $\omega = \Omega(\phi, \varepsilon)$.

Подставляя функцию $\omega = \Omega(\phi, \varepsilon)$ в уравнение (5) получим, что разрешимость (3) равносильна разрешимости уравнения

$$P\Omega(\phi, \varepsilon) = \phi. \tag{6}$$

Уравнение (6) – это классическое уравнение разветвления Ляпунова-Шмидта для уравнения (3), которое решается.

**Литература**

1. Икромов А.И. Космические исследования, 1984, т. 22, №3, с. 345-350.
2. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. – М.: Наука, 1978.

УДК 517.9

## Об одном классе дробных параболических эволюционных уравнений

Гулджонов Д.Н.[†], Илолов М.[‡]

**([†]Институт математики АН РТ)**

**([‡]Центр инновационного развития науки и новых технологий АН РТ г.Душанбе)**

Рассмотрим в банаховом пространстве $X$ уравнение Вольтерра

$$u(t) = u_0 + \int_0^t h(t-s) A(s) u(s) ds,\ t > 0, \tag{1}$$

где $u(t) : [0, T] \to X$ - неизвестная функция, $u_0 \in X$- начальное значение, h(t)- заданная скалярная функция следующего вида

$$h(t) \equiv h_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad 1 \le \alpha \le 2, t > 0, \tag{2}$$

а $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция.

Предположим, что для семейства операторов $A(t)$ выполнены следующие условия:

(A1) спектр операторов $A(t)$ лежит в открытой секториальной области

$$\sigma\left(A(t)\right) \subset \sum_{\omega} = \left\{\lambda \in C : |\arg\lambda| < \omega\right\}, \quad 0 \le t \le T \tag{3}$$

с некоторым фиксированным углом $\omega : 0 < \omega < \frac{\pi}{2}$;

(A2) резольвента удовлетворяет оценке

$$\left\|(\lambda I - A(t)^{-1})\right\| \le M/\left|\lambda\right|, \ \ \lambda \notin \sum\nolimits_{\omega}, \ 0 \le t \le T \tag{4}$$

с некоторой постоянной $M \ge 1$;

(A3) область определения $D(A(t))$ зависит от t, но существует некоторый фиксированный показатель $0 < \nu \le 1$ такой, что

$$D\left(A(s)\right) \subset D\left(A(t)^{\nu}\right) \text{ для всех } 0 \le s, t \le T. \tag{5}$$

Заметим, что в случае $\nu = 1$ условие (5) означает независимость $D(A(t))$от $t$.

Дополнительно предположим, что семейство операторов $A^{-1}(t)$ непрерывно по Гёльдеру в точке $t$, т.е.

$$||A(t)^{\nu}[A^{-1}(t) - A^{-1}(s)]|| \le N|t-s|^{\mu}, \ 0 \le s, \ t \le T \tag{6}$$

с некоторым фиксированным показателем $\mu$: $0 < \mu \le 1$ и постоянным $N > 0$. Показатели $\mu$ и $\nu$ связаны соотношением

$$1 < \mu + \nu \tag{7}$$

В указанных условиях каждый $A(s)$, $s \in [0, \ T]$ генерирует аналитическую полугруппу $\exp(-tA(s))$, $t > 0$. Кроме того, существует постоянная $C > 0$ не зависящая от $t$, $s$, такая, что

$$||A^n(s)\exp(-tA(s))|| \le \frac{c}{t^n},$$

где $n = 0, \, 1, \, 2, \cdots; \ t > 0$.

С учетом (2) уравнение (1) примет вид

$$u(t) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}A(s)u(s)ds. \tag{$(EE)_\alpha$}$$

Относительно выбора функции $h_\alpha(t)$приводим следующие два соображения:

1. дробный интеграл порядка $\alpha$ задается с помощью равенства

$$I^{\alpha}v(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}v(s)ds, \tag{8}$$

   где $v(t)$ – интегрируемая в смысле Бохнера $X$-значная функция;

2. степенной характер функции $h_\alpha(t)$ позволяет учесть память соответствующего эволюционного процесса.

Пользуясь представлением (8) можно доказать, что $(EE)_\alpha$, $1<\alpha<2$ интерполирует линейного эволюционного уравнения первого порядка $(EE)_1$ и уравнения второго порядка $(EE)_2$.

Формально, $(EE)_\alpha$ соответствует дробному эволюционному уравнению

$$\frac{d^\alpha n}{dt^\alpha}=A(t)u(t),\ 1<\alpha<2. \tag{9}$$

Основным результатом работы является получение фундаментального решения уравнения (9).

Следует отметить, что в работе [1] найдено интегро-дифференциальное уравнение, которое интерполирует уравнения теплопроводности и волнового уравнения. Перенос этого результата на случай абстрактных уравнений требует привлечения новых теорем, установленных в работах [2],[3].

**Литература**


1. Fujita Y. Osaka J. Math. 27 (1990), 309-321.
2. Yagi A. Abstract Parabolic Evolution Equations and their Applications, Springer, 2010.
3. Илолов М. Доклады АН РТ 56 (2013),№8, 591-597.


УДК 517.942-948

## О корректной разрешимости задачи типа Коши для оператора Даламбера произвольной степени на полупрямой

Исмати М., Исматов Н.М.

**(Институт предпринимательства и сервиса)**

1. Рассмотрим следующую задачу на полупрямой для уравнения четвертого порядка:

$$\left.\begin{array}{c} L_a^2u=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2u=0,\ x\in E_1^+,\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x),\,L_au|_{t=0}=\varphi_0(x),\ \left.\dfrac{\partial L_au}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\ x\geq 0,i=0,1,\\ u(0,t)=\mu(t),\,L_au|_{x=0}=0,t\geq 0,\ i=0\end{array}\right\} \tag{1}$$

где $L_a=\partial^2/\partial t^2-a^2\cdot\partial^2/\partial x^2$- оператор Даламбера.

Воспользуемся следующей редукции задачи (1):

$$u=V(x,t)+\vartheta(x,t), \tag{2}$$

где $V(x,t)$ и $\vartheta(x,t)$ соответственно являются решениями задачи

$$\left.\begin{array}{c} L_a^2V=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2u=0,x\in E_1^+,t>0,\\ V(x,0)=\varphi(x),V_t(x,0)=\psi\left(x\right),\,L_aV|_{t=0}=\varphi_0(x),\,\left.\frac{\partial L_aV}{\partial t}\right|_{t=0}=0,x\geq 0,\\ V(0,t)=0,\,L_aV|_{x=0}=0,t\geq 0\end{array}\right\} \tag{3}$$

и

$$\left.\begin{array}{c} L_a^2\vartheta=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2\vartheta=0,x\in E_1^+,t>0,\\ \vartheta(x,0)=0,\vartheta_t(x,0)=0,\,\left.\frac{\partial^iL_a\vartheta}{\partial t^i}\right|_{t=0}=0,x\geq 0,i=0,1\\ \vartheta(0,t)=\mu(t),\,L_a\vartheta|_{x=0}=0,t\geq 0\end{array}\right\} \tag{4}$$

Задача (3) описывает распространение начального режима, а задача (4) распространение граничного режима.

Для нахождения решение задачи (1), начальных функций этой задачи для отрицательных значениях $x$ продолжим нечетным образом:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{если } x>0,\\ -\varphi(-x), & x<0\end{cases}, \quad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & \text{если } x>0,\\ -\psi(-x), & x<0\end{cases},$$

$$\varphi_0(x)=\begin{cases}\varphi_0(x), & \text{если } x>0,\\ -\varphi_0(-x), & x<0\end{cases}.$$

Сначала будем решать задачу (3). Введя обозначение

$$L_aV\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)V=Z(x,t), \tag{5}$$

решения задачи типа Коши (3) ищем в виде решения задачи на всей прямой:

$$V\left(x,t\right)=\frac{\varphi\left(x+at\right)+\varphi\left(x-at\right)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\Psi\left(\alpha\right)d\alpha+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}Z\left(\xi,\tau\right)d\xi, \tag{6}$$

где

$$Z\left(\xi,\tau\right)=\frac{\varphi_0\left(\xi+a\tau\right)+\varphi_0\left(\xi-a\tau\right)}{2}. \tag{7}$$

Имеет место

**Лемма.** *Если в задаче типа Коши на всей прямой*

$$\left.\begin{array}{r} L_a^2u=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2u=0, x\in E_1, t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\Psi\left(x\right), L_au|_{t=0}=\varphi_0(x)\end{array}\right\} \tag{$*$}$$

*начальные функции* $\varphi(x)$, $\Psi(x)$ и $\varphi_0(x)$ *относительно некоторой точки* $x_0\in E_1$ *являются нечетными функциями, то решение этой задачи в точке* $x_0\in E_1$ *равно нулю, т.е.* $u(x_0,t)=0$.

**Доказательство.** Пусть $x=x_0=0$. Подставляя в формулах (6) и (7) значение $x=0$ и учитывая нечетность начальных функций, получим: $Z(0,\tau)=0$, а, следовательно, и $u(0,t)=0$, поскольку по формуле (7) функция $Z\left(\xi,\tau\right)$ является нечетной, что и требовалось доказать.

Таким образом, функции $V(x,t)$ и $Z\left(x,\tau\right)$ определённые по формулам (6) и (7) удовлетворяют нулевому граничному условию задачи (3).

В формулах (6) и (7) возвращаясь к прежним начальным функциям, для решения задачи (3) получим следующие выражения:

$$V\left(x,t\right)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+\\ \qquad+\dfrac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}Z\left(\xi,\tau\right)d\xi, t<\dfrac{x}{a}, x>0\\ \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(-x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\int\limits_{-x+at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+\\ \qquad+\dfrac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{-x+a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}Z\left(\xi,\tau\right)d\xi, t>\dfrac{x}{a}, x>0\end{cases} \tag{8}$$

и

$$Z(\xi,\tau)=\begin{cases}\dfrac{\varphi_0(\xi+a\tau)+\varphi_0(\xi-a\tau)}{2}, & \tau<\dfrac{\xi}{a},\ \xi>0\\ \dfrac{\varphi_0(\xi+a\tau)-\varphi_0(-\xi+a\tau)}{2}, & \tau>\frac{\xi}{a},\ \xi>0\end{cases} \tag{9}$$

Теперь переходим к решению задачи (4). Воспользовавшись методикой решения задачи вида (1), например [7], для решения задачи (4) получим $W(x,t)=\mu(t-\frac{x}{a})$, причем $\mu(t-\frac{x}{a})=0$, если $t-\frac{x}{a}<0$, $x>0$, т.е. мы примем $\mu(t)=0$ для $t<0$.

Тогда окончательно для решения задачи (1) получим следующее выражение:

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)\,d\alpha+\\ \qquad+\dfrac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}Z(\xi,\tau)d\xi, t<\frac{x}{a}, x>0\\ \mu(t-\dfrac{x}{a})+\dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(-x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\int\limits_{-x+at}^{x+at}\psi(\alpha)\,d\alpha+\\ \qquad+\dfrac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-x+a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}Z(\xi,\tau)d\xi, t>\frac{x}{a}, x>0\end{cases} \tag{10}$$

где $Z(x,t)$ определяется формулой (9).

**Определение 1.** Функция $u(x,t)$ называется классическим решением задачи (1), если она имеет непрерывные частные производные $u_t$, $L_a u$, $\frac{\partial}{\partial t}L_a u$ при $t=0$, и непрерывные частные производные $u_{tttt}, u_{xxxx}, u_{xxtt}$ когда $x\in E_1$, $t>0$; удовлетворяет уравнению и начальным условиям этой задачи в обычном классическом смысле.

Имеет место

**Теорема 1.** *Пусть начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_0(x)$, и функция $\mu(t)$ в задаче (1) удовлетворяют следующим условиям:*

$$\varphi(x)\in{}^4(E_1),\ \psi(x)\in{}^3(E_1),\ \varphi_0(x)\in{}^3(E_1),\ \mu(t)\in C_t^4(t\geq 0)$$

*Тогда формула (10), в которой $Z(x,t)$ определяется формулой (9), дает классическое решение задачи (1). Это решение существует, оно единственно и непрерывно зависит от начальных функций и от правой части уравнения $f(x,y)$, т.е. задача (1) поставлена корректно в классическом смысле.*

Отметим, что в терминах пространства Соболева С.Л. $W_2^l(E_1\times t>0)$ с целыми $l$, условия, наложенные на начальных функций и на функцию $\mu(t)$ могут быть обобщены следующим образом:

$$\varphi(x)\in W_2^5(E_1),\ \psi(x)\in W_2^4(E_1),\ \varphi_0(x)\in W_2^4(E_1), \mu(t)\in W_t^5(t\geq 0)$$

и чтобы все эти производные были интегрируемы с квадратом по некоторой ограниченной области. К примеру, условия на наложенные на функции $\varphi(x)$ означают, что эта функция обладает интегрируемыми с квадратом обобщенные производные до пятого порядка по некоторой ограниченной (относительно переменному $t$) области.

Аналогично можно решать задачи типа Коши для уравнения шестого порядка на полупрямой

$$\left.\begin{array}{r}L_a^3u=\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^3u=0, x\in E_1, t>0\\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x), \left.\dfrac{\partial^i L_a u}{\partial t^i}\right|_{t=0}=\varphi_i(x), i=0,2, \left.\dfrac{\partial^i L_a u}{\partial t^i}\right|_{t=0}=0, i=2,3,\\ u(0,t)=\mu(t), \left.\dfrac{\partial^i L_a u}{\partial x^i}\right|_{x=0}=0, t\geq 0, i=0,1\end{array}\right\}$$

и более обшей задачи типа Коши для уравнения порядка $2k$:

$$\left.\begin{array}{r} L_a^k u = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^k u = 0, x \in E_1^+, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi\left(x\right), \left.\dfrac{\partial^i L_a u}{\partial t^i}\right|_{t=0} = \varphi_i(x), i = 0, 1, \ldots, 2k-3, \\ \varphi_1(x) = \varphi_3(x) = \cdots = \varphi_{2k-3}(x) = 0, \\ u(0,t) = \mu(t), \left.\dfrac{\partial^i L_a u}{\partial x^i}\right|_{x=0} = 0, t \geq 0, i = 0, 1, \ldots, (2k-4)/2, k \geq 2 \end{array}\right\}$$

На формулировке соответствующих теорем не останавливаемся.

**Литература**


1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.,Наука, 1976.
2. Эйдельман С.Д. Параболические системы, -М.: Наука, 1964,-с.445.
3. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных –М.:, Наука, 1976.
4. Ильин В.А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений.//Успехи мат. наук, -I960, т. 15. в.2, -с. 97-154.
5. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. -М.: Наука, 1988. -с.336.
6. Исмати М., Исматов Н. М. Обобщенные решения смешанных задач для уравнения динамики упругого тела и о некоторых локальных и нелокальных задачах математической физики. - Душанбе, ИПС, 2009,-160с.
7. Исмати М. Уравнения математической физики (на таджикском языке), Душанбе, «Офсет», 2011,-320с.


УДК 517.927

## Об одной обыкновенной дифференциальной уравнении четвертого порядка вырождающиеся в левой граничной точкой

Кадиров Г.М., Раджабов Н.

**(Таджикский национальный университет)**

Пусть $\Gamma = \{a < x < b\}$ - множество точек на вещественной оси. На $\Gamma$ рассмотрим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка вида

$$(D_x^\alpha)^4 u + a_1 (D_x^\alpha)^3 u + a_2 (D_x^\alpha)^2 u + a_3 (D_x^\alpha) u + a_4 u = f\left(x\right) \qquad (1)$$

где $a_i\left(i = 1, 2, 3, 4\right)$ – заданные постоянные числа, $f\left(x\right)$ – заданная функция на $\overline{\Gamma}$, $\alpha = const > 1, D_x^\alpha = (x-a)^\alpha \frac{d}{dx}$.

Проблеме получения многообразия решений и исследованию граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярными и сверх - сингулярными коэффициентами посвящены работы [1]-[5].

В настоящей работе в зависимости от корней характеристического уравнения

$$\lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0, \qquad (2)$$

получено многообразия решений уравнения (1) через четырьмя произвольные постоянные.

Сначала рассмотрим однородное уравнение

$$(D_x^\alpha)^4 u + a_1 (D_x^\alpha)^3 u + a_2 (D_x^\alpha)^2 u + a_3 (D_x^\alpha) u + a_4 u = 0 \qquad (3)$$

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$U(x) = e^{-\lambda\omega_\alpha(x)} \tag{4}$$

$$\text{где } \omega_\alpha(x) = \frac{1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}}.$$

Из этого выражения вычисляя $D_x^\alpha u, (D_x^\alpha)^2 u, (D_x^\alpha)^3 u\,, (D_x^\alpha)^4 u$ после подставляя их в уравнении (3) и сокращая на $e^{-\lambda\omega_\alpha(x)}$ нахождения $\lambda$ получим алгебраическое уравнение (2).

Пусть корни характеристического уравнения (2) являются вещественными и разными.

Тогда общее решение однородное уравнения (3) даётся формулой

$$U(x) = c_1 e^{-\lambda_1\omega_\alpha(x)} + c_2 e^{-\lambda_2\omega_\alpha(x)} + c_3 e^{-\lambda_3\omega_\alpha(x)} + c_4 e^{-\lambda_4\omega_\alpha(x)} \tag{5}$$

где $c_i\,(1 \le i \le 4)$ – произвольние постоянные.

Согласно методу вариации произвольных постоянных, общее решение неоднородного уравнения (1) в этом случае будем искать в виде

$$U(x) = c_1(x)\,e^{-\lambda_1\omega_\alpha(x)} + c_2(x)\,e^{-\lambda_2\omega_\alpha(x)} + +c_3(x)e^{-\lambda_3\omega_\alpha(x)} + c_4(x)e^{-\lambda_4\omega_\alpha(x)} \tag{6}$$

где $c_i(x)\,(1 \le i \le 4)$ – произвольные дифференцируемые функции аргумента x.

Используя схему этого метода для нахождения произвольные функции $c_i(x)\,(1 \le i \le 4)$ - получим следующую алгебраическую систему

$$\begin{cases} e^{-\lambda_1\omega_\alpha(x)} D_x^\alpha c_1(x) + e^{-\lambda_2\omega_\alpha(x)} D_x^\alpha c_2(x) + \\ +e^{-\lambda_3\omega_\alpha(x)} D_x^\alpha c_3(x) + e^{-\lambda_4\omega_\alpha(x)} D_x^\alpha c_4(x) = 0 \\ \lambda_1 e^{-\lambda_1\omega_\alpha(x)} D_x^\alpha c_1(x) + \lambda_2 e^{-\lambda_2\omega_\alpha(x)} D_x^\alpha c_2(x) + \\ +\lambda_3 e^{-\lambda_3\omega_\alpha(x)} D_x^\alpha c_3(x) + \lambda_4 e^{-\lambda_4\omega_\alpha(x)} D_x^\alpha c_4(x) = 0 \\ \lambda_1^2 e^{-\lambda_1\omega_\alpha(x)} D_x^\alpha c_1(x) + \lambda_2^2 e^{-\lambda_2\omega_\alpha(x)} D_x^\alpha c_2(x) + \\ +\lambda_3^2 e^{-\lambda_3\omega_\alpha(x)} D_x^\alpha c_3(x) + \lambda_4^2 e^{-\lambda_4\omega_\alpha(x)} D_x^\alpha c_4(x) = 0 \\ \lambda_1^3 e^{-\lambda_1\omega_\alpha(x)} D_x^\alpha c_1(x) + \lambda_2^3 e^{-\lambda_2\omega_\alpha(x)} D_x^\alpha c_2(x) + \\ +\lambda_3^3 e^{-\lambda_3\omega_\alpha(x)} D_{x}^\alpha{}_3(x) + \lambda_4^3 e^{-\lambda_4\omega_\alpha(x)} D_{x}^\alpha{}_4(x) = f(x) \end{cases} \tag{7}$$

Решая алгебраическую систему (7) находим $D_x^\alpha c_i(x)\,(1 \le i \le 4)$ которое имеют вид:

$$D_x^\alpha c_1(x) = -\frac{e^{\lambda_1\omega_\alpha(x)} f(x)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)}\ ,$$

$$D_x^\alpha c_2(x) = \frac{e^{\lambda_2\omega_\alpha(x)} f(x)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)}\ ,$$

$$D_x^\alpha c_3(x) = -\frac{e^{\lambda_3\omega_\alpha(x)} f(x)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)}\ ,$$

$$D_x^\alpha c_4(x) = \frac{e^{\lambda_4\omega_\alpha(x)} f(x)}{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)}\ .$$

Отсюда интегрируя, находим функции $c_i(x)\,(1 \le i \le 4)$,

$$c_1(x) = -\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)} \int_a^x \frac{e^{\lambda_1\omega_\alpha(x)} f(t)}{(t-a)^\alpha} dt + c_1$$

$$c_2(x) = \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)} \int_a^x \frac{e^{\lambda_2\omega_\alpha(x)} f(t)}{(t-a)^\alpha} dt + c_2$$

$$c_3(x) = -\frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_4)} \int_a^x \frac{e^{\lambda_3\omega_\alpha(x)} f(t)}{(t-a)^\alpha} dt + c_3$$

$$c_4(x) = \frac{1}{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_4)(\lambda_4-\lambda_3)} \int_a^x \frac{e^{\lambda_4\omega_\alpha(x)} f(t)}{(t-a)^\alpha} dt + c_4$$

Далее подставляя найденные функции $c_i(x)\,(1 \le i \le 4)$ в формулу (6) приходим к следующему утверждению.

**Теорема.** *Пусть в уравнении (1) параметры* $a_i\ \ (1 \le i \le 4)$ *такие что корни характеристического уравнения (2) вещественные – разные и положительные.*

*Функция* $f(x) \in C(\overline{\Gamma}), \alpha > 1,\ f(a) = 0$ *со следующим асимптотическим поведением* $f(x) = o\left[e^{-|\delta_1|\omega_\alpha(x)}(x-a)^{\delta_2}\right], \quad \delta_1 > \lambda = max\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\},\ \delta_2 > \alpha-1$. *Тогда любое решение уравнения (1) из класса* $C^4(\Gamma)$ *представимо в виде*

$$U(x) = c_1 e^{-\lambda_1\omega_\alpha(x)} + c_2 e^{-\lambda_2\omega_\alpha(x)} + c_3 e^{-\lambda_3\omega_\alpha(x)} + c_4 e^{-\lambda_4\omega_\alpha(x)-}$$

$$-\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)} \int_a^x \frac{e^{\lambda_1[\omega_\alpha(t)-\omega_\alpha(x)]} f(t)}{(t-a)^\alpha} dt +$$

$$+\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_2)} \int_a^x \frac{e^{\lambda_2[\omega_\alpha(t)-\omega_\alpha(x)]} f(t)}{(t-a)^\alpha} dt -$$

$$-\frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)} \int_a^x \frac{e^{\lambda_3[\omega_\alpha(t)-\omega_\alpha(x)]} f(t)}{(t-a)^\alpha} dt +$$

$$+\frac{1}{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)} \int_a^x \frac{e^{\lambda_4[\omega_\alpha(t)-\omega_\alpha(x)]} f(t)}{(t-a)^\alpha} dt, \tag{8}$$

$c_i\,(1 \le i \le 4)$- *произвольные постоянные числа,* $\lambda_i\,(1 \le i \le 4)$ *– корни характеристического уравнения (2).*

**Замечание 1.** Исследованы другие возможные случаи корней характеристического уравнения (2).

**Замечание 2.** Некоторые результаты получено для обыкновенного дифференциального уравнения $n$- го порядка с дифференциальным оператором $D_x^\alpha$.

**Замечание 3.** Найдено условии на корней характеристического уравнения (2), при выполнение которое уравнение (1) имеет единственное решение.

### Литература


1. Раджабов Н. Интегральные представления для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка с сингулярной и сверхсингулярной точкой //Докл. АН.ТХL // ,№3,2000, с.33-39.
2. Раджабов Н. Задачи типов линейного сопряжения для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка с одной сингулярной и сверхсингулярной точкой //Докл. АН.ТХL // ,№4, 1999, с. 31-39.
3. Раджабов Н., Кадиров Г.М. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с левой граничной сверхсингулярной точкой//. Труды XII Международного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики" (МДОЗ МФ – 2005) Харьков – Херсон, 2005, с. 292 – 294.

4. Кадиров Г. М., Раджабов Н. Интегральные представления многообразия решений для одного класса линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с граничными сверхсингулярными точками. // Вестник ТНУ, 1/(77), Душанбе. "Сино", 2012, с. 40 – 49.
5. Н. Раджабов. Г. М. Кадиров, А. Сатторов. К теории одного класса вырождающегося обыкновенного дифференциального уравнения высших порядков. // Вестник ТНУ, 1/1(126), Душанбе. "Сино", 2014, с. 3 – 5.

УДК 517.2

## Об ограниченных решений линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, нагруженными свободными членами и дополнительными условиями

Каримова Н.

**(Кулябский государственный университет им. А. Рудаки)**

Рассматривается линейное неоднородное дифференциальное урав-нение (л.н.д.у.) второго порядка с постоянными коэффициентами, нагрузкой в правой части

$$y'' + py' + qy = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \theta_k (x) \tag{1}$$

и дополнительными условиями типа

$$\int_{x_0}^{x} \varphi_i (t)\, y_r (t)\, dt = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2}$$

где $f(x)$, $\theta_k(x)$, $\varphi_i \epsilon C(a,b)$ ; $(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$, p, q, , $p_i$ – заданные постоянные, $y_r(x) -$ (1), $\alpha_k$ - неизвестные параметры наряду с искомой функцией y(x).

Имеет место

**Теорема**. *Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (1) и дополнительными условиями (2) сводится к линейное алгебраическое система (л.а.с.)*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k C_{ik} = d_i,\ i = 1, 2, \ldots, m \tag{3}$$

*состоящей из m уравнений с n неизвестными* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

1. *Если ранг матрицы совместной системы (3) равен числу неизвестных (r=n) и определитель л.а.с. (3), отличен от нуля ($detc_{ik} \neq 0$),то л.а.с. (3), а тем более л.н.д.у. (1), (2) имеет и притом единственное решение;*

2. *Если ранг матрицы совместных л.а.с. (3) меньше числа неизвестных (r <n) то л.а.с. (3), неопределенная и имеет бесконечное множество решений.*

### Литература

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений – Физмат.гиз, 1958.
2. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. ЛГУ,1955.
3. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений – "Наука и техника", Минск 1972.
4. Акбаров Р., Н. Каримова –ДАН РФ, 2013, т.56, №1.стр.23-25
5. Акбаров Р., Н. Каримова –ДАН РФ, 2013, т.56, №10.

УДК 517.955

# Представления решений одного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами

Кодиров О.К.

**(ТТУ им. акад. М. Осими, Душанбе, Таджикистан)**

В настоящей работе рассматривается задача Коши для дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка вида:

$$\left(t^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+pt\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(x_j^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+p_jx_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^n \tag{1}$$

где $m,n(m,\ n>1)$- заданные натуральные числа, $t\geq t_0>0, x=(x_1,\ x_2,...,x_m)\in R^m$; $p>0$ и $p_j>0(j=\overline{1,m})$ – заданные действительные числа, $u(t,x)$ – искомая функция.

Пусть $u(t,x)$ - характеризует состояние некоторого объекта в точке $x$ в момент времени $t$, а $L=t^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+pt\frac{\partial u}{\partial t}$ и $L_j=x_j^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+p_jx_j\frac{\partial u}{\partial x_j}$, $(j=\overline{1,\ m})$ – некоторые операторы, осуществляющие изменение состояния этого объекта (или процесса). Тогда в самых общих случаях такие физические процессы приводят к модельному уравнению с экстремальными свойствами вида [1;2]

$$Lu=\max_{\alpha\in A}\left\{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j(L_ju)^S\right\}^{\frac{1}{s}}, \tag{2}$$

где $=\left\{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m):\ 0<\alpha_j<1,\ \sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_j^{\frac{n}{n-s}}=1\right\}$, $n>s>0$ – заданные натуральные числа.

Доказано [1], что уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$(Lu)^n=\sum_{j=1}^{m}(L_ju)^n. \tag{3}$$

Для нахождения решений задачи Коши [1-2] сначала задаём начальные условия вида

$$u(t_0;x_{01},\ x_{02},\ \cdots,x_{0m})=u_{01},\ \frac{\partial u}{\partial t}(t_0;x_{01},\ x_{02},\ \cdots,x_{0m})=u_{02} \tag{4}$$

и составим вспомогательную переопределенную систему уравнений вида

$$\left\{\begin{array}{l} t^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+pt\frac{\partial u}{\partial t}=C\,, \\ x_j^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+p_jx_j\frac{\partial u}{\partial x_j}=C_j, \end{array}\right. \qquad (j=\overline{1,m}), \tag{5}$$

который определяет соответственно класс простых решений уравнения (1). Здесь $C$ и $C_j$ $(j=\overline{1,m})$ произвольные действительные числа, являющиеся решением уравнения согласования

$$\sum_{j=1}^{m}C_j^n=C^n. \tag{6}$$

Напишем общее решение системы (5), которое является общим решением уравнения (1) в простом классе с учетом начальных условий (4):

$$u = \left( \frac{(1-p)^2 u_{0,1} - (1-p)\, t_0 u_{0,2} - C}{(1-p)^2\, 2^m} + \frac{(1-p)\, t_0 u_{0,2} + C}{(1-p)^2\, 2^m} \left( \frac{t}{t_0} \right)^{1-p} \right) \prod_{j=1}^{m} \left( 1 + \left( \frac{x_j}{x_{0,j}} \right)^{1-p_j} \right) + \\ + \frac{C}{p-1} \ln \left| \frac{t}{t_0} \right| + \sum_{j=1}^{m} \frac{C_j}{p_j - 1} \ln \left( \frac{x_j}{x_{0,j}} \right) \quad (7)$$

Имеет место следующая

**Теорема**. Пусть $C$ и $C_j$ $(j = \overline{1,m})$ – являются решением уравнения согласования (6). Тогда решение уравнения (1) в простом классе, удовлетворяющее начальным условиям (4), соответственно переопределённой системы (5) представляется в виде (7).

Теперь решения данного уравнения (1) рассмотрим в экспоненциальном классе. Для этого составим следующую переопределённую вспомогательную систему уравнений вида

$$\begin{cases} t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + pt \frac{\partial u}{\partial t} = Cu\,, \\ x_j^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + p_j x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = C_j u,\ (j = \overline{1,m}). \end{cases} \quad (8)$$

Здесь, как и раньше $C$ и $C_j$ $(j = \overline{1,m})$ произвольные действительные числа, являющиеся решением уравнения согласования (6).

Напишем общее решение системы (8), которое является общим решением уравнения (1) в экспоненциальном классе с учетом начальных условий (4):

$$u = \begin{cases} \left( \frac{\left[p-1+\sqrt{(1-p)^2+4C}\right] u_{01} + 2t_0 u_{02}}{2^{m+1}\sqrt{(1-p)^2+4C}} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p+\sqrt{(p-1)^2+4C}\right)} + \right. \\ \left. + \frac{\left[p-1+\sqrt{(1-p)^2+4C}\right] u_{01} - 2t_0 u_{02}}{2^{m+1}\sqrt{(1-p)^2+4C}} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p-\sqrt{(p-1)^2+4C}\right)} \right) \times \\ \prod_{j=1}^{m} \left( \left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p_j+\sqrt{(p_j-1)^2+4C_j}\right)} + \left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p_j-\sqrt{(p_j-1)^2+4C_j}\right)} \right), \\ \text{при} \quad (p-1)^2 + 4C > 0\,,\ (p_j-1)^2 + 4C_j > 0\,,\ (j = \overline{1,m}); \\ \left\{ u_{0,1} + \frac{(p-1)u_{01} + 2t_0 u_{02}}{2} \ln\left|\frac{t}{t_0}\right| \right\} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1-p}{2}} \prod_{j=1}^{m} \left\{ 1 + \ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right| \right\} \left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{\frac{1-p_j}{2}}, \\ \text{при} \quad (p-1)^2 + 4C = 0\,,\ (p_j-1)^2 + 4C_j = 0\,,\ (j = \overline{1,m} \\ \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1-p}{2}} \left[ u_{01} \cos\left( \frac{\sqrt{(p-1)^2+4C}}{2} \ln\left|\frac{t}{t_0}\right| \right) + \frac{(p-1)u_{01} + 2u_{02}t_0}{\sqrt{(p-1)^2+4C}} \times \right. \\ \left. \times \sin\left( \frac{\sqrt{(p-1)^2+4C}}{2} \ln\left|\frac{t}{t_0}\right| \right) \right] \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{\frac{1-p_j}{2}} \left\{ \cos\left( \frac{\sqrt{(p_j-1)^2+4C_j}}{2} \ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right| \right) + \right. \\ \left. + \sin\left( \frac{\sqrt{(p_j-1)^2+4C_j}}{2} \ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right| \right) \right\}, \\ \text{при} \quad (p-1)^2 + 4C < 0\,,\ (p_j-1)^2 + 4C_j < 0\,,\ (j = \overline{1,m}). \end{cases} \quad (9)$$

Имеет место следующая

**Теорема**. Пусть $C$ и $C_j$ $(j = \overline{1,m})$ – являются решением уравнения согласования (6). Тогда решение уравнения (1) в экспоненциальном классе, удовлетворяющее начальным условиям (4), соответственно переопределенной системы (8) представляется в виде (9).

## Литература

1. Юнуси М. Об одном классе модельных уравнений с экстремальным свойством. Вестник национального университета, 2004, серия математика, № 1, с.128-135
2. Гадозода М., Кодиров О.К. Об одном классе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, Вестник национального университета (серия естественных наук). №1 (49) Душанбе, 2009 г., стр. 49-53.
3. Гадозода М., Кодиров О.К. Представления решений одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. Вестник технического университета №4.2009 г., стр. 5-7.

УДК 517.956

## Исследование нелинейных краевых задач электромагнитоупругости с памятью

Курбанов И.

**(Российско-Таджикский (славянский) университет, Душанбе)**

Установлены априорные оценки и условия, при выполнении которых имеют место теоремы существования и единственности обобщенных решений уравнений электромагнитоупругости. При этом существенно используется свойства взаимосвязанности электромагнитоупругих полей.

Многие задачи теории упругости и электромагнитных полей, встречающихся в природе, взаимосвязаны. Так, например, если поместить элементы конструкции (стержень, пластинки или оболочки) в электромагнитное поле, то естественно они сложатся, и мы переходим к задачам механики связанных полей. Возникает сложная картина взаимодействия электромагнитных и механических полей.

Рассмотрим разрешимости нелинейных краевых задач электромагнитоупругости с общими определяющими уравнениями вида

$$D(t) = D(E(\tau),\ H(\tau),\ \varepsilon_{ij}(\tau),\ \tau \le t), B(t) = B(H(\tau),\ E(\tau),\ \varepsilon_{ij}(\tau),\ \tau \le t), \tag{1}$$

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma(E_{ij}(\tau),\ E(\tau),\ H(\tau),\ \tau \le t), J(t) = J(E(\tau),\ H(\tau),\ \varepsilon_{ij}(\tau),\ \tau \le t),$$

Требуется найти решение краевой задачи вида:

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial D(E)}{\partial x} + J(E) + J_{\text{ст}}(x,t), \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B(H)}{\partial t},\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - p\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t) \tag{2}$$

При краевых и начальных условиях

$$\begin{array}{l} u\,|_{\partial\Omega} = 0, H\,|_{\partial\Omega} = 0,\ u\,(x,o) = u_0(x),\ u_t'(x,0) = u_1(x)E\,(x,\ 0) = E_0\,(x)\,, \\ H\,(x,\ 0) = H_0\,(x)\,,\ \ x \in \Omega,\ \ \Omega = (0,\ \ \ell) \end{array} \tag{3}$$

1. Предположим, что среда является изотропной пъейзоэлектрической, тогда определяющие уравнения (1) имеет вид [1 – 3]

$$\sigma_x = \overline{E}\,\xi_x - \overline{\xi}E,\ \ \xi_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \ D(E) = \xi\,E + \overline{\xi}\xi_x,$$
$$B(H) = \mu\,H,\ \ J(E) = \sigma(\,|E|\,)E = \sigma\,|E|^p\,E,\ \ p \ge 2. \tag{4}$$

Теорема 1. Предположим, что $\mu, \xi, \sigma, \overline{E}, \overline{\xi}$ положительные постоянные, кроме того, выполняется условие

$$u_0,\ \ u_1 :\in L^2(\Omega),\ \ H_0 \in L^2(\Omega),\ \ E_0 \in L^p(\Omega)),$$

$$J_{\text{СТ,}} f \in L^2(Q), \;\; Q = \{(0, \;\; T) \cdot \Omega\}.$$

Тогда задача (2) – (4) имеет обобщенное решение и такое, что

$$E \in L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \cap L^p(0, T; L^p(\Omega)), \quad u, u', H \in L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right).$$

Если среда является изотропной и ферромагнитной, то определяющие уравнения (1) имеет вид

$$\begin{array}{l} \sigma_x = \bar{E}\xi_x - \xi E, \;\; \xi_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \;\; D(E) = \xi E + \bar{E}\xi_x \\ B(H) = \mu(H)H = \mu\,|\,H\,|^q H, \;\; q \geq 2, \;\; J(E) = \sigma E, \end{array} \tag{5}$$

Теорема 2. Предположим, что $\bar{E}, \;\; \xi, \;\; \mu, \;\; \sigma$ положительные постоянные, кроме того, выполняется условие

$$\begin{array}{l} u_0, \;\; u_1, \;\; E_0 \in L^2_{(\Omega)}, \;\; H_0 \in L^q_{(\Omega)}, \\ L_{\text{СТ.}}(x, \;\; t), \;\; f(x, \;\; t) \in L^2(Q). \end{array}$$

Тогда задача (2), (3), (5) имеет обобщенное решение и такое, что

$$\begin{array}{l} H \in L^\infty\left(0, \;\; T; \;\; L^2_{(\Omega)}\right) \cap L^q\left(0, \;\; T; \;\; L^q_{(\Omega)}\right), \\ u, \;\; u'E \in L^\infty\left(0; \;\; T; \;\; L^2_{(\Omega)}\right). \end{array}$$

**Замечание.** Аналогичные теоремы существования можно установить для других конкретных материальных уравнений электромагнитоупругих полей.

**Литература**


1. Лионс Ж. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1971.
2. Минропольский Ю.А., Курбанов И. О разрешимости краевых задач электромагнитоупругости с памятью // ДАН СССР, – 1991, – №1.
3. Курбанов И. докторская диссертация “Аналитические и качественные исследования нелинейных электромагнитоупругих систем с памятью. – Киев, – 1991.


УДК 517.9

## Об одном линейном параболическом уравнении с переменными коэффициентами

Кучакшоев Х.С.

**(Российско-Таджикский (славянский) университет, Душанбе)**

В работе рассматривается связь между положительными решениями линейного параболического уравнения с переменными коэффициентами и положительными решениями квазилинейного параболического уравнения.

Линейному параболическому уравнению с переменными коэффициентами общего вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

посвящены достаточно много работ.

В работе [1, с.59] , рассматривалось параболическое уравнение вида

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u + f(x,t) \cdot I_{\{u>0\}}, \;\; (x,t) \in Q_1(0), \\ u \geq 0, \;\; (x,t) \in Q_1(0), \end{cases} \tag{2}$$

где

$$Q_r(P_0) = \left\{(x,t) \in R^2,\ |x - x_0| < r,\ |t - t_0| < r^2\right\}, \qquad I_{\{u>0\}} = \begin{cases} 1,\ u > 0, \\ 0,\ u \le 0. \end{cases}$$

В работе [1, с.59] при некоторых предположениях была доказана теорема о непрерывности $u_t$, которая имеет широкое применение в финансовой математике и численном анализе.

В работе [2, с.169] была доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (1) в $L_q([0,T], L_p)$ с коэффициентами из $C^1$.

Большой интерес представляет вопрос о связи между решениями нелинейных и линейных параболических уравнений.

Из уравнение (1) при $a(x,t) = 1, b(x,t) = -\chi g(t),\ 4c(x,t) = b^2(x,t),\ f(x,t) = 0$, $\chi = const,\ \chi > 0$, получим параболическое уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \chi g(t)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\chi^2}{4} g^2(t) u\,,\ \ x \in R,\ t > 0. \tag{3}$$

Находим связь между положительными решениями уравнения (3) и положительными решениями нелинейного уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\chi}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + x\zeta(t) + \eta(t),\ \ x \in R,\ t > 0, \tag{4}$$

где $\zeta(t)$ и $\eta(t)$ произвольные функции переменной t. Уравнение (4) получается из системы Келлера-Сиджела[3, с.235]

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \chi \frac{\partial}{\partial x}\left(w \frac{\partial v}{\partial x}\right),\ \chi = const,\ x \in R,\ t > 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -w,\ \ x \in R,\ t > 0. \end{cases} \tag{5}$$

Система (5) имеет широкое применение в задачах математической биологии.

Имеет место следующая теорема [4, с.130].

**Теорема.** *1) Если* $u(x,t) > 0$*- решение уравнения (3), то* $v(x,t) = xg(t) + h(t) - \frac{2}{\chi}\ln u(x,t)$, $g'(t) = \zeta(t),\ h'(t) = \eta(t)$, *решение уравнения (4).*

*2) Если* $v(x,t)$ *решение уравнения (4), то* $u(x,t) = e^{-\frac{\chi\,(v(x,t) - xg(t) - h(t))}{2}}$, $g'(t) = \zeta(t)$, $h'(t) = \eta(t)$ *решение уравнения (3).*

Следует отметить, что функционально аналитический подход к анализу системы (5) изложен в работе [5, с.210].

**Литература**

1. A. Blanchet, J. Dolbeault, R. Monneau, On the one-dimensional parabolic obstacle problem with variable coefficients, "Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications vol. 63, 2005, p. 59-66.
2. Kyeong-Hun Kim, $L_q$ ($L_p$)-theory of parabolic PDEs with variable coefficients, Bull. Korean Math. Soc., 45(2008), № 1, pp. 169-190.
3. Keller E.F., Segel L.-J. // Theor. Biol., 1971, №30, pp. 235-248.
4. Кучакшоев Х.С. О преобразовании квазилинейного параболического уравнения в линейное дифференциальное уравнение. Материалы международной математической конференции "Дифференциальные уравнения, теория функций и их приложения" по случаю 75-летия со дня рождения академика А.М. Самойленко, Украина, г. Севастополь 23-30 июня 2013г., с.130.
5. Илолов М., Кучакшоев Х.С., Об абстрактных уравнениях с неограниченными нелинейностями и их приложениях, Доклады Академии наук, 2009, т.428,№3, с.310-312.

УДК 517.946

# Об одном уравнение 4-го порядка составного типа

Мирзоев С.С.

**(Таджикский национальный университет)**

Рассмотрим вырождающееся неклассическое уравнение 4-го порядка [1,2]

$$\left(y^p\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(y^q\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{q}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)u=0, \tag{1}$$

где $0<p,q<1$ - вещественное число.

В полупространстве $R_+^{n+1}$ будем рассматривать задачу Коши с видоизмененными начальными данными.

**Задача K.** *Найти в полупространстве $R_+^{n+1}$ решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$\begin{aligned} &u|_{y=0}=\varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}=\varphi_1(x),\\ &\lim_{y\to 0}\left(y^q\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{q}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\varphi_2(x),\\ &\lim_{y\to 0}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^q\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{q}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\varphi_3(x), \end{aligned} \tag{2}$$

*где $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x)$ - заданные достаточно гладкие и ограниченные функции.*

Уравнение (1) преобразуем к системе уравнений

$$y^q\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\frac{q}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=V(x,y),$$

$$y^p\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0.$$

Тогда задача $K$ распадается на следующие задачи:

$$y^q\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\frac{q}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=V(x,y), \tag{3}$$

$$u|_{y=0}=\varphi_0 \tag{4}$$

и

$$y^p\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0, \tag{5}$$

$$V|_{y=0}=\widetilde{\varphi}_0(x), \quad \frac{\partial V}{\partial y}=\widetilde{\varphi}_1(x), \tag{6}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_0=\varphi_2+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_i^2},$$

$$\widetilde{\varphi}_1=\varphi_3+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_i^2}.$$

С помощью подстановок

$$\nu_1 = (1+a_1)y^{\frac{1}{1+a_1}} \text{ и } \nu_2 = (1-a_2)y^{\frac{1}{1-a_2}},$$

где

$$a_1 = \frac{q}{2-q},\ a_2 = \frac{p}{2+p},$$

уравнения (3) и (5) преобразуются соответственно в уравнение Пуассона и гиперболическое уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (ЭПД)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \nu_1^2} = V(x,y), \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial \nu_2^2} - \frac{a_2}{\nu_2}\frac{\partial^2 V}{\partial y} = 0, \tag{8}$$

а условия (4) и (6) - к условиям

$$u|_{\nu_1=0} = \varphi_0, \tag{9}$$

$$V|_{\nu_2=0} = \widetilde{\varphi}_0(x), \quad \lim_{\nu_2\to 0}\left(\frac{\nu_2}{1-a_2}\right)^{a_2}\frac{\partial V}{\partial \nu_2} = \widetilde{\varphi}_1(x). \tag{10}$$

Следовательно, для гиперболического уравнения (8) имеем задачу Коши с видоизмененными начальными данными (10), а для уравнения Пуассона (7) задачу Дирихле (9).

Общее решение уравнение (8) из класса $C^2(R^3_+)\cap C(R^3_+\cup R^2)$, представляется в виде (см. [3])

$$V(x,\nu_2) = T_{n,a_2}(f) + \nu_2^{1-a_2}T_{n,2-a_2}(g), \tag{11}$$

где

$$T_{n,a_2}(f) = \frac{1}{\Lambda_{n,a_2}}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{f(x+\xi\nu_2)d\xi}{(1-|\xi|^2)^{\frac{1-n-a_2}{2}}}, \quad \Lambda_{n,a_2} = \int\limits_{|\xi|=1}(1-|\xi|^2)^{-\frac{1-n-a_2}{2}}d\xi,$$

$f(x) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n), g(x) = g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ - произвольные непрерывные функции точек гиперплоскости $\nu_2 = 0$, $|\xi| = 1-$ круг с центром в начале координат и радиусом 1.

Используя представление решения (11) и начальные условия (10), будем иметь

$$V(x,0) = f(x) = \widetilde{\varphi}_0(x),$$

$$(1-a_2)^{1-a_2}g(x) = \widetilde{\varphi}_1(x), \quad g(x) = (1-a_2)^{a_2-1}\widetilde{\varphi}_1(x).$$

Следовательно, начальные условия удовлетворяются и решение задачи (8)-(10) дается формулой

$$V(x,\nu_2) = T_{n,a_2}(\widetilde{\varphi}_0(x)) + \left(\frac{\nu_2}{1-a_2}\right)^{1-a_2}T_{n,2-a_2}(\widetilde{\varphi}_1(x)),$$

или, переходя к переменной $y$, получим

$$V(x,y) = T_{n,a_2}(\widetilde{\varphi}_0(x)) + yT_{n,2-a_2}(\widetilde{\varphi}_1(x)).$$

Теперь представим решение задачи (7)-(9) по известной формуле (см. [4])

$$u(M_0) = \frac{\eta}{2\pi}\int\limits_{R^n}\frac{\varphi_0(x)dx}{[\sum\limits_{i=0}^{n}(x_i-\xi_i)^2+\eta^2]^{3/2}} + \int\limits_{R^{n+1}_+}G(M,M_0)V(M)dM, \tag{12}$$

где $G(M, M_0)$ - функция Грина верхнего полупространства, $M = (x, y)$.

Таким образом имеет имеет место результат.

**Теорема** *Если $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ достаточно гладкие в $R^n$ функции, то задача $K$ однозначно разрешима и ее решение представимо через решение задачи (5)-(6) в виде (12).*

### Литература


1. Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1987, 415 с.
2. Сафаров Д.Х. Неклассические системы уравнений. – Душанбе: Дониш, 2008, 431 с.
3. Раджабов Н.Р. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями. – Душанбе: Изд-во ТГУ им. В.И.Ленина, 1980, часть 1-3, 170 с.
4. Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г. и др. Линейные уравнения математической физики. – М.: Наука, 1964, 367 с.


УДК 517.927

## О некоторых переопределённых системах уравнений в частных производных

Михайлов Л.Г.

**(Институт математики Академии наук Республики Таджикистан )**

***В нашей монографии 1986 г.[1](рецензенты: академик С.М. Никольский и член.- корр. А.В.Бицадзе) были завершены: теория обобщённых аналитических функций многих переменных, а затем также теория сингулярных систем в полных дифференциалах [2]***

$$r^n \cdot U_r' = P\,(r, \varphi)\, r^{n-1} \cdot U_\varphi' = q(r\varphi)$$

***построением для её решений формулы представления***

$$U(r, \phi) = c + \overset{0}{q}_{n-1} \cdot \phi + \overset{0}{p}_{n-1} \cdot \ln r + \ln r + \sum_{k=0}^{n-2} r^{k-(n-1)} \cdot \int_0^\phi q_k(c) d_0 + \sum_{k=0}^{n-2} \overset{0}{p}_{n-1} \cdot r^{k-(n-1)} + V\,(r, \phi)$$

***в которой выделены как многозначное, так и все сингулярные слагаемые.***

### Литература


1. Михайлов Л.Г. Некоторые переопределённые системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. Монография. Душанбе: изд. «Дониш», 1886г.
2. Михайлов Л.Г. О некоторых переопределённых системах уравнений в частных производных с сингулярными точками. Доклады АН РФ, 2004 г., **т. 398**, №2, с.1-4.

***Участникам конференции «Современные проблемы математики и её преподавания»***

***Абулкосиму Мухсинову и другим***

***Фото Умеда Каримова***

***Поздравляю юбиляров с 60 – летием! Вас следует называть молодыми учёными, а потому можно надеяться на Ваши новые научные достижения и открытия. Желаю Вам успехов в науке, в преподавании и в жизни.***

***Академик Л.Г. Михайлов.***

УДК 517. 927

# Невырожденность краевой задачи типа Штурма для одного дифференциального уравнений 4-го порядка

Мустафокулов Р., Солиев С.К.

**(Таджикский национальный университет)**

$1^0$. На отрезке $(a,\, b)$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\left(p\left(x\right)y^{''}\right)^{''}-\left(q\left(x\right)y^{'}\right)^{'}=f\left(x\right)\ \ \left(a\le x\le b\right), \tag{1}$$

где $p\left(x\right)\in C^2_{[a,\,b]}$ $q\left(x\right)\in C^1_{[a,\,b]}$ $f\left(x\right)\in C_{[a,\,b]}$ причем $\inf\limits_{[a,b]} p\left(x\right)>0$, $q\left(x\right)\ge 0$ $\left(q\left(x\right)\not\equiv 0\right)$ при $x\in[a,b]$. Для уравнения (1) мы будем рассматривать краевую задачу, задавая в точках $x=a$, $x=b$ граничные условия типа Штурма

$$\alpha_0 y\left(a\right)+\alpha_3 D_3 y\left(a\right)=0,\ \ \beta_0 y\left(b\right)-\beta_3 D_3 y\left(b\right)=0, \tag{2}$$

$$\alpha_1 y^{'}\left(a\right)-\alpha_2 y^{''}\left(a\right)=0,\ \ \beta_1 y^{'}\left(b\right)+\beta_2 y^{''}\left(b\right)=0. \tag{3}$$

где через $D_3 y\left(\cdot\right)$ обозначена третья квазипроизводная $\left(p\left(\cdot\right)y^{''}\right)^{'}-q\left(\cdot\right)y^{'}$

Относительно коэффициентов краевых условий (2), (3) будем предполагать, что все они неотрицательны, причем $\alpha_i+\alpha_j>0$, $\ \beta_i+\beta_j>0$ при $i+j=3$.

Задача (1) – (3) возникает (см., напр, [1]) при описании малых колебаний натянутого стержня длины $b-a$, при воздействии внешней силы. При этом, коэффициенты $p\left(\cdot\right)$ и $q\left(\cdot\right)$ характеризуют, соответственно, жесткость и натяжение стержня, а $f\left(\cdot\right)$ - интенсивность внешней нагрузки. Краевые условия (2), (3) определяют виды закрепления концов стержня.

В настоящей работе сначала приводятся условия невырожденности (однозначной разрешимости) краевой задачи (1) – (3), затем для уравнения (1) ставится и решается одна нестандартная краевая задача.

**Определение**. Краевая задача $(1)-(3)$ называется *невырожденной*, если она однозначно разрешима при любой правой части $f(x) \in C_{[a,\,b]}$.

Хорошо известным (см. [2]) является следующее утверждение

**Теорема 1**. *Краевая задача* $(1)-(3)$ *является невырожденной тогда и только тогда, когда соответствующая однородная задача* $(f(x) \equiv 0)$ *имеет только тривиальное (нулевое) решение.*

Теорема 1 не обосновывает невырожденность краевой задачи, а сводит её к исследованию однородной задачи.

Рассмотрим однородное уравнение

$$\left(p(x)\, y''\right)'' - \left(q(x)\, y'\right)' = 0 \quad (a \le x \le b) \tag{4}$$

и установим сначала одно свойство решения $y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее только двум граничным условиям (3).

Пусть $y(x) \not\equiv const$ является решением уравнения (4), удовлетворяющее условиям (3). Обозначим $y'(x) = u(x)$. Тогда из уравнения (4) получим

$$\left(p(x)\, u'\right)' - q(x)\, u \equiv c \qquad (c - const)$$

**Лемма 1**. Если $c \ne 0$, то $u(x)$ *сохраняет строгий знак на промежутке* $(a,\, b)$, *противоположный знаку числа* $c$; если же $c = 0$, то $u(x) \equiv 0$ $(a \le x \le b)$.

Из этой леммы в силу $u(x) = y'(x)$ следует

**Теорема 2**. *Всякое решение* $y(x)$ *уравнения* (4), *удовлетворяющее граничным условиям* (3), *либо постоянно, либо строго монотонно, причем возрастает (убывает) на* $(a, b)$ *тогда и только тогда, когда* $D_3 y(x) \equiv c < 0 \ (> 0)$.

**Замечание.** Если в уравнении (1) коэффициент $q(x) \equiv 0$ $(a \le x \le b)$, то утверждение теоремы 2 остаётся справедливым лишь в случае, когда в граничных условиях (3) коэффициенты $\alpha_1 \cdot \beta_1 > 0$. Если же $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, то решением уравнения (4) будем любая линейная функция, однако уточнить направление монотонности в этом случае невозможно.

Из теоремы 2 следует следующий *принцип максимума:*

**Теорема 3**. *Пусть коэффициенты уравнения (4) и граничных условий (3) удовлетворяют условиям:* $\inf\limits_{[a,b]} p(x) > 0$, $q(x) \ge 0$ при $x \in (a, b)$; $\alpha_i, \beta_i \ge 0$ *причем* $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$, $\beta_1 + \beta_2 > 0$, *а если* $q(x) \equiv 0$ $(a \le x \le b)$, то $\alpha_1 \cdot \beta_1 > 0$. *Тогда решение* $y(x) \not\equiv const$ *уравнения (4), удовлетворяющее граничным условиям (3), достигает своего экстремума только на концах промежутка* $(a, b)$.

Рассмотрим теперь уравнение (4) вместе с четырмя граничными условиями (2), (3). Покажем, что однородная краевая задача $(4)-(2)$, (3) имеет в $(a, b)$ только тривиальное решение.

Действительно, в силу теоремы 3 решение $y(x) \not\equiv const$ уравнения (4), удовлетворяющее двум граничным условиям (3), является строго монотонной функцией на промежутке $(a, b)$ и принимает свои экстремумы в граничных точках $x = a$, и $x = b$.

Пусть, например $D_3 y(x) \equiv c > 0$. Тогда, в силу теоремы 2, $y(x)-$ монотонно убывающая на $(a, b)$ функция, поэтому $y(a) = y_{max}$ и $y(b) = y_{min}$. Но, из граничных условий (2) имеем $y(a) \le 0$ и, соответственно, $y(b) \ge 0$. Поэтому $y_{max} = y_{min} = 0$, т.е. $y(x) \equiv 0$ при $x \in [a,\, b]$.

Аналогично показывается, что при $D_3 y(x) \equiv c < 0$ также $y(x) \equiv 0 \quad (a \le x \le b)$.

Пусть теперь $D_3 y(x) \equiv 0$. Тогда в силу теоремы 2 имеем, что $y(x) \equiv const$, если $q(x) \not\equiv 0$, или, если $q(x) \equiv 0$, то $\alpha_1 \cdot \beta_1 > 0$. Из граничных условий (2) в этом случае имеем $\alpha_0 y(a) = 0$ и, соответственно, $\beta_0 y(b) = 0$. Отсюда, если $\alpha_0 + \beta_0 > 0$, то $y(a) \cdot y(b) = 0$, следовательно, $y(x) \equiv 0$ при $x \in (a,\, b)$.

Таким образом, однородная краевая задача (4) – (2), (3) имеет в $(a, b)$ только нулевое решение. Отсюда, в силу теоремы 1 следует

**Теорема 4**. *Пусть* $\inf\limits_{[a,b]} p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ $(q(x) \not\equiv 0)$ *при* $x \in (a, b)$; $\alpha_i \beta_i \geq 0$ *причем* $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$, $\beta_1 + \beta_2 > 0$. *Тогда краевая задача* (1) – (3) *является невырожденной.*

**Замечание**. Утверждение теоремы 4 остаётся справедливым, если $q(x) \equiv 0$ $(a \leq x \leq b)$, но, при этом, $\alpha_1 \cdot \beta_1 > 0$ и $\alpha_0 + \beta_0 > 0$, или же $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ и $\alpha_0 \cdot \beta_0 > 0$.

$2^0$. В настоящем пункте рассмотрим одну нестандартную краевую задачу для уравнения (1), которая возникает, например, при описании упругих колебаний натянутой цепочки шарнирно сочлененных стержней.

Пусть $(b_1, b_2)$ - интервал числовой оси $R^1$ и $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}\}$ - некоторая упорядоченная совокупность точек из этого интервала. Обозначим $\gamma_i = (a_{i-1}, a_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m; a_0 = b_1$, $a_m = b_2)$ и $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{m} \gamma_i$. Рассмотрим на $\Gamma$ следующую краевую задачу: на $\Gamma$ задано дифференциальное уравнение (1), в точках множества $A$ заданы условия связи

$$y''(a_i - 0) = y''(a_i + 0) = 0, \tag{5}$$

$$D_3 y(a_i - 0) - D_3 y(a_i + 0) - k(a_i) y(a_i) = 0 \, (a_i \in A), \tag{6}$$

а в точках $b_1$ и $b_2$ – граничные условия типа (2), (3):

$$\alpha_0 y(b_1) + \alpha_3 D_3 y(b_1) = 0, \beta_0 y(b_2) - \beta_3 D_3 y(b_2) = 0, \tag{7}$$

$$\alpha_1 y'(b_1) - \alpha_2 y''(b_1) = 0, \beta_1 y'(b_2) + \beta_2 y''(b_2) = 0. \tag{8}$$

Относительно коэффициентов уравнения (1), условий связи (5) (6) и граничных условий (7) (8) будем предполагать выполнения следующих условий (далее называемых *условиями знакорегулярности* коэффициентов ):

$-p(x) \in C^{(2)}(\Gamma)$, $q(x) \in C^{(1)}(\Gamma)$, $f(x) \in C(\Gamma)$; $\inf\limits_{\Gamma} p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ на $\Gamma$;

$-q(a_i) \geq 0, k(a_i) \geq 0$ при $a_i \in A$; $-\alpha_i, \beta_i \geq 0$, причем $\alpha_i + \alpha_j > 0, \beta_i + \beta_j > 0$ при $i + j = 3$.

Отметим, что условия знакорегулярности коэффициентов определяются физическим смыслом задачи (см. [3]), которые означают регулярность дифференциальных выражений на множествах Г и А, а также невырожденность краевых условий в граничных точках $b_1$ и $b_2$.

Задача (1), (5) – (8) для случая геометрического графа $\Gamma$ была изучена в [3]. Ниже же эту задачу мы изучим для случая одномерного графа $\Gamma$, при граничных условиях более общего вида.

Вопрос о невырожденности нестандартной краевой задачи (1), (5) – (8) можно свести к вопросу о невырожденности обычной краевой задачи для систем дифференциальных уравнений, заданных на $\gamma_i$. Поэтому, как и в обычном случае, нестандартная задача (1), (5) – (8) невырождена тогда и только тогда, когда соответствующая однородная задача $(f(x) \equiv 0)$ имеет только тривиальное решение.

Рассмотрим на множестве $\Gamma$ однородное уравнение (4). Пусть $y(x) \not\equiv const$ является решением уравнения (4), удовлетворяющее в точках множества $A$ условиям (5), а в граничных точках $b_1$ $b_2$ условиям (8). Из теоремы 2 следует что $y(x)$ является монотонной функцией на каждом интервале $\gamma_i$ из $\Gamma$. Поведения решения $y(x)$ в точках множества $A$ определяет следующее утверждение.

**Лемма 2**. *Пусть* $y(x)$ *в точках множество* $A$ *удовлетворяет условиям* (6). *Тогда, если* $q(x) \not\equiv 0$ $(x \in \Gamma)$ *или же* $q(x) \equiv 0$ *на* $\Gamma$, *но* $q(a_i) \neq$ *для всех* $a_i \in A$, то $y(x)$ *не имеет экстремума в тех точках* $a_i \in A$, *где* $k(a_i) = 0$, *а в тех точках* $a_i \in A$, $k(a_i) \neq 0$, *может иметь лишь отрицательный максимум или положительный минимум. Если же* $q(x) \equiv$ *на* $\Gamma$ *и* $q(a_i) = 0$ *для всех* $a_i \in A$, *то* $y(x)$ *не имеет экстремума в точках* $a_i \in A$, *где* $k(a_i) \neq 0$.

**Замечание**. Если в условиях леммы 2 допустить $q\,(x) \equiv 0\,(x \in \Gamma)$, $q\,(a_i) = 0$ и $k\,(a_i) = 0$ для всех $a_i \in A$, то $y\,(x)$ может иметь экстремумы в точках $a_2, \ldots, a_{m-2}$, а в точках $a_1$ и $a_{m-1}$ только в том случае, когда в условиях (8) коэффициенты $\alpha_1 = 0$ и, соответственно $\beta_1 = 0$.

Таким образом, из теоремы 2 и леммы 2 следует следующий *принцип максимума* для решений уравнения (4) на Г:

*решение* $y\,(x) \not\equiv const$ *уравнения* (4), *удовлетворяющее в точках множество* $A$ *условиям* (5) и (6), *а в граничных точках* $b_1, b_2$ *двум условиям* (8), *при выполнении условий леммы 2 достигает своею экстремума только на концах промежутка* $(b_1, b_2)$.

Аналогично теореме 4, на основании этого принципа максимума можно доказать невыраженность краевой задачи (1), (5) – (8) на Г.

**Теорема 5**. *Пусть задача* (1), (5) – (8) *обладает свойством знакорегулярности. Тогда, если* $q\,(x) \not\equiv 0$ на Г, *или же если* $q\,(x) \equiv 0$, то $q\,(a_i) + k\,(a_i) > 0$ $(a_i \in A)$, *а также при* $\alpha_1 \cdot \beta_1 > 0$ *выполняется* $\alpha_0 + \beta_0 > 0$, а при $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ *имеет место* $\alpha_0 \cdot \beta_0 > 0$, *то краевая задача является невырожденной на* Г.

**Замечание**. Если в условиях теоремы 5 коэффициенты $q\,(a_i) = k\,(a_i) = 0$ при всех $a_i \in A$ и $m > 3$, то задача (1), (5) – (8) является вырожденной и размерность пространства её решений равна $m - 1$.

### Литература


1. Гантмахер Ф. Р., Крейн М.Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
2. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений – М.:ИЛ, 1958.
3. Мустафокулов Р. // Докл. АНРТ, т. 38,№1-2 (1995), с 59-65.


УДК 517.925.44

## Оценка порядка роста одного семейства функций методом дифференциальных уравнений

Мухамадиев Э., Наимов А.Н.

**(Вологодский государственный университет, Россия)**

В настоящей работе рассматривается вопрос об оценке порядка роста семейства функций, задаваемых формулой

$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k}{(k!)^2} t^k, \quad t \in (-\infty, +\infty), \tag{1}$$

где $d$ - комплексный параметр. Данный вопрос возникает при выводе представления ограниченных на всей плоскости решений гиперболических уравнений вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + a\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + b\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + cu(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in R^2,$$

с постоянными комплексными коэффициентами $a$, $b$, $c$. Для того, чтобы обосновать представление ограниченных решений, необходимо точно оценить порядок роста $|z(t)|$ при больших положительных $t$ и всевозможных значениях комплексного параметра $d$. Такую оценку можно получить, если находить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $z(t)$, и оценить порядок роста решений дифференциального уравнения.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема**. *Для любого ненулевого комплексного числа* $d = |d|\exp(i\theta)$ *существует положительное число* $M = M(d)$ *такое, что при всех* $t \geq 1$ *верно неравенство*

$$|z(t)| \leq \frac{M}{\sqrt[4]{t}} e^{\alpha\sqrt{t}}, \tag{2}$$

*где* $\alpha = 2\sqrt{|d|}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$.

**Доказательство**. Функция $z(t)$ определена и бесконечно дифференцируема на промежутке $(-\infty, +\infty)$, и является решением дифференциального уравнения

$$tz''(t) + z'(t) - dz(t) = 0. \tag{3}$$

Действительно, находя производных первого и второго порядков функции $z(t)$

$$z'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^k}{k!(k-1)!} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^{k+1}}{k!(k+1)!} t^k,$$

$$z''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d^k}{k!(k-2)!} t^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^{k+1}}{(k-1)!(k+1)!} t^{k-1},$$

имеем:

$$dz(t) - z'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^{k+1}}{k!} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) t^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^{k+1}}{(k-1)!(k+1)!} t^k = tz''(t).$$

В уравнении (3) произведем следующую замену:

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t}} u(\sqrt{t}), \quad t > 0. \tag{4}$$

Для этого сперва вычислим производных функции $z(t)$:

$$z'(t) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{t}}\right)' u(\sqrt{t}) + \frac{1}{\sqrt[4]{t}}\Big(u(\sqrt{t})\Big)' = -\frac{1}{4} t^{-5/4} u(\sqrt{t}) + \frac{1}{2} t^{-3/4} u'(\sqrt{t}),$$

$$z''(t) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{t}}\right)'' u(\sqrt{t}) + 2\left(\frac{1}{\sqrt[4]{t}}\right)' \Big(u(\sqrt{t})\Big)' + \frac{1}{\sqrt[4]{t}}\Big(u(\sqrt{t})\Big)'' =$$

$$= \frac{5}{16} t^{-9/4} u(\sqrt{t}) + 2\frac{-1}{4} t^{-5/4} \frac{1}{2} t^{-1/2} u'(\sqrt{t}) + \frac{1}{4} t^{-5/4} u''(\sqrt{t}) - \frac{1}{4} t^{-7/4} u'(\sqrt{t}),$$

$$tz''(t) = \frac{5}{16} t^{-5/4} u(\sqrt{t}) - \frac{1}{2} t^{-3/4} u'(\sqrt{t}) + \frac{1}{4} t^{-1/4} u''(\sqrt{t}).$$

Эти значения $z'(t)$, $z''(t)$ и $z(t)$ подставляя в (3) получим:

$$\frac{1}{4} t^{-1/4} u''(\sqrt{t}) + \left(\frac{1}{16} t^{-5/4} - dt^{-1/4}\right) u(\sqrt{t}) = 0.$$

Отсюда, поделив на $t^{-1/4}/4$ и вводя обозначение $s = \sqrt{t}$, для функции $u(s)$ получаем равенство

$$u''(s) + \left(-4d + \frac{1}{4s^2}\right) u(s) = 0, \quad s > 0. \tag{5}$$

Пусть $4d = (\alpha + i\beta)^2$, где $\alpha \geq 0$. Тогда

$$\pm(\alpha + i\beta) = \pm 2\sqrt{|d|}e^{i\theta/2}, \quad \alpha = 2\sqrt{|d|}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|,$$

а равенство (5) можно переписать в следующем виде:

$$u''(s) - (\alpha + i\beta)^2 u(s) = -\frac{1}{4s^2}u(s), \quad s > 0.$$

Данное равенство равносильно интегральному равенству

$$u(s) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)s} + C_2 e^{-(\alpha+i\beta)s} + \frac{1}{8(\alpha + i\beta)}\int_1^s \left(e^{-(\alpha+i\beta)(s-\tau)} - e^{(\alpha+i\beta)(s-\tau)}\right)\frac{u(\tau)}{\tau^2}d\tau,$$

где комплексные числа $C_1$ и $C_2$ однозначно определяются функцией $u(s)$. Для функции $v(s) = u(s)\exp(-\alpha s)$ при $s \geq 1$ имеем:

$$v(s) = C_1 e^{i\beta s} + C_2 e^{-(2\alpha+i\beta)s} + \frac{1}{8(\alpha + i\beta)}\int_1^s \left(e^{-(2\alpha+i\beta)(s-\tau)} - e^{i\beta(s-\tau)}\right)\frac{v(\tau)}{\tau^2}d\tau,$$

$$|v(s)| \leq M_0 + m\int_1^s \frac{1}{\tau^2}|v(\tau)|d\tau,$$

по лемме Гронуолла

$$|v(s)| \leq M_0 e^{m\int_1^s \frac{d\tau}{\tau^2}} = M_0 e^{m(1-1/s)} \leq M.$$

Отсюда выводим:

$$|u(s)| \leq Me^{\alpha s}, \quad s \geq 1,$$

$$|u(\sqrt{t})| \leq Me^{\alpha\sqrt{t}}, \quad t \geq 1,$$

$$|z(t)| = \frac{|u(\sqrt{t})|}{\sqrt[4]{t}} \leq \frac{M}{\sqrt[4]{t}}e^{\alpha\sqrt{t}}, \quad t \geq 1,$$

т.е. имеет место неравенство (2). Теорема доказана.

УДК 517.91

# Об устойчивости особой точки кусочно-линейных уравнений второго порядка

Мухамадиев Э.М.*, Нуров И. Д.**, Арабов М. К.***

**(*Вологодский государственный технический университет, г. Вологда)**
**(**Российско-Таджикский (славянский) университет г. Душанбе)**
**(***Институт математики им. А. Джураева АН РТ, Душанбе)**

Негладкие эффекты имеют важное значение в различных разделах физики, механики, биологии, экономики и т.д. [2,3,5]. Функционирование системы с негладкими элементами, как правило, зависит от одного или нескольких параметров. Изменение каких-либо параметров может влиять на структуру решений в целом, или переводить систему из одного состояния в другое. Следует отметить, что модели негладких систем [1,4,6] описываются посредством дифференциальных уравнений с негладкими, релейными или гистерезисными нелинейностями.

Задачи исследования устойчивости состояний равновесий в негладких динамических системах, как правило, достаточно сложны, и поэтому при их исследовании эффективным представляется применение стандартных пакетов, либо параллельно построение собственной программы. Следовательно, актуальными будут разработка программы и компьютерное моделирование поведение решений в окрестностях особых точек, предельных циклов(если они имеются) негладких (модельных и кусочно-линейных) динамических систем.

Настоящая работа посвящена исследованию общих кусочно - линейных уравнений второго порядка

$$y'' + ay' + by + c|y - \lambda| = 0, \tag{1}$$

где $a, b, c$ - вещественные числа, а $\lambda$ - скалярный параметр.

**Кусочно - линейное уравнение.** Рассмотрим кусочно-линейное уравнение второго порядка

$$y'' + ay' + by + c|y| = 0, \tag{2}$$

где $a, b, c$ -любые вещественные числа. Уравнение (2) "склеивается"из двух линейных уравнений

$$y'' + ay' + (b + c)y = 0, \quad \texttt{если} \quad y > 0 \tag{3}$$

и

$$y'' + ay' + (b - c)y = 0, \quad \texttt{если} \quad y \leq 0. \tag{4}$$

В свою очередь уравнение (2) эквивалентно системе

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -ax_2 - bx_1 - c|x_1|, \end{cases} \tag{5}$$

Подробно остановимся на изучении поведения траектории кусочно-линейной системы (5). Обозначим через $\mu_1^\pm$ и $\mu_2^\pm$ корни характеристического уравнения

$$\mu^2 + a\mu + (b \pm c) = 0, \tag{6}$$

соответствующего уравнениям (3) и (4):

$$\mu_1^\pm = -\frac{1}{2}\left\{a - \sqrt{a^2 - 4(b \pm c)}\right\}, \qquad \mu_2^\pm = -\frac{1}{2}\left\{a + \sqrt{a^2 - 4(b \pm c)}\right\}. \tag{7}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $(b \pm\ c) \neq 0$. Рассмотрим некоторые возможные случаи поведения траектории системы (5) в фазовой плоскости.

**Случай 1.** $0 < b + c \leq \frac{a^2}{4}, \quad 0 < b - c \leq \frac{a^2}{4}$. В терминах корней характеристических уравнений (6) эти условия эквивалентны тому, что все корни $\mu_1^+, \mu_2^+$ вещественны и одного знака, противоположного знаку коэффициента . Все полупрямые $x_2 = \mu_2^+ x_1, x_2 = \mu_1^+ x_1$ $x_1 > 0$, $x_2 = \mu_2^- x_1$, $x_2 = \mu_1^- x_1$, $x_1 < 0$ являются траекториями системы (5).

Траектории, проходящие через точки сектора, образованного этими полупрямыми, оставаясь в этих секторах при $t \to \infty$, приближаются к особой точке (0,0), если a>0 и удаляются от неё при a<0.

В этом случае особую точку (0,0) назовём узлом; устойчивым узлом при a>0 и неустойчивым узлом если a<0.

**Случай 2.** $b - c < 0 < \frac{a^2}{4} < b + c$ или $b + c < 0 < \frac{a^2}{4} < b - c$. В первом случае корни $\mu_{1,2}^-$ вещественны, разного знака а корни $\mu_{1,2}^+ = \alpha + i\beta-$ комплексны, а во втором случае наоборот: $\mu_{1,2}^- = \alpha + i\beta-$ комплексные, $\mu_{1,2}^+$ вещественны, разного знака.

В этом случае индекс особой точки равен нулю (индекс Пуанкаре). Поэтому особая точка неустойчивая и она может исчезнуть при малых возмущениях.

**Случай 3.** $0 < b - c \le \frac{a^2}{4} < b + c$, или $0 < b + c \le \frac{a^2}{4} < b - c$. Это означает, что либо $\mu^{-}_{1,2}$ вещественны, одного знака, а $\mu^{+}_{1,2} = \alpha \pm i\beta -$ комплексные числа, либо $\mu^{-}_{1,2} = \alpha \pm i\beta -$ комплексны, а $\mu^{+}_{1,2}$ вещественны и одного знака. Все траектории при $t \to +\infty$ приближаются к особой точке (0,0), если a>0 и удаляются в бесконечность, если a<0.

В этом случае особую току (0,0) назовём устойчивым узлом, если a>0 и неустойчивым узлом если a<0.

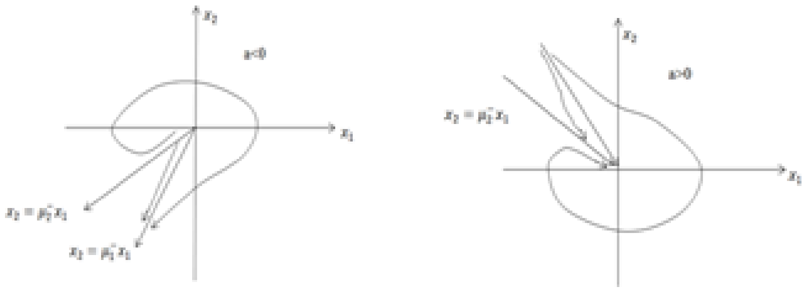



Рис. 1.

**Случай 4.** $b+c > \frac{a^2}{4}$, и $b-c > \frac{a^2}{4}$. Это означает, что корни $\mu^{+}_{1,2}$ и $\mu^{-}_{1,2}$ характеристических уравнений (6) комплексные.

Схематически фазовый портрет траекторий системы (5) показан на рис. 2.

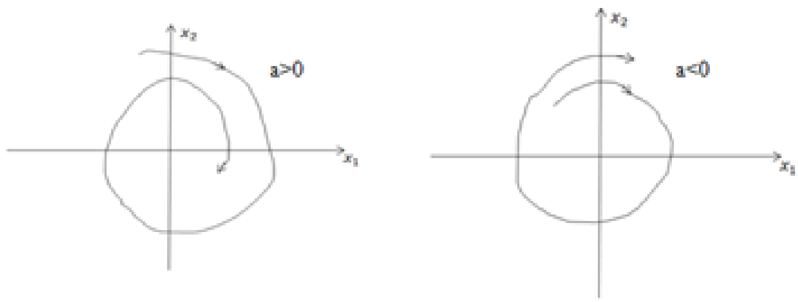



Рис. 2.

**Стационарные решения кусочно-линейного дифференциального уравнения второго порядка, зависящего от параметра**. Рассмотрим кусочно-линейное дифференциальное уравнение

$$y'' + ay' + by + c|y - \lambda| = 0, \tag{8}$$

где коэффициенты $a, b, c$ и параметр $\lambda$ вещественные числа. Вводя обозначения $x_1 = y$, $x_2 = y'$ из уравнения (8), перейдем к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -ax_2 - bx_1 - c|x_1 - \lambda|. \end{cases} \tag{9}$$

Стационарные решения (особые точки) системы (9) лежат на прямой $(x_1, 0), x_1 \in R$ и определяются как решение уравнения

$$bx_1 + c|x_1 - \lambda| = 0 \tag{10}$$

Если $b = c = 0$, то вся прямая $(x_1, 0), x_1 \in R)$ состоит из особых точек системы (9), если же $b \ne 0)$ и $c = 0$ или $b = 0$ и $c \ne 0)$, то система (9) имеет единственную особую точку (0,

0) или $(\lambda, 0)$ соответственно. Если $b = c \neq 0$, то уравнение (10) не имеет решения при $\lambda > 0$, имеет единственное решение $x_1 = \lambda/2$ при $\lambda < 0$ и имеет бесконечное множество $(-\infty, 0]$ решений при $\lambda = 0$. Аналогично, если $b = -c \neq 0$, то уравнение (10) не имеет решения при $\lambda < 0$, имеет единственное решение $x_1 = \lambda/2$ при $\lambda > 0$ и имеет бесконечное множество $[0, +\infty)$ решений при $\lambda = 0$.

**Лемма 1.** Пусть $b \cdot c \cdot (b^2 - c^2) \neq 0$. Тогда

a) если $\lambda = 0$, то система (9) имеет единственную нулевую особую точку (0,0) ;

б) если $\lambda > 0$ то система (9) имеет единственную особую точку $(\frac{c\lambda}{c-b}, 0)$ при $|c| < |b|$, две особые точки $(\frac{c\lambda}{c-b}, 0)$ $(\frac{c\lambda}{c+b}, 0)$ при $|b| < |c|, \quad b \cdot c < 0$ и не имеет особую точку при $|b| < |c|, \quad b \cdot c > 0$;

с) если $\lambda < 0$, то система (9) имеет единственную особую точку $(\frac{c\lambda}{c+b}, 0)$ при $|c| < |b|$, две особые точки $(\frac{c\lambda}{c-b}, 0)$, $(\frac{c\lambda}{c+b}, 0)$ при $|b| < |c|, \quad b \cdot c > 0$ и не имеет особую точку при $|b| < |c|, \quad b \cdot c < 0$

**Доказательство.** Если $\lambda = 0$, то очевидно, уравнение (10) имеет нулевое решение $x_1 = 0$. Единственность нулевого решения следует из условии $|b| \neq |c|$. Утверждение а) доказано.

Разбивая числовую прямую на подмножества $(-\infty, \lambda)$, $[\lambda, +\infty)$ , где $x_1 - \lambda$ сохраняет знак, и освобождаясь от знака модуля, уравнение (10) перепишем в виде

$$(b - c)x_1 + c\lambda = 0 \qquad \text{при} \quad x_1 < \lambda, \tag{11}$$

$$(b + c)x_1 - c\lambda = 0 \qquad \text{при} \quad x_1 \geq \lambda. \tag{12}$$

Пусть $\lambda > 0$ и $|c| < |b|$. Так как $(1 - t)^{-1} < 1$ при $|t| > 1$, то число $\frac{c}{c-b} = \frac{1}{1-b/c} < 1$. Поэтому число $x_1 = \frac{c\lambda}{c-b}$ удовлетворяет неравенству $x_1 < \lambda$ и является решением линейного уравнения (11). Следовательно, $x_1 = \frac{c\lambda}{c-b}$ является решением уравнения (10). Единственность решения следует из того, что в полупрямой $x_1 \leq \lambda_1$ уравнение (**??**) не имеет решения в силу неравенства $(1 + t)^{-1} < 1$ при $|t| > 1$.

Если $\lambda > 0$ и $|c| < |b|$ и $bc > 0$, то в силу неравенства $(1 + t)^{-1} > 1$, $(1 - t)^{-1} < 1$ при $-1 < t < 0$ для чисел $\frac{c\lambda}{c-b}, \frac{c\lambda}{c+b}$ следует $\frac{c\lambda}{c-b} = \frac{\lambda}{1-b/c} < \lambda$, $\frac{c\lambda}{c+b} = \frac{\lambda}{1+b/c} > \lambda$,

Отсюда следует, что число $\frac{c\lambda}{c-b}$ является единственным решением уравнения (11), а $\frac{c\lambda}{c+b}$ является единственным решением уравнения (12).

Если $\lambda > 0$, $|c| > |b|$ и bc<0, то справедливы неравенства

$$\frac{c\lambda}{c - b} = \frac{\lambda}{1 - \frac{b}{c}}\lambda > \lambda, \frac{c\lambda}{c + b} = \frac{\lambda}{1 + \frac{b}{c}}\lambda < \lambda.$$

Эти неравенства доказывают, что уравнения (11), (12) не имеют решения. Следовательно, уравнение (10) не имеет решение. Утверждение б) доказано.

Аналогично выказывается утверждение с).

Лемма доказана.

## Литература

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. - Матем. сборник,1966,51,РЖМат, 960,317 с.
2. Баутин Н.Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Наука, М., 1976, 496 с.
3. Leine R.I.,Van Campen D.H.- European Journal of Mechanigs A/Solids 2006 25,pp.595-616.
4. Мухамадиев Э.М., Нуров И.Д., Халилова М.Ш. Предельные циклы кусочно- линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Уфимский математический журнал. Том 5. №4(2013). С. 74-84.

5. Синай Я.Г. Теория фазовых переходов. М.: Наука, с. 207, 1980г.
6. Нуров И.Д. Халилова М.Ш. Арабов М.К. Метод Рунге-Кутта в задаче исследования бифуркациии негладких динамических систем. Доклад АН РТ Том 55, № 12, 960-964, 2012г.

УДК 517.917

## О разрешимости периодической краевой задачи для систем линейных дифференциальных уравнений

Мухамадиев Э.М.[†], Собиров М.К.[‡]

**([†]Вологодский государственный университет, Россия)**
**([‡]Институт экономики и демографии АН РТ, Душанбе.)**

Рассмотрим периодическую краевую задачу для систем линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} + Ax = f(t) \quad 0 < t < 2\pi \tag{1}$$

$$x(0) = x(2\pi), \tag{2}$$

где $A$ - квадратная матрица порядка $n$ с комплексными элементами $a_{kj}$, $kj = 1, 2, \ldots, n$; $f(t)$ – непрерывная комплекснозначная вектор - функция.

Сначала рассмотрим некоторые известные свойства задачи (1)-(2). Общее решение уравнения (1) имеет вид [1]

$$x(t) = e^{-At}x_0 + \int\limits_0^t e^{-A(t-s)} f(s)\, ds, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

где $x_0$- произвольный вектор. Следовательно, $x(t)$ является решением краевой задачи (1)-(2) тогда и только тогда, когда вектор $x_0$ удовлетворяет условию $x(0) = x(2\pi)$, т.е.

$$\left(e^{2\pi A} - I\right) x_0 = \int\limits_0^{2\pi} e^{As} f(s)\, ds \tag{3}$$

где $I$ – единичная матрица порядка $n$.

Отсюда следует, что задача (1)-(2) имеет единственное решение для любой функции $f(t)$, принадлежащей пространству всех непрерывных комплекснозначных функций $C[0, 2\pi]$ тогда и только тогда, когда единица не является собственным значением матрицы $e^{2\pi A}$, т.е. спектр $\sigma(A)$ матрицы $A$ не содержит мнимые числа вида $i \cdot m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ . Таким образом справедлива

**Теорема 1.** *Пусть спектр $\sigma(A)$ матрицы $A$ не содержит мнимые числа вида $i \cdot m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ . Тогда задача (1)-(2) при любой $f \in C[0, 2\pi]$ имеет единственное решение.*

Изучим множество векторов, стоящих в правой части уравнения (3), когда функция $f \in C[0, 2\pi]$ является кусочно-линейной функций вида

$$f(t) = \eta(2\pi - t, \delta) \cdot h \tag{4}$$

где $h \in C^n$- вектор, который не зависит от $t$, а скалярная функция $\eta(t\delta)$ при $0 < \delta \leq \pi$ определяется формулой

$$\eta\left(t,\delta\right) = \begin{cases} \delta - \left|t-\delta\right|, & \text{если } 0 \leq t \leq 2\delta, \\ 0, & \text{если } 2\delta < t < 2\pi. \end{cases}$$

**Лемма 1.** *Если матрица $A$ и число $\delta \in (0,\pi)$ удовлетворяют условию*

$$\delta \left\|A\right\| e^{2\delta\|A\|} < 1, \tag{5}$$

*$f\left(t\right)$ имеет представление (4) $h \in C^n$, то множество векторов в правой части уравнения (3) совпадает со всем пространством $C^n$*

**Теорема 2.** *Пусть число $\delta \in (0,\pi)$ удовлетворяет условию (5) (1)-(2) имеет решение для любой функции $f$, представленной в виде (4). Тогда спектр $\sigma\left(A\right)$ матрицы $A$ не содержит числа вида $i \cdot m$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.*

Наряду с задачей (1)-(2) (см., напр. [2]) рассмотрим возмущенную краевую задачу вида

$$\frac{dy}{dt} + Ay + \varepsilon By = f\left(t\right), \;\; 0 < t < 2\pi, \tag{6}$$

$$y\left(0\right) = y(2\pi), \tag{7}$$

где $B$ - заданная квадратная матрица порядка $n$ с комплексными элементами $b_{kj}$, $kj = 1,2,\ldots,n$ , а $\varepsilon$- комплексное число (малый параметр).

По аналогии с линейными алгебраическими уравнениями [3], будем говорить, что семейство задач (5)-(6) является регуляризацией сдвигом задачи (1)-(2), если

а) для всех функций $f$ из пространства непрерывных вектор - функций $[0,2\pi]$ задача (5)-(6) имеет единственное решение $y_f(t\varepsilon)$ при достаточно малых $|\varepsilon| > 0$;

б) если задача (1)-(2) разрешима, то решение $y_f(t\varepsilon)$ задачи (5)-(6) при $\varepsilon \to 0$ равномерно сходится к некоторому решению $x_f(t)$ задачи (1)-(2) и

$$\lim_{\varepsilon\to0} \left\|y_f\left(t,\varepsilon\right) - x_f(t)\right\|_{C[0,2\pi]} = \lim_{\varepsilon\to0} \max_{0\leqslant t\leqslant2\pi} \left|y_f\left(t,\varepsilon\right) - x_f(t)\right| = 0.$$

**Лемма 2.** . *Пусть спектр $\sigma(A)$ матрицы $A$ не содержит мнимые числа вида $i \cdot m$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$*

$$M = max \left\{ \left\|(i \cdot m \cdot I + A)^{-1}\right\| : m = 0, \pm1, \pm2, \ldots \right\} .$$

*Тогда для любой ненулевой матрицы $B$ и числа $\varepsilon$, удовлетворяющего условиям*

$$0 < \varepsilon < \left(M\left\|B\right\|\right)^{-1}, \tag{8}$$

спектр *$\sigma(A + \varepsilon B)$ матрицы $A + \varepsilon B$ также не содержит мнимые числа вида $i \cdot m$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.*

**Теорема 3.** *Пусть спектр $\sigma\left(A\right)$ матрицы $A$ не содержит мнимые числа вида $i \cdot m$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Тогда семейство задач (6)-(7) является регуляризацией сдвигом задачи (1)-(2) и, более того, для любой ненулевой матрицы $B$ и числа $\varepsilon$, удовлетворяющих условиям* (8) задача (6)-(7) *имеет решение и для решений $x_f(t), y_f(t\varepsilon)$* задачи (1)-(2), (6)-(7), *соответственно справедлива оценка*

$$\left\|y_f\left(t,\varepsilon\right) - x_f(t)\right\|_{C[0,2\pi]} \leq M_1 \left|\varepsilon\right|,$$

*где постоянное $M_1$ зависит от матриц $A$* и *$B$.*

**Литература**

1. А.Ф. Филиппов. Введение в теорию дифференциальных уравнений. УРСС, 2004. – 240 с.
2. А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. – 288 с.
3. А. Б. Назимов, Э. М. Мухамадиев, В. В. Морозов, М. Муллоджанов. Метод регуляризации сдвигом. Теория и приложения. Вологда: ВоГТУ, 2012. – 368 с.


УДК 517.95

## Многомерное дифференциальное уравнения с сингулярной точкой, линией и сингулярной плоскостью


Мухсинов А.

**(Худжандский государственный университет им. ак. Б. Гафурова)**


**Введение**. Проблемы суммируемости и сходимости разложений по собственным функциям дифференциальных операторов давно привлекают внимание математиков и физиков и этим проблемам посвящено достаточно много работ. Ее бурное развитие связано с работами О.А.Ладыженской, В.А.Ильина, Э.Ч.Титмарша, Ю.М.Березанского, И.К.Кенджаева, Х.Л.Смолицкого, А.Н.Боголюбова, Б.М.Левитана, В.В.Кравцова, М. Исматова и других (см., например, [8] и имеющуюся там библиографию).

Так называемый регулярный случай задачи суммируемости и сходимости разложений по собственным функциям дифференциальных операторов, соответствующий конечному отрезку и непрерывным коэффициентам уравнения, изучен уже сравнительно давно и обычно подробно излагается в руководствах по уравнениям математической физики и интегральным уравнениям. Значительно меньше широкому кругу математиков известна задача суммируемости и сходимости разложений по собственным функциям вырождающихся (сингулярных) дифференциальных операторов так называемого сингулярного случая, в котором не выполняется одно или оба условия регулярного случая.

После работы М. В. Келдыша 1951 г. и монографий 1966 г. М. М. Смирнова и А.В. Бицадзе вырождающиеся уравнения приобрели значительную актуальность.

Этой тематикой занимались многие авторы, в том числе Никольский С.М., Лизоркин П.И., Кудрявцев Л.Д., Мирошин Н.В., Михайлов Л. Г., Джураев А., Усманов З.Д., Раджабов Н.Р. и др.

В связи с выше сказанным представляет интерес исследования многообразия решений и разрешимости краевых задач для следующих сингулярных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$-r^2\Delta_m U + q^2 U = f(x), \tag{1}$$

$$-r^2\Delta_{m+1} U + q^2 U = f(x,z), \tag{2}$$

$$-z^2\Delta_{m+1} U + p^2 U = f(x,z), \tag{3}$$

$$-\Delta_{m+1} U + \left(\frac{q^2}{r^2} + \frac{p^2}{z^2}\right) U = f(x,z), \tag{4}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_m) \in R^m$, $m \geqslant 3$, $(x,z) \in R^{m+1}$, $r^2 = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2$, $\Delta_m$, $\Delta_{m+1} - m$ - и $(m+1)$ - мерные операторы Лапласа, $q$, $p$ - ненулевые числа. Уравнение (1) называется уравнением с сингулярной точкой, уравнение (2) с сингулярной линией, уравнение (3) с сингулярной плоскостью, а уравнение (4) с сингулярным основанием и осью цилиндра. Соответствующие однородные уравнения обозначим через $(1_0)$, $(2_0)$, $(3_0)$, $(4_0)$

**Уравнение с сингулярной точкой.** Всюду в дальнейшем символами ${}^{1}_{0}(D)$ и ${}^{2}_{0}(D)$ будем обозначать классы функций один раз или дважды непрерывно дифференцируемых вне нуля и непрерывных всюду в области $D$ с кусочно-гладкой границей $\Gamma$, включая точку нуль, $(s,s')$ - скалярное произведение единичных векторов $\overrightarrow{os}, \overrightarrow{os'}$, $r = ||, \rho = |y|, \ = r \cdot s, y = \rho \cdot s'$, $dy = \rho^{m-1} d\rho ds'$, $I_{k,m}((s,s')) - m$ - мерная сферическая гармоника порядка $k$, $Y_{k,m}(s) - m$ - мерная сферическая функция порядка $k, s, s' \in S_1$ - точки единичной сферы, $Ш_1 = \{|x| < 1\}$ - единичный шар, $2\alpha_k = \sqrt{(2k+m-2)^2 + 4q^2}$.

Справедливы следующие утверждения [2, 7]

**Теорема 1.** *Всякое решение однородного уравнения (1) из класса* $C_0^2$, *представимо формулой*

$$U(r,s) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k Y_{k,m}(s) r^{\alpha_k - \frac{m-2}{2}}. \tag{5}$$

*Обратно, каковы бы ни были постоянные $A_k$, каждый член ряда (6), а при обеспечении сходимости соответствующих рядов и его сумма, являются решениями однородного уравнения* $(1_0)$.

**Теорема 2.** *Если* $f(x) \in C^1(Ш_1)$, *то частное решение неоднородного уравнения (1) из класса* ${}^{2}_{0}(Ш_1)$ *дается интегральным оператором*

$$U(x) = \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int\limits_{Ш_1} \frac{\Omega(x,y)}{|y|^2} f(y)\, dy$$

*ядро которого*

$$\Omega(x,y) \quad = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2k+m-2}{2\alpha_k} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_k - \frac{m-2}{2}} \frac{I_{k,m}((s,s'))}{\rho^{m-2}}\ ; & \rho > r \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2k+m-2}{2\alpha_k} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha_k - \frac{m-2}{2}} \frac{I_{k,m}((s,s'))}{r^{m-2}}\ ; & \rho < r \end{cases},$$

*однородно порядка - m, удовлетворяет условию суммируемости*

$$\int\limits_{R_m} |y|^{-2} |\Omega(,y)|\, dy < \infty, \qquad = (1, 0, \ldots, 0)$$

*и обладает свойством вырождения:*

$$U(0) = \left( \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int\limits_{|y|<1} |y|^{-2} \Omega(x,y) f(y)\, dy \right)_{x=0} = \frac{1}{q^2} f(0)$$

*что для ($1_0$) равносильно соотношению* $(r^2 \Delta U)_{x=0} = 0$.

**Интегральное представление решений уравнения (1) в произвольной области.** Что касается неоднородного уравнения (1), имеет место формула (6)

$$\begin{gathered} U(x) = \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int\limits_{\Gamma} \left( \Omega(x,y) \frac{\partial U(y)}{\partial \nu} - U(y) \frac{\partial \Omega(x,y)}{\partial \nu} \right) d_y \Gamma + \\ + \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int\limits_{D} \frac{\Omega(x,y)}{|y|^2} f(y)\, dy \end{gathered} \tag{6}$$

Формула (6) называется интегральным представлением многообразия решений уравнения (1) из класса $C_0^2(D)$.

**Краевые задачи для уравнения ($1_0$) внутри шара.** Краевые задачи внутри шара формулируются следующим образом:

*найти функцию $U = U(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, удовлетворяющую внутри шара уравнению*

$$-r^2 \Delta U + q^2 U = 01_0 \tag{$1_0$}$$

*и граничному условию, которое может быть взято в одном из следующих видов:*

I. $U = f_1$ *на поверхности шара (первая краевая задача),*

II. $\frac{\partial U}{\partial r} = f_2$ *на поверхности шара (вторая краевая задача),*

III. $\frac{\partial U}{\partial r} + hU = f_3$ *на поверхности шара (третья краевая задача),*

$f_1$, $f_2$, $f_3$*−заданные функции на поверхности шара,* $h$*−постоянная.*

Полагая в (5) $r = R$, $s \quad = s'$, умножая поочередно на $Y_{k,m}(s')$ и $I_{k,m}(s')$ и интегрируя, будем иметь

$$A_k = \frac{1}{R^{\alpha_k - \frac{m-2}{2}} \left\|Y_{k,m}\right\|_{L_2(S_2)}} \int\limits_{S_1} U(R, s') Y_{k,m}(s') ds' \tag{7}$$

$$A_k R^{\alpha_k - \frac{m-2}{2}} Y_{k,m}(s) = \frac{2k + m - 2}{(m-2)|S_1|} \int\limits_{S_1} U(R, s') I_{k,m}((s, s')) ds' \tag{8}$$

С помощью формулы (5) , (7), (8) устанавливается следующие свойства:

$1^0$) *всякое решение однородного уравнения ($1_0$) из класса $C_0^2$ в сингулярной точке $x = 0$ имеет нуль, порядок которого совпадает с одним из чисел $\alpha_k - \frac{m-2}{2}$;*

$2^0$) $U(x) \in C_0^2(R_m)$ *является решением ($1_0$) на всем пространстве и ограничена, то $U(x) \equiv 0$ (теорема типа Лиувилля);*

$3^0$) *задача Дирихле $U(x)|_{S_R} = h(R, s), h(R, s) \in C(S_R)$, для уравнения ($1_0$) имеет единственное решение*

$$U(x) = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} [\Pi(x, y) + Q(x, y)] h(y) d_y S_R, \tag{9}$$

где $\Pi(x, y) = \frac{1}{R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^m}$*− ядро Пуассона, а*

$$Q(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k + m - 2}{R^{m-1}(m-2)} \left[ \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_k - \frac{m-2}{2}} - \left(\frac{r}{R}\right)^k \right] I_{k,m}((s, s'))$$

Отметим, что $Q(x, y) \in (\overline{Ш_R})$ и $\lim\limits_{r \to R} Q(x, y) = 0$. При непрерывной функции $h(s)$ формула (3) дает классическое решение задачи Дирихле в шаре.

Аналогичным образом доказываются, что вторая краевая задача, (задача Неймана) и третья краевая задача $\left(2 \frac{\partial U}{\partial r} + hU\Big|_{r = R} = f(s) \text{ при } h \geqslant 0\right)$ для однородного уравнения ($1_0$) имеют единственное решение.

То есть имеет место:

**Теорема 3.** *Задача Неймана* $2\frac{\partial U}{\partial r}\Big|_{S_R} = f(s)$, где $f(s) \in C(S_R)$, *для однородного уравнения* ($1_0$) в $C_0^2$ *имеет единственное решение в виде*

$$U(x) = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} \Omega^*(x, y) f(y) d_y S_R,$$

*где удвоенная производная по $r$ от ядра $\Omega^*(x, y)$ отличается от ядра Пуассона на слагаемое, которое непрерывно на замкнутом шаре и обращается в нуль на поверхности шара.*

**Теорема 4.** При $h \geqslant 0$ *третья задача* $2\frac{\partial U}{\partial r} + hU\Big|_{r=R} = f(s), f(s) \in C(S_R)$ *для уравнения* $(1_0)$ в $C_0^2$ *всегда имеет единственное решение вида*

$$U(x) = \frac{1}{|S_1|}\int\limits_{S_R} \Omega^{**}(x,y)f(y)d_yS_R.$$

*Если число* $h < 0$ *- корень уравнения* $2\alpha_k - m + 2 + Rh = 0$ *при некотором целом значении* $k = k_0$*, то третья краевая задача либо не имеет решения, либо решение существует, но не единственно. Условием разрешимости при* $2\alpha_{k_0} - m + 2 + Rh = 0$ *является требование*

$$\int\limits_{S_R} f(s')I_{k_0,m}((s,s'))ds' = 0$$

в этих теоремах можно написать явный вид ядер $\Omega^*$ и $\Omega^{**}$.

В цилиндрических областях $Ц = \left\{ 0 < z < l, \sum\limits_{k=0}^{m} x_k^2 < R^2 \right\}$ справедливы аналогичные теоремы и утверждения о многообразиях решений уравнений (2) – (4) и разрешимости краевых задач для однородных уравнений $(2_0)$ – $(4_0)$ (см. [5] - [8]).

### Литература

1. Михайлов Л.Г. //ДАН России, 2004. т. 399. №2. с. 31- 34.
2. Михайлов Л.Г., Мухсинов А.//ДАН России, 2005, т.402, № 5, с. 596-600.
3. Михайлов Л.Г., Мухсинов А.//ДАН России, 2010, т.431, № 1, с.59-63.
4. Мухсинов А. Интегральное представление многообразия решений одного эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами. //Ученые записки ХГУ. Естественные науки, №2, 1998, Худжанд с. 151-159
5. Мухсинов А. Формула представления решений одного уравнения в частных производных с сингулярной плоскостью. // Вестник ТГНУ (серия естественных наук) 2009 № 1(49) с. 34 – 37
6. Мухсинов А. Формула представления решений задачи Дирихле для одного трехмерного уравнения в частных производных с сингулярной линией. // Вестник ТГНУ (серия естественных наук) 2009 № 1(49) с. 54 – 58
7. Мухсинов А. О некоторых формулах представления решений многомерных эллиптических уравнений с сингулярными точками // Доклады АН РТ., 2009 г., т. 52, №5, с. 344-353
8. Мухсинов А. Исследования многообразий решений и краевых задач для некоторых многомерных вырождающихся (сингулярных) уравнений в частных производных эллиптического типа. Докторская диссертация. – Душанбе, Институте математики АН РТ, 2010.

УДК 517.927

# Интегральные представления и решение задача типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода при отрицательном коэффициенте

Назаров Дж.

**(Таджикский национальной университет)**

Пусть D$-$конечная область плоскости $xoy$. Часть области D в которых $y > 0$ и $y < 0$ соответственно обозначим через D$^+$и D$^-$.

В области D$^-$ рассмотрим уравнении следующего вида

$$L_a\left[\frac{(-xy)^{-\frac{4+3\nu-3\alpha}{2}}}{x^3+y^3}L_\nu U\right]=0, \tag{1}$$

где $L_\nu U\equiv y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{6\nu-1}{2}\left(\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)$, $a,\nu$ – вещественные число.

В $[1-6]$ исследованы ряд вырождающегося дифференциального уравнения в эллиптической и гиперболической части области D

Целью настоящей работы, является получения интегральных представление решений уравнения (1) в области D$^-$. Затем используя полученные интегральные приставления для решение задача типов Коши.

Регулярным решением уравнения (1) в области D$^-$ будем называть функцию $U(x,y)$ непрерывного в $\bar{D}^-$, имеющую непрерывные производные четверного порядка в D$^-$ и удовлетворяющее уравнения (1).

Введем следующее интегральный оператор

$$T_\alpha\phi_j=\int\limits_0^1\frac{\phi_j\left[x^3-y^3-2\left(-xy\right)^{\frac{3}{2}}\left(1-2\tau\right)\right]d\tau}{\left[\tau\left(1-\tau\right)\right]^\alpha},\quad (j=1,2,3,4),$$

где $\phi_j$ – произвольные функции.

**Теорема 1.** Если $L_\nu U_\nu=0$ и $L_a U_a=0$ то регулярное решение уравнения (1) в области $D^-$ при $a>\nu$представимо в виде

$$U\left(x,y\right)=U_\nu\left(x,y\right)+\left(-xy\right)^{\frac{3}{2}\left(a-\nu\right)}U_a\left(x,y\right) \tag{2}$$

где $U_\nu, U_a$ – решение уравнения второго порядка.

**Доказательство**. В равенстве (2) применяем оператор $L_\nu$

$$L_\nu U\left(x,y\right)=L_\nu U_\nu+L_\nu\left[\left(-xy\right)^{\frac{3}{2}\left(a-\nu\right)}U_a\right],$$

по условию теорема $L_\nu U_\nu=0$, следовательно получим

$$L_\nu U=L_\nu\left[\left(-xy\right)^{\frac{3}{2}\left(a-\nu\right)}U_a\right] \tag{3}$$

В провой части равенство (3) вычисляя частные производные первого и второго порядка по $x$ и $y$ и после некоторых упрощений получим

$$L_\nu U=\frac{9}{4}\left(-xy\right)^{\frac{3}{2}\left(a-\nu\right)-2}\left[a\left(a-1\right)-\nu\left(\nu-1\right)\right]\left(x^3+y^3\right)U_a \tag{4}$$

из (4) имеем

$$\frac{(-xy)^{2-\frac{3}{2}(a-\nu)}}{x^3+y^3}L_\nu U=\frac{9}{4}\left[a\,(a-1)-\nu\,(\nu-1)\right]\,U_a\ ,$$

В последнем равенство применяя оператор $L_a$ с учетом условий теоремы получим

$$L_a\left[\frac{(-xy)^{2-\frac{3}{2}(a-\nu)}}{x^3+y^3}L_\nu U\right]=\frac{9}{4}\left[a\,(a-1)-\nu\,(\nu-1)\right]\,L_aU_a\ =0.$$

Теорема доказано.

**Теорема 2.** Пусть $-1<2\nu<0,\quad 2a>1$. Тогда регулярное решение уравнения (1) в области $D^-$ представим в виде

$$\begin{gathered}U\,(x,y)=(1+2\nu)\,A_{1+\nu}T_{-\nu}\phi_1-2A_{1+\nu}\,(-xy)^{\frac{3}{2}}\,T_{-\nu}\phi_1'\cdot(1-2\tau)\,+\\+A_{1-\nu}\,(-xy)^{\frac{3}{2}\,(1-2\nu)}\,T_\nu\phi_2+A_a\,(-xy)^{\frac{3}{2}\,(a-\nu)}\,T_{1-a}\psi_1\end{gathered}\tag{5}$$

где $\phi_1\in C^3\,(D^-)$, и $\phi_2\ \psi_1\in C^2\,(D^-)$, произвольные функции одного аргумента.

**Теорема 3.** Пусть $-1<2\nu<0,\quad 0<2a<1$. Тогда регулярное решение уравнения (1) в области $D^-$ представим в виде

$$\begin{gathered}U\,(x,y)=(1+2\nu)\,A_{1+\nu}T_{-\nu}\phi_1-2A_{1+\nu}\,(-xy)^{\frac{3}{2}}\,T_{-\nu}\phi_1'\cdot(1-2\tau)\,+\\+A_{1-\nu}\,(-xy)^{\frac{3}{2}\,(1-2\nu)}\,T_\nu\phi_2+A_a\,(-xy)^{\frac{3}{2}\,(a-\nu)}\,T_{1-a}\psi_1\,+A_{1-a}\,(-xy)^{\frac{3}{2}\,(1-a-\nu)}\,T_a\psi_2\end{gathered}\tag{6}$$

где $\phi_1\in C^3\,(D^-)$, и $\phi_2\,,\,\psi_1,\psi_2\in C^2\,(D^-)$, произвольные функции одного аргумента.

**Теорема 4.** Пусть $-1<2\nu<0,\quad -1<2a<0$, и $a>\nu$. Тогда регулярное решение уравнения (1) в области $D^-$ представим в виде

$$\begin{gathered}U\,(x,y)=(1+2\nu)\,A_{1+\nu}T_{-\nu}\phi_1-2A_{1+\nu}\,(-xy)^{\frac{3}{2}}\,T_{-\nu}\phi_1'\cdot(1-2\tau)\,+\\+A_{1-\nu}\,(-xy)^{\frac{3}{2}\,(1-2\nu)}\,T_\nu\phi_2+(1+2a)\,A_{1+a}\,(-xy)^{\frac{3}{2}\,(a-\nu)}\,T_{-a}\psi_1-\\-2A_{1+a}\,(-xy)^{\frac{3}{2}\,(1+a-\nu)}\,T_{-a}\psi_1'\cdot(1-2\tau)+A_{1-a}\,(-xy)^{\frac{3}{2}\,(1-a-\nu)}\,T_a\psi_2\end{gathered}\tag{7}$$

где $\phi_1,\psi_1\in C^3\,(D^-)$ и $\phi_2\,,\psi_2\in C^2\,(D^-)$ произвольные функции одного аргумента.

Теперь некоторые полученных интегральных представление применяем для решений задач типов Коши в характеристической области $D^-$.

**Задача $K_1$.** Требуется найти регулярное решение уравнения (1) в области D⁻ при -1 $<2\nu<0$, $2a\geq1$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{gathered}\lim_{y\to-0}\mathrm{u}(x,\,y)=f_1(x),\qquad\lim_{y\to-0}\left[(-y)^{3\nu-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right]=f_2(x),\\\lim_{y\to-0}\left\{(-y)^{\frac{5-3a+3\nu}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)\,3\nu-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\}\,=g_1(x),\end{gathered}\tag{$K_1$}$$

где $f_1$, $f_2$, $g_1$ – заданные непрерывные функции на интервале $0<x<1$ и $\nu,\alpha$ – постоянные числа.

**Решение задачи $K_1$.** Для решения задачи $K_1$ используем интегральное представление (5). Из (5) с учетом начальные условия $(K_1)$, найдем заданные функции $f_1$, $f_2$, $g_1$ соответственно через $\phi_1(x)$, $\phi_2\,(x)$, $g_1\,(x)$. После этого подставляя заданные функции в равенстве (5), получим решение задача $(K_1)$ в явном виде:

**Теорема 5.** Пусть $-1 < 2\nu < 0, \quad 2a \geq 1$ и $a+\nu > 1$. Тогда решение задача $K_1$ в области $D^-$ даётся формулой

$$\begin{aligned} U(x,\,y) = & \frac{(1+2\nu)}{\mathrm{B}(1+\nu\,;1+\nu)} \int\limits_0^1 \frac{f_1\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{-\nu}} + \\ & + \frac{2(-xy)^{\frac{3}{2}}}{3\mathrm{B}(1+\nu\,;1+\nu)} \int\limits_0^1 \frac{f'_1\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right](1-2\tau)d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{-\nu}} + \\ & + \frac{2(-xy)^{\frac{3}{2}}(a-\nu)}{3(1-2\nu)(\mathrm{B}(1-\nu\,;1-\nu)} \int\limits_0^1 \frac{f_2\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{\nu}} + \\ & + \frac{4(-xy)^{\frac{3}{2}}(a-\nu)}{9\mathrm{B}(\alpha;\alpha)(a+\nu-1)} \int\limits_0^1 \frac{g_1\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{1-a}}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $f_1,\, f_2,\, g_1$ – заданные функции из класса $f_1 \in C^3\left(D^-\right),\ \ f_2, \mathrm{g}_1 \in C^2\left(D^-\right).$

**Задача $K_2$.** Требуется найти регулярное решение уравнения (1) в области D¯ при -1 $< 2\nu < 0$, $0 < 2a < 1$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\lim_{y\to-0} u(x,\,y) = f_1(x),\ \lim_{y\to-0}\left[x^{\frac{3}{2}}(\nu-a)\,(-y)^{\frac{2+3\nu-3a}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right] = g_1(x),$$

$$\begin{aligned} &\lim_{y\to-0}\left\{x^{\frac{3}{2}}(a+\nu-1)\,(-y)^{\frac{6a-1}{2}}\,\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{\frac{2+3\nu-3a}{2}}\,\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\} = g_2(x), \\ &\lim_{y\to-0}\left\{x^{\frac{3}{2}}(2\nu-1)\,(-y)^{\frac{2+3\nu-3a}{2}}\,\frac{\partial}{\partial y}\left\{(-y)^{\frac{6a-1}{2}}\,\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{\frac{2+3\nu-3a}{2}}\,\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\}\right\} = f_2(x) \end{aligned} \tag{$K_2$}$$

где $f_1,\, f_2,\, g_1,\, g_2$ – заданные функции на интервале $0 < x < 1$ и $\nu, \alpha$ – постоянные числа.

**Теорема 6.** Пусть $-1 < 2\nu < 0, \quad 0 < 2a < 1$. Тогда решение задача $K_2$ в области $D^-$ даётся формулой

$$\begin{aligned} U(x,\,y) = & \frac{1+2\nu}{\mathrm{B}(1+\nu,1+\nu)} \int\limits_0^1 \frac{f_1\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{-\nu}} + \\ & + \frac{(-xy)^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{B}(1+\nu,1+\nu)} \int\limits_0^1 \frac{f'_1\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]\cdot(1-2\tau)d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{-\nu}} + \\ & + \frac{8(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\nu)}{27\mathrm{B}(1-\nu,1-\nu)(1-2\nu)(a-\nu)(1-a-\nu)} \int\limits_0^1 \frac{f_2\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{\nu}} + \\ & + \frac{2(-xy)^{\frac{3}{2}}(a-\nu)}{3(\alpha-\nu)} \int\limits_0^1 \frac{g_1\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{1-a}} + \\ & + \frac{4(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-a-\nu)}{9B(1-a,1-a)(1-2a)(1-\nu-a)} \int\limits_0^1 \frac{g_2\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{a}}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $f_1,\ f_2,\ g_1,\ g_2$ – заданные функции на интервале $0 < x < 1$ и $f_1 \in C^3\left(D^-\right),\ \ f_2, g_1,$ $g_2 \in C^2\left(D^-\right)$, $\nu, \alpha$ – постоянные числа.

## Литература

1. Трикоми Ф. лекции по уравнениям в частных производных, издательстве иностранный литература, М: 1957, с. 443

2. Келдыш М.Б. О некоторых случаях вырождения уравнения эллиптического типа на границе области. ДАН СССР, 1951, т. 77, №2, с. 181-183
3. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа – М: изд-во АНСССР, 1959.
4. Смирнов М. М. Модельные уравнения смешанного типа четвертого порядка. Л. 1972.
5. Раджабов Н. Интегральные представление задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией и сингулярными поверхностями. –Душанбе, част I. 1980
6. Сатторов А.С. Интегральные представления и задача типа Коши для одного вырождающегося уравнения четвертого порядка первого рода с двумя сингулярными линиями. Вестник ЛГУ, сер I,

УДК 518: 517.948

## Регуляризация сдвигом и ее приложения

Назимов А.Б.

**(Вологодский государственный университет, Россия)**

**1. Конечномерный случай.** Рассмотрим задачу нахождения решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$Ax = f, \tag{1}$$

минимизирующего функционал $\|PBx\|$, где $A$ и $B$ – произвольные квадратные матрицы порядка $N$ с комплексными элементами, $P$ – ортогональный проектор на ядро сопряженной матрицы $A^*$, $f \in C^N$ – заданный, $x \in C^N$ – искомый векторы, $C^N$ есть $N$ – мерное комплексное пространство. Наряду с (1) будем рассматривать параметрическое семейство

$$(A + \lambda B)\, x = f, \tag{2}$$

где $\lambda \in C$ – комплексный параметр.

Будем говорить, что семейство (2) является **регуляризацией сдвигом** системы (1), если:

1) семейство (2) для всех $f \in C^N$ и достаточно малых $|\lambda\,| > 0$ имеет единственное решение $x_\lambda$;

2) для всех $f \in R\,(A)$ решение $x_\lambda$ сходится при $\lambda \to 0$.

Если матрица $A$ обратима, то, во-первых, СЛАУ (1) однозначно разрешима для каждого $f \in C^N$ и, во-вторых, матрица $A + \lambda B$ обратима для любой матрицы $B$ при достаточно малых $|\lambda\,| \geq 0$. При этом справедлива оценка $\|x_\lambda - x_0\| = O\,(\lambda)$, где $x_0$ – некоторое решение (1). Таким образом, если $A$ является обратимой, то семейство (2) является регуляризацией сдвигом (1) для любой квадратной матрицы $B$ порядка $N$.

Если же матрица $A$ необратима, то, во-первых, (1) ни при всех $f \in C^N$ является разрешимой и, во-вторых, даже в случае разрешимости (1) и однозначной разрешимости (2) может не иметь место оценка $\|x_\lambda - x_0\| = O\,(\lambda)$. Поэтому представляет интерес выделение класса пар $(A,\ B)$ матриц $A$ и $B$, для которых семейство (2) является регуляризацией сдвигом системы (1).

Заметим, если в (2) вместо четверки $(A,\ B,\ \lambda,\ f)$ положить $(A^*A,\ E,\ \alpha,\ A^*f)$, где $A^*$ – комплексно-сопряженная матрица для матрицы $A$, $E$ – единичная матрица, $\alpha > 0$, то получается регуляризатор

А. Н. Тихонова (см. [1], [2]); при $(A^*A,\ L^*L,\ \alpha,\ A^*f)$ получается СЛАУ, решение которой сходится к $L$ – псевдорешению (см. [3] – [5]); при $(A,\ E,\ \alpha,\ f)$, где $A = A^* \geq 0$, $\alpha > 0$, получается регуляризация М. М. Лаврентьева (см. [6], [7]), а случай с положительно определенной симметрической матрицей $A$ рассмотрена В. Н. Фадеевой в [8]; при $(A,\ E,\ i\alpha,\ f)$, где $A = A^* \geq 0$, $\alpha > 0$, $i$ - мнимая единица, получается регуляризация А. Б. Бакушинского (см. [9], [10]); при $B = \sum\limits_{m=1}^{k} g_m^* e_m$, где $e_m,\ g_m,\ m = \overline{1,k}$ – ортонормированные базисы в $\ker A$ и $\ker A^*$ соответственно, получится СЛАУ для нахождения приближенных значений точек ветвления нелинейных уравнений, изученных Н. А. Сидоровым и В. А. Треногиным (см. [11], [12]) и численного решения сингулярных интегральных уравнений теории упругости и аэродинамики, рассмотренных Н. Г. Афендиковой (см. [13], [14]), С. М. Белоцерковским (см. [15], [16]), И. К. Лифановым (см. [17], [18]).

Используем обозначения: $A^+$ – псевдообратная матрица для $A$; $Q = E - A^+A$ – ортогональный проектор на $\ker A$; $P = E - AA^+$ – ортогональный проектор на $\ker A^*$; $F = PBQ$; $T = (F^+B - E)\,A^+$; $\Lambda_0 = \{z \in \mathrm{C}: \quad 0 < |\,z\,| < \rho_0\}$, $\rho_0$ – некоторое достаточно малое положительное число; $\Delta(\lambda) = \det(A + \lambda B)$.

Основным утверждением для конечномерного случая является:

**Теорема 1.** *Утверждения* $(\mathrm{K}_1)$ – $(\mathrm{K}_{12})$ *эквивалентны:*

$(\mathrm{K}_1)$: *семейство* (2) *является регуляризацией сдвигом* (1);

$(\mathrm{K}_2)$: $\exists\lambda_0 \in \mathrm{C}$ *такое, что* $\Delta(\lambda_0) \neq 0$ *и справедливо равенство*

$$R(A) \cap R(BQ) = \{0\}.$$

$(\mathrm{K}_3)$: *имеет место равенство* $F^+F = Q$;

$(\mathrm{K}_4)$: *имеет место равенство* $FF^+ = P$;

$(\mathrm{K}_5)$: *справедливо разложение в матричный ряд*

$$(A + \lambda B)^{-1} = \lambda^{-1}F^+ + \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m (TB)^m T \left(BF^+ - E\right),$$

где $\lambda \in C$, $0 < |\lambda| < \rho^{-1}$, $\rho$ – спектральный радиус матрицы-оператора $TB$;

$(\mathrm{K}_6)$: *имеет место оценка* $\left\|(A + \lambda B)^{-1}\right\| = O\left(|\lambda|^{-1}\right), \qquad \lambda \in \Lambda_0$;

$(\mathrm{K}_7)$: *имеет место оценка* $\left\|\lambda\,(A + \lambda B)^{-1}\right\| \leq \mathrm{const}, \qquad \lambda \in \Lambda_0$;

$(\mathrm{K}_8)$: *имеет место оценка* $\left\|\lambda\,(A + \lambda B)^{-1} B\right\| \leq \mathrm{const}, \qquad \lambda \in \Lambda_0$;

$(\mathrm{K}_9)$: *имеет место оценка* $\left\|(A + \lambda B)^{-1} A\right\| \leq \mathrm{const}, \qquad \lambda \in \Lambda_0$;

$(\mathrm{K}_{10})$: *имеет место равенство* $R(A) + R(BQ) = \mathrm{C}^n$;

$(\mathrm{K}_{11})$: *имеет место неравенство* $\Delta^{(k)}(0) \neq 0$, где $k = n - r, r = \mathrm{rank}\,A$;

$(\mathrm{K}_{12})$: *имеют место неравенства*

$$\det A_{11} \neq 0, \qquad \det\left(B_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}B_{12} - B_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + A_{21}A_{11}^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}A_{12}\right) \neq 0,$$

где $A_{ij}$ и $B_{ij}$ – *составляющие блочного представления матриц* $A$ и $B$ :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

где $A_{11}$ и $B_{11}$ – *квадратные матрицы порядка* $r, r = rankA$.

**2. Беспараметрная регуляризация сдвигом.** Метод регуляризации сдвигом, рассмотренный выше, является достаточно общим. Условия, приведенные в теореме 1, выполняются для широкого класса матриц $A$ и $B$. Если известны некоторые дополнительные свойства матриц $A$ и $B$, то можно получить более конкретные результаты. На практике при применении теории регуляризации в решении той или иной задачи, в частности, при решении СЛАУ, важным моментом является выбор параметра регуляризации. Как правило, этот выбор сопровождается большими трудностями. Рассмотрим вопрос регуляризации сдвигом СЛАУ, в которой не участвует параметр регуляризации, то есть. когда $\lambda = 1$. Это освободит от выбора параметра регуляризации.

Беспараметрная регуляризация сдвигом применяется при решении дискретных аналогов сингулярных интегральных уравнений Гильберта нейтрального типа, а также использован при решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа на квадрате (см. [19], [20]).

**Теорема 2.** *Пусть для матриц* $A$ и $B$ *выполняются равенства*

$$R(B) = \ker A^*, \quad \ker B = R(A^*).$$

*Тогда для всех ненулевых* $\lambda \in C$ матрица $A + \lambda B$ *является обратимой и имеет место равенство*

$$(A + \lambda B)^{-1} = \lambda^{-1} B^+ + A^+.$$

**Теорема 3.** Пусть $B$ – *матрица, удовлетворяющая условиям теоремы* (2). *Если СЛАУ* (1) *является совместной, то ее нормальное решение* $x_0$ *определяется формулой*

$$x_0 = (A + B)^{-1} f.$$

Пусть $e_m,\ g_m,\ m = \overline{1,k}$ – ортонормированные базисы в $\ker A$ и $\ker A^*$ соответственно. Положим

$$B = \sum_{m=1}^{k} g_m^* e_m. \tag{3}$$

**Теорема 4.** *Пусть матрица* $B$ *определена равенством* (3). :

а) *нормальное решение системы* (1) *определяется равенством*

$x_0 = \left(A + \sum\limits_{m=1}^{k} g_m e_m^*\right)^{-1} f, \quad f \in R(A);$

б) *нормальное псевдорешение системы* (1) *определяется равенством*

$x_0^+ = \left(A + \sum\limits_{m=1}^{k} g_m e_m^*\right)^{-1} g, \quad f \notin R(A),$

где $g = f - \sum\limits_{m=1}^{k} (f, e_m)\, g_m$.

**3. Бесконечномерный случай.** Бесконечномерный случай существенно отличается от конечномерного случая многими факторами:

1. В конечномерном случае образы $R(A)$ и $R(A^*)$ являются замкнутыми подпространствами для любого оператора $A$ и, следовательно, и пространство прообразов, и пространство образов представимы прямыми суммами

$R(A^*) \oplus \ker A$ и $R(A) \oplus \ker A^*$;

в бесконечномерном случае образы $R(A)$ и $R(A^*)$ являются замкнутыми подпространствами тогда и только тогда, когда оператор $A$ является нормально разрешимым, если же оператор $A$ не является нормально разрешимым, то образы $R(A)$ и $R(A^*)$ не являются замкнутыми подпространствами и, следовательно, приведенными выше прямыми суммами невозможно представление пространства прообразов и пространство образов.

2. В конечномерном случае сходимость решения $x_\lambda(f)$ уравнения (2) при $\lambda \to 0$ является равномерной на любом ограниченном множестве $R_0 \subset R(A)$, тогда как сходимость в бесконечномерном случае может являться равномерной или неравномерной, сильной или слабой.

3. В конечномерном случае для любого оператора $A$ существует оператор $B$, что семейство (2) является регуляризацией сдвигом (1), а в бесконечномерном случае не для всякого $A$ существует $B$ с таким свойством.

4. Даже когда для данного оператора $A$ существует оператор $B$, для которого семейство (2) однозначно разрешимо для всех $f \in l_2$ и $\lambda \in \Lambda_0$, то, тем не менее, нет гарантии сходимости решений семейства (2) при $\lambda \to 0$ к некоторому решению (1), когда $f \in R\,(A)$.

Введем обозначения: $A^+$ – псевдобратный для оператора $A$; $Q$ – ортопроектор на $\ker A$; $P$ – ортопроектор на $\ker A^*$; $F = PBQ$; $F_0 = F|_{\ker A}$ – сужение оператора $F$ на $\ker A$; $T_0 = BF^+ - E$; $T = (F^+B - E)\,A^+$; $\Lambda_0 = \{\lambda \in \mathrm{C} : 0 < |\,z\,| \le \rho_0\}$, где $0 < \rho_0 \le 1$.

**Теорема 5.** *Следующие утверждения эквивалентны:*

($\text{Б}_1$) *семейство ОУ (2) является регуляризацией сдвигом ОУ (1);*

($\text{Б}_2$) *имеет место оценка*

$$\left\|\lambda\,(A+\lambda B)^{-1}\right\| \le M = const, \qquad \lambda \in \Lambda_0.$$

($\text{Б}_3$) *оператор $A$ нормально разрешимый и оператор*

$$F_0 \ : \ \ker A \ \to \ \ker A^*$$

*ограниченно обратимый;*

($\text{Б}_4$) *имеет место оценка* $\left\|\lambda\,(A+\lambda B)^{-1}\,B\right\| \le M_1 = const, \lambda \in \Lambda_0;$

($\text{Б}_5$) *имеет место оценка* $\left\|(A+\lambda B)^{-1}\,A\right\| \le M_2 = const, \lambda \in \Lambda_0;$

($\text{Б}_6$) *имеет место оценка* $\left\|\lambda B\,(A+\lambda B)^{-1}\right\| \le M_3 = const, \lambda \in \Lambda_0;$

($\text{Б}_7$) *имеет место оценка* $\left\|A\,(A+\lambda B)^{-1}\right\| \le M_4 = const, \lambda \in \Lambda_0;$

($\text{Б}_8$) *оператор $A^*$ нормально разрешимый и оператор*

$$F_0^* \ : \ \ker A^* \ \to \ \ker A$$

*ограниченно обратимый;*

($\text{Б}_9$) *операторы $A$* и *$F$ нормально разрешимые и имеет место операторное равенство* $F^+F = Q, \qquad F = PBQ;$

($\text{Б}_{10}$) *операторы $A$* и *$F$ нормально разрешимые и имеет место операторное равенство* $FF^+ = P;$

($\text{Б}_{11}$) *операторы $A$* и *$F$ нормально разрешимые и имеет место разложение в операторный ряд*

$$(A+\lambda B)^{-1} = \lambda^{-1}F^+ + \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m\,(TB)^m\,T\,\big(BF^+ - E\big),$$

где $\lambda \in \mathrm{C} : 0 < |\lambda\,| \le \rho_0 < \rho^{-1}, \rho = \rho\,(TB)$ – *спектральный радиус* $TB : H \to H;$

($\text{Б}_{12}$) *имеют место равенства*

$$\ker A \cap \ker B = \{0\}\,, \quad R\,(A) \oplus R\,(BQ) = H;$$

($\text{Б}_{13}$) *имеют место равенства*

$$\ker A^* \cap \ker B^* = \{0\}\,, \quad R\,(A^*) \oplus R\,(B^*P) = H.$$

**4. Задачи $L$-псевдообращения В.А. Морозова.** Пусть $A : H \to F$ – линейный ограниченный оператор, а $H$ и $F$ – гильбертовы пространства.

Рассмотрим операторное уравнение (ОУ) (1) где $f \in F$ – заданный, а $x \in H$ – искомый элементы.

Пусть $K \subset H$ – произвольное множество. **Квазирешением** ОУ (1) на множестве $K$ [21], [22] назовем любой $x_0 \in K$, минимизирующий невязку

$$\|Ax_0 - f\| = \inf\left\{\|Ax - f\| : \ u \in K\right\}$$

на множестве $K$. Приведенное определение отличается от определения В.К.Иванова [23], [24] тем, что здесь не требуется от множества $K \subset H$ свойства компактности. Поэтому, в нашем случае, множество квазирешений (1) может быть и пустым. Если (1) имеет квазирешение, то оно, вообще говоря, определяется неоднозначно. Если $K = H$, то квазирешение (1) назовем **псевдорешением** этого уравнения. Псевдорешение (1) с минимальной нормой назовем **нормальным псевдорешением** (1). Очевидно, что если (1) разрешимо, то его псевдорешение совпадает с решением, а нормальное псевдорешение с нормальным решением.

Пусть $A : H \to F$ и $L : H \to G$ – линейные ограниченные операторы, $f \in F$ и $g \in G$ – заданные элементы, а $H$, $F$ и $G$ – гильбертовы пространства. Рассмотрим две задачи – стационарную задачу $L$-псевдообращения и вариационную задачу $L$-псевдообращения:

**стационарная задача** $(S;\ f,\ g)$ (см. [25], [26]):

найти квазирешение $x_0 = x_0\,(f,\ g)$ уравнения $Lx = g$ на множестве псевдорешений уравнения (1).

**вариационная задача** $(V;\ f,\ g)$ (см. [3], [27]):

найти решение вариационной задачи

$$\Phi_\alpha\,(x) \equiv \|Ax - f\|^2 + \alpha\,\|Lx - g\|^2 \to \min, \quad x \in H,$$

где $\alpha > 0$ и исследовать его предельные свойства при $\alpha \to 0$.

Следуя В. А. Морозову [3], [4], будем говорить, что операторы $A : H \to F$ и $L : H \to G$ удовлетворяют условию **взаимной дополнительности**, если существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что для всех $x \in H$ выполняется неравенство

$$\|Ax\|^2 + \|Lx\|^2 \geq \gamma\,\|x\|^2\,, \quad x \in H.$$

Если $H$, $F$ и $G$ являются конечномерными, то нетрудно доказать, что взаимная дополнительность операторов $A$ и $L$ эквивалентна условию

$$\ker A \cap \ker L = \{0\}\,. \tag{4}$$

Если $H$, $F$ и $G$ – и бесконечномерные, то из взаимной дополнительности операторов $A$ и $L$ вытекает условие (4). Однако, обратное утверждение не имеет место: из условия (4) не вытекает взаимная дополнительность $A$ и $L$, даже при дополнительном предположении – их нормальной разрешимости.

Будем говорить, что имеет место **основное условие**, если оператор $A$ нормально разрешимый и операторы $A$ и $L$ удовлетворяют условию взаимной дополнительности.

**Теорема 6.** *Для однозначной разрешимости задачи* $(S; f, g)$ для всех $f \in F$ и $g \in G$ *необходимо и достаточно выполнение основного условия; при этом единственное решение задачи* $(S;\ f,\ g)$ *определяется равенством*

$$x_0 = A^+ f + (LQ)^+\left(g - LA^+ f\right).$$

где $Q$ – *ортогональный проектор на* $\ker A$.

Положим

$$T_0 = E - (LQ)^+\,L, \qquad T = -\,(A^*A)^+\,L^*L,$$

$\rho_0 = \rho\,(T)$ – спектральный радиус оператора $T$.

**Теорема 7.** *Для того, чтобы задача* $(V;\ f,\ g)$ для всех $f \in F$, $g \in G$ и $\alpha > 0$ *имела единственное решение, сходящееся при* $\alpha \to 0$, *необходимо и достаточно выполнение основного условия; при этом единственное решение задачи* $(V;\ f,\ g)$ *определяется равенством*

$$x_\alpha = x_\alpha\,(f, g) \equiv (A^*A + \alpha L^*L)^{-1}\,(A^*f + \alpha L^*g)\,,$$

*и для всех* $\alpha: \; 0 < \alpha < \rho_0^{-1}, (\rho_0$ *– спектральный радиус оператора* $\left(A^*A\right)^+ L^*L)$ *справедлива оценка* $\|x_\alpha - x_0\| \le m\alpha$, $x_0$ *– решение задачи* $(S; \; f, \; g)$, $m > 0$ *– постоянная, не зависящая от* $\alpha$.

Близкими по теме исследования данного параграфа следует отметить работы Б. А. Алиева [28], В. И. Мелешко [29], Р. А. Шафиева [30].

**5. Задачи с приближенными данными.** Рассмотрим вопрос аппроксимации "точного" решения задачи $L$ – псевдообращения "приближенными" решениями вариационной задачи, когда вместо "точной четверки" $(A, \; L, \; f, \; g)$ задано множество "приближенных четверок" $\left(\tilde{A}, \; \tilde{L}, \; \tilde{f}, \; \tilde{g}\right)$.

Пусть $A : H \to F$ и $L : H \to G$ – линейные ограниченные операторы, а $H$, $F$ и $G$ – гильбертовы пространства. Будем считать, что нам известны $\left\{\widetilde{A}\right\}$, $\left\{\widetilde{L}\right\}$ – множества линейных операторов $\tilde{A} : H \to F$, $\tilde{L} : H \to G$ и $\left\{\widetilde{f}\right\}$, $\{\widetilde{g}\}$ – классы правых частей $\widetilde{f} \in F$, $\widetilde{g} \in G$, удовлетворяющих условиям

$$\left\|\tilde{A} - A\right\| \le \mu, \quad \left\|\tilde{L} - L\right\| \le \mu, \quad (\mu \ge 0)\,, \tag{5}$$

$$\left\|\tilde{f} - f\right\| \le \varepsilon \|f\|, \quad \|\tilde{g} - g\| \le \varepsilon \|g\|, \quad (\varepsilon \ge 0)\,,$$

где $\mu > 0$, $\varepsilon > 0$ – произвольные, достаточно малые величины.

Очевидно, что из ограниченности операторов $A$, $L$ и оценок (5) вытекает ограниченность операторов $\tilde{A}$, $\tilde{L}$.

**Теорема 8.** *Пусть система*

$$\begin{cases} Ax = f_0, \\ Lx = g_0 \end{cases} \tag{6}$$

*является совместной и имеет место основное условие. Если параметр регуляризации удовлетворяет условию согласованности, то при* $\alpha \to 0$ *справедлива оценка*

$$\|\tilde{x}_{0\alpha} - x_0\| \le (m_1 + m_2)\,\mu\,\|x_0\| + m_1 \left\|\tilde{f}_0 - f_0\right\| + m_2\,\|\tilde{g}_0 - g_0\|\,,$$

где $\tilde{x}_{0\alpha}$ *– решение вариационной задачи* $\left(\widetilde{V}; \; \tilde{f}_0, \; \tilde{g}_0\right)$, $x_0$ *– решение системы* (6), $m_1$ и $m_2$ *– некоторые постоянные.*

Положим

$$\tilde{f}_\alpha = \tilde{P}_\alpha \tilde{f}, \quad \tilde{\tilde{f}}_\alpha = \left(\tilde{A}^*\tilde{A} + \alpha E\right)^{-1} \tilde{A}^* \tilde{f}_\alpha, \quad \tilde{g}_\alpha = \tilde{L}\tilde{\tilde{f}}_\alpha + \tilde{S}_\alpha \left(\tilde{g} - \tilde{L}\tilde{\tilde{f}}_\alpha\right),$$

где

$$\tilde{P}_\alpha = \left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1} \tilde{A}\tilde{A}^*, \qquad \tilde{S}_\alpha = \left(\tilde{L}_\alpha \tilde{L}_\alpha^* + \alpha E\right)^{-1} \tilde{L}_\alpha \tilde{L}_\alpha^*,$$
$$\tilde{L}_\alpha = \tilde{L}\tilde{Q}_\alpha, \qquad L_0 = LQ, \qquad \alpha\tilde{Q}_\alpha = \left(\tilde{A}^*\tilde{A} + \alpha E\right)^{-1},$$

а параметр $\alpha > 0$.

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 9.** *Пусть имеет место основное условие и параметр регуляризации удовлетворяет условию согласованности. Тогда вариационная задача*

$$\left\|\tilde{A}x - \tilde{f}_\alpha\right\|^2 + \alpha \left\|\tilde{L}x - \tilde{g}_\alpha\right\|^2 \to \min, \qquad x \in H$$

*имеет единственное решение* $\tilde{x}_\alpha$ и при $\alpha \to 0$ *справедлива оценка*

$$\|\tilde{x}_\alpha - x_0\| \le m_3\alpha + m_4\mu + m_5\varepsilon.$$

где $x_0$ – *решение задачи* $(S;\ f,\ g)\,, m_3, m_4, m_5$ – *постоянные, которые определяются в ходе доказательства.*

Положим

$$\tilde{x}_\alpha = \left(\tilde{A}^*\tilde{A} + \alpha E\right)^{-1}\tilde{A}^*\tilde{f}, \quad \tilde{\tilde{x}}_\alpha = \left(\tilde{A}^*\tilde{A} + \alpha E\right)^{-1}\tilde{A}^*\tilde{f}_\alpha, \quad \tilde{f}_\alpha = \left(\tilde{A}\tilde{A}^* + \alpha E\right)^{-1}\tilde{A}\tilde{A}^*\tilde{f}.$$

**Теорема 10.** $\alpha = \mu$ *справедливы оценки:*

$\|\tilde{x}_\alpha - x_0\|\big|_{\alpha=\mu} \le (m_1\mu + m_2\varepsilon)\,\|f\|\,, \quad f \in R\,(A)\,;$

$\left\|\tilde{\tilde{x}}_\alpha - x_0\right\|\Big|_{\alpha=\mu} \le (m_3\mu + m_4\varepsilon)\,\|f\|\,, \quad f \notin R\,(A)\,.$

Оптимальный порядок $O\,(\mu + \varepsilon)$ сходимости метода регуляризации
А. Н. Тихонова для уравнений с нормально разрешимым оператором при $\alpha = k\mu \to 0$, где $k > 0$ – некоторая постоянная, получен одновременно
С. Джумаевым [31] и В. А. Морозовым, С. Ф. Гилязовым [32]. В этих работах соответственно предполагались $(\alpha, \beta)$-расщепляемость оператора $A$ и истокопредставимость искомогорешения. Этому окончательному результату предшествовали исследования многих авторов (см. напр., [33], [34]), в которых при $\alpha \sim \mu$.максимальным порядком являлся $O\left(\mu^{2/3} + \varepsilon\right)$ для совместного случая $f \in R\,(A)$ и $O\left(\mu^{1/2} + \varepsilon\right)$ для несовместного случая $f \notin R\,(A)$.

Работа выполнена в соответствии с грантом РФФИ № 13-01-00096а.

## Литература

1. Тихонов А Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
2. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983. 200с.
3. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: МГУ, 1974. 360 с.
4. Морозов В. А. $L$-псевдообращение и его свойства // Доклады Академии наук СССР. 1977. Т. 233, № 2. С. 291–294.
5. Морозов В. А., Назимов А. Б. К теории $L$-псевдообращения // Численный анализ: методы, алгоритмы, программы. М.: МГУ. 1983. С. 20–29.
6. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: СО АН СССР. 1962. 92 с.
7. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М: Наука. 1980. 288 с.
8. Фадеева В. Н. Сдвиг для систем с плохо обусловленными матрицами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. Т. 5, № 5. С. 907–911.
9. Бакушинский А. Б. Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1967. Т. 7, № 3. С. 672–676.
10. Бакушинский А. Б. Избранные вопросы приближенного решения некорректных задач. М.: МГУ, 1968. 90 с.
11. Сидоров Н. А., Треногин В. А. Об одном подходе к проблеме регуляризации на основе возмущения линейных операторов // Математические заметки. 1976. Т. 20, № 5. С. 747–752.
12. Треногин В. А., Сидоров Н. А. О регуляризации по Тихонову задачи о точках бифуркации нелинейных операторов // Сибирский математический журнал. 1976. Т. 17, № 2. С. 402–413.
13. Афендикова Н. Г., Лифанов И. К. К численному решению сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши и Гильберта // Препринт. М.: ИТЭФ. 1986. № 73. 21 с.

14. Афендикова Н. Г. Численное решение сингулярного интегрального уравнения первого рода с кратным интегралом с ядрами Гильберта // Известия вузов. Серия математика. 1988. № 3. С. 3–8.
15. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К., Солдатов М. М. Метод дискретных особенностей в плоских задачах теории упругости // Прикладная математика и механика. 1983. Т. 47, вып. 5. С. 781–789.
16. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука. 1985. 256 с.
17. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). М.: ТОО "Янус", 1995. 520 с.
18. Лифанов И. К., Тыртышников Е. Е. Теплицевы матрицы и сингулярные интегральные уравнения // Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1990. Вып. 7. С. 94–273.
19. Назимов А.Б., Мухамадиев Э.М., Морозов В.А. Классический и регуляризованный операторы Пуассона в пространствах непрерывных и ограниченных функций. Вологда: ВоГТУ, 2010. 148 с.
20. Назимов А. Б., Морозов В. А., Мухамадиев Э. М., Муллоджанов М. Метод регуляризации сдвигом: Теория и приложения. Монография. Вологда: ВоГТУ, 2012. 368 с.
21. Назимов А. Б., Джумаев С. Об одном способе приближенного вычисления квазирешений // Доклады Академии наук Таджикской ССР. 1983. Т. 26, № 4. С. 195–198.
22. Назимов А. Б. Морозов В. А. К теории $L$-псевдообращения // Численный анализ: Методы, алгоритмы, программы. М.: МГУ. 1983. С. 20–29.
23. Иванов В. К. О линейных некорректных задачах // Доклады Академии наук СССР. 1962. Т. 145, № 2. С. 270–272.
24. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
25. Назимов А. Б. О скорости сходимости метода регуляризации // Доклады Академии наук Таджикской ССР. 1979. Т. 22, № 10. С. 463–466.
26. Назимов А. Б. О скорости сходимости метода регуляризации в гильбертовом пространстве // Доклады Академии наук Таджикской ССР. 1981. Т. 24, № 4. С. 211–214.
27. Морозов В. А. О принципе невязки при решении несовместных уравнений методом регуляризации А. Н. Тихонова // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1973. Т. 13, № 5. С. 1099–1111.
28. Алиев Б. А. О нахождения условного псевдорешения // Доклады Академии наук Таджикской ССР. 1979. Т. 22, № 2. С. 71–74.
29. Мелешко В. И. Исследование устойчивых $L$-псевдообращений неограниченных операторов методом регуляризации // Дифференциальные уравнения. 1979. № 5. С. 921–935.
30. Шафиев Р. А. О регулярных методах вычисления $L$-псевдообратных операторов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1983. Т. 23, № 3. С. 536–544.
31. Джумаев С. О приближенном вычисления псевдорешения // Доклады Академии наук Таджикской ССР. 1982. Т. 25, № 10. С. 584–587.
32. Морозов В. А., Гилязов С. Ф. Оптимальная регуляризация некорректых нормально разрешимых операторных уравнений // Методы и алгоритмы в численном анализе. М.: МГУ. 1982. С. 11–18.
33. Морозов В. А. О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. Т. 6, № 1. С. 170–175.
34. Воеводин В.В. О методе регуляризации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. Т. 9, № 3. С. 671–673.

УДК 517.94

# О разрешимости сингулярного интегрального уравнения Гильберта нейтрального типа и быстрых алгоритмах решения его дискретного аналога

Назимов А.Б.[†], Муллоджанов М.[‡], Менухова Н.О.[†]

**([†]Вологодский государственный университет, Россия)**
**([‡]Худжандский государственный университет им. ак. Б. Гафурова)**

Решение многих теоретических вопросов и прикладных задач приводит к различным классам одномерных, многомерных, линейных и нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Сингулярные уравнения в очень редких случаях решаются в явном виде. Даже в этом случае для получения числовых значений необходимо уметь вычислять сингулярные интегралы. Поэтому как для теории, так и, в особенности, для приложений особое значение приобретает разработка приближенных методов вычисления сингулярных интегралов и решения сингулярных уравнений. Разрешимость и, в частности, однозначная разрешимость сингулярных интегральных уравнений Гильберта нейтрального типа и их дискретных аналогов имеет особое место в рассматриваемом вопросе. В работах Н. Г. Афендиковой [1], С.М. Белоцерковского [2], И. К. Лифанова [2-4], М. М. Солдатова [2], Е. Е. Тыртышникова [4] получен ответ на поставленные вопросы в случаях, когда ядра интегральных операторов в регулярной части уравнения Гильберта нейтрального типа являются отдельно взятыми тригонометрическими функциями. В настоящей работе исследуется данная проблема для сингулярных интегральных уравнений Гильберта нейтрального типа (первого и второго рода) с разностными и суммарными регулярными частями, с ядрами, являющимися произвольными тригонометрическими полиномами, разработан общий подход решения и регуляризация их дискретных аналогов.

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение Гильберта нейтрального типа

$$(Ax)(t) = f(t), \qquad 0 \le t \le 2\pi; \qquad f \in H^\gamma, \tag{1}$$

где

$$A = T + K_1 + K_2, \quad (Tx)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{t-s}{2}x(s)\,ds,$$

$$(K_1x)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_1(t-s)\,x(s)\,ds, \quad (K_2x)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_2(t+s)\,x(s)\,ds;$$

$$k_1(t) = \sum_{m=-M}^{M} b_m e^{imt}, \qquad k_2(t) = \sum_{m=-M}^{M} c_m e^{imt};$$

$M$ – произвольное натуральное число;

$b_{-M},\ \dots,\ b_0,\ \dots,\ b_M$ и $c_{-M},\ \dots,\ c_0,\ \dots,\ c_M$ – произвольные комплексные числа;

$H^\gamma$ – пространство $2\pi$ – периодических комплекснозначных гельдеровых функций с показателем $\gamma$ $(0 < \gamma < 1)$.

Важным моментом в исследовании разрешимости уравнения (1) является информация о спектре оператора $A$:

**Теорема 1.** *Спектром оператора $A : H^\gamma \to H^\gamma$ является множество*

$$\sigma = \left\{\pm i,\ b_0 + c_0,\ \frac{1}{2}\left(b_{-k} + b_k \pm \sqrt{(b_{-k} - b_k + i2)^2 + 4c_{-k}c_k}\right),\ k = 1, \dots, N\right\},$$

причем все точки спектра являются собственными значениями оператора $A$.

Дискретным аналогом уравнения (1) является система линейных алгебраических уравнений

$$A_N x_N = f_N, \tag{2}$$

где $A_N = T_N + K_{1.N} + K_{2.N}$, $T_N$ и $K_{1.N}$ – циркулянтные матрицы, а $K_{2.N}$ – перциркулянтная матрица с первыми строками

$$\left(\frac{1}{N}ctg\frac{t_1 - s_1}{2},\ \ldots\ ,\ \frac{1}{N}ctg\frac{t_1 - s_N}{2}\right)^{\mathrm{T}},\quad \left(\frac{1}{N}k_1\left(t_1 - s_1\right),\ \ldots\ ,\ \frac{1}{N}k_1\left(t_1 - s_N\right)\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\left(\frac{1}{N}k_2\left(t_1 + s_1\right),\ \ldots\ ,\ \frac{1}{N}k_2\left(t_1 + s_N\right)\right)^{\mathrm{T}},$$

$\{s\} = \{s_1,\ \ldots\ ,\ s_N\}$, $\quad \{t\} = \{t_1,\ \ldots\ ,\ t_N\}$ – равномерные сетки на $[0,\ 2\pi]$,

$$s_m = s_0 + mh,\quad m = 1,\ \ldots\ ,\ N,\quad h = \frac{2\pi}{N},\quad t_m = s_m + \frac{\pi}{N},$$

$s_0 \in [-h,\ -h/2]$ – произвольная точка, $N$ – число узлов сеток,

$$\Phi_{\{s\}}u = \left(u\left(s_1\right),\ \ldots\ ,\ u\left(s_N\right)\right)^{\mathrm{T}},\quad \Phi_{\{t\}}u = \left(u\left(t_1\right),\ \ldots\ ,\ u\left(t_N\right)\right)^{\mathrm{T}}$$

– сеточные операторы.

Близость между основным оператором $A$ и его дискретным аналогом$A_N$ устанавливается в следующем утверждении:

**Теорема 2.** $x \in H^\gamma\,(0 < \gamma < 1)$. *Тогда справедливы оценки аппроксимации*

$$\left|\left(\Phi_{\{t\}}\left(Ax\right)\right)_m - \left(A_N\Phi_{\{s\}}x\right)_m\right| = O\left(N^{-\gamma}\ln N\right),\quad m = 1, \ldots, N,$$

$$\left\|\Phi_{\{t\}}A - A_N\Phi_{\{s\}}\right\|_{L_{2,\ N}} = O\left(N^{-\gamma}\ln N\right).$$

Приведем формулировки основных утверждений об однозначной разрешимости задач, связанных с интегральным уравнением (1) и сходимости решений дискретных уравнений (2) к решениям соответствующих задач.

Приведем утверждение о безусловной относительно правой части разрешимости уравнения (1).

Положим $B_k = \begin{bmatrix} i + b_{-k} & c_{-k} \\ c_k & -i + b_k \end{bmatrix}$, $\quad \Delta_k \equiv \det B_k,\quad k = 1, \ldots, N.$

**Теорема 3.** а) *Для однозначной разрешимости уравнения* (1) *для любой* $f \in H^\gamma$ *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$b_0 + c_0 \neq 0,\quad \Delta_k \neq 0,\quad k = 1, \ldots, N. \tag{3}$$

б) *Пусть выполнено условие* (3). *Тогда для любой* $f \in H^\gamma$ *система* (2) *имеет единственное решение* $x_N = A_N^{-1}f_N$ *и справедлива оценка*

$$\left\|A_N^{-1}\Phi_{\{t\}}f - \Phi_{\{s\}}A^{-1}f\right\|_{L_{2,\ N}} = O\left(N^{-\gamma}\ln N\right). \tag{4}$$

Если нарушено хотя бы одно из условий (3), то для разрешимости уравнения (1) необходимо требовать выполнение дополнительных условий от правой части, а для единственности решения – и от искомого решения. Перечислим условия, которые фигурируют в формулировках нижеследующих утверждений:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(s)\,ds = d_0, \quad (5) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0, \quad (5^*)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{is}x(s)\,ds = d_{-1}, \quad (6) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{it}f(t)\,dt = 0, \quad (6^*)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-is}x(s)\,ds = d_{+1}, \quad (7) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-it}f(t)\,dt = 0. \quad (7^*)$$

**Теорема 4.** а) Пусть

$$b_0 + c_0 = 0, \quad \Delta_k \neq 0, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{8}$$

*Тогда для однозначной разрешимости задачи* (1), (5), *где* $d_0$ – *произвольное комплексное число, необходимо и достаточно выполнение равенства* (5*).

б) *Пусть выполнено условие* (8). *Тогда для любой* $f \in H^\gamma$, *удовлетворяющей условию* (5*), *соответствующая дискретная задача имеет единственное решение, для которого справедлива оценка типа* (4).

Без ограничения общности, неоднородные условия (5)-(7) можно заменить соответствующими однородными условиями:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(s)\,ds = 0, \quad (5^{**}) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{is}x(s)\,ds = 0, \quad (6^{**})$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-is}x(s)\,ds = 0. \tag{7**}$$

Действительно, если $x_0 = x_0(t)$ – решение задачи (1), (5**), то $x = x_0 + d_0$ является решением задачи (1), (5), и наоборот.

Пусть для некоторых $k$ $\Delta_k = 0$. Для каждого такого $k$ нужно рассматривать 10 различных случаев. Для определенности будем предполагать, что

$$b_0 + c_0 = 0, \quad \Delta_1 = 0, \quad \Delta_k \neq 0, \quad k = 2, \ldots, N. \tag{9}$$

Рассмотрим некоторые из этих 10 случаев:

$$\text{А) } B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ Б) } B_1 = \begin{bmatrix} 0 & c_{-k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ В) } B_k = \begin{bmatrix} i + b_{-k} & 0 \\ c_k & 0 \end{bmatrix}.$$

**Теорема 5.** а) *Пусть имеют место условия* (9) и А). *Тогда для однозначной разрешимости задачи* (1), (6**), (7**) *необходимо и достаточно выполнение условий* (6*), (7*).

б) *Пусть выполнены условия* (9) и А). *Тогда для любой* $f \in H^\gamma$, *удовлетворяющей условиям* (6*), (7*), *соответствующая дискретная задача имеет единственное решение, для которого справедлива оценка типа* (4).

**Теорема 6.** а) *Пусть имеют место условия* (9) и Б). *Тогда для однозначной разрешимости задачи* (1), (6**) *необходимо и достаточно выполнение условия* (7*).

б) *Пусть выполнены условия* (7) и Б). *Тогда для любой* $f \in H^\gamma$, *удовлетворяющей условию* (7*), *соответствующая дискретная задача имеет единственное решение, для которого справедлива оценка типа* (4).

**Теорема 7.** а) *Пусть имеют место условия* (9) и B). *Тогда для однозначной разрешимости задачи* (1), ($7^{**}$) *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(c_1e^{it}-(i+b_{-1})\,e^{-it}\right)f(t)\,dt=0. \tag{10}$$

б) *Пусть выполнены условия* (9) и B). *Тогда для любой $f\in H^\gamma$, удовлетворяющей условию* (10) *соответствующая дискретная задача имеет единственное решение, для которого справедлива оценка типа* (4).

**Работа выполнена в соответствии с грантом РФФИ № 13-01-00096а.**

1. Афендикова Н. Г. Численное решение сингулярного интегрального уравнения первого рода с кратным интегралом с ядрами Гильберта // Известия вузов. Серия математика. 1988. № 3. С. 3–8.
2. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К., Солдатов М. М. Метод дискретных особенностей в плоских задачах теории упругости // Прикладная математика и механика. 1983. Т. 47, вып. 5. С. 781–789.
3. Лифанов И. К. О некорректности и регуляризации численного решения сингулярных уравнений // Доклады Академии Наук СССР. 1980. Т. 255, № 5. С. 1046–1050.
4. Лифанов И. К., Тыртышников Е. Е. Теплицевы матрицы и сингулярные интегральные уравнения // Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1990. Вып. 7. С. 94–273.
5. Назимов А. Б.. Муллоджанов М. О разрешимости сингулярного интегрального уравнения Гильберта и его дискретного аналога // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2009. Т. 52, № 9. С. 674–680.
6. Назимов А. Б., Мухамадиев Э. М., Морозов В. А., Муллоджанов М. Метод регуляризации сдвигом: Теория и приложения. Монография. Вологда: ВоГТУ, 2012. 368 с.

УДК 517.956

## О представление решений одной системы двух уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными коэффициентами

Норкулов Р.О.

**(Институт предпринимательства и сервиса)**

Ранее в работах [1]-[6] были изучены некоторые классы линейные и нелинейные системы уравнений в частных производных второго порядка, с одной и со многими сингулярными коэффициентами и с параметром. В многих случаях были доказаны теоремы существования и единственности решений систем.

По аналогии указанным работам, в настоящей работе рассматривается один класс системы уравнений второго порядка, со многими сингулярными линиями, например, вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a\left(x,\,y,\,z,\,u'_x\right),\quad \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}=\frac{b\left(x,y,z,u'_x\right)}{(z-z_0)^\gamma(x-x_0)^\alpha} \tag{1}$$

где $a,\,b\in c^2\left(\overline{\Pi}_3\right)$, $u\in c^3\left(\Pi_3^{(0)}\right)$, $\Pi_0=\overline{\Pi}_3-\{\Gamma_1+\Gamma_3\}$, $\alpha,\gamma\geq 0$.

В системе уравнений (1) делая замену $\frac{\partial u}{\partial x}=u'_x=V$, где $V$- новая неизвестная функция, преобразуем её к виду

$$\frac{\partial V}{\partial x}=a\left(x,\,y,\,z,\,V\right),\quad \frac{\partial V}{\partial y}=\frac{b\left(x,\,y,\,z,\,V\right)}{\left(x-x_0\right)^\alpha\left(z-z_0\right)^\gamma},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=V \tag{2}$$

Для системы уравнений (2) условием совместности будет:

$$(x-x_0)^{\alpha+1}(z-z_0)^{\gamma}\,a'_y+(x-x_0)\,b\cdot a'_V=(x-x_0)\,b'_x+(x-x_0)\,a\cdot b'_V-\alpha\,b \tag{3}$$

Допустим, что условие (3) выполняется, но нетождественно. Тогда решая (3) как функциональное соотношение, имеем: $V=h\,(x,\,y,\,z)$. Если эта функция удовлетворяет системе (2), то она будет одним из частным её решением. Далее, подставляя $V=h\,(x,\,y,\,z)$ в третье уравнение (2), интегрируя $\frac{\partial u}{\partial x}=h\,(x,\,y,\,z)$, имеем: $u\,(x,\,y,\,z)=\phi\,(y,\,z)+\mathrm{H}\,(x,\,y,\,z)$. В этом случае имеем, что многообразие решений системы (1) определяется через одну произвольную функцию $\phi\,(y,\,z)$. Если же $V=h\,(x,\,y,\,z)$ не удовлетворяет системе (2), то системы (2) и (1) также будут несовместными.

Допустим, что условие (3) будет выполнено по всем переменным. Тогда учитывая, что первое уравнение системы (2) регулярная по всем переменным, поэтому решая ее как регулярное обыкновенное дифференциальное уравнение с параметром, удовлетворяющем начальному условию:

$$V=\phi_1\,(z)\,,\ \text{при условии } x=x_0, y=y_0 \tag{4}$$

имеем

$$V=F\,(x,\,y,\,z{,}w(y,z))\,,(\text{w - новая неизвестная функция}). \tag{5}$$

Теперь дифференцируем эту функцию по переменной $y$, подставим ее результат во второе уравнение системы (2).

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{b\,[x,\,y,\,z,\,F\,(x,\,y,\,z,\,w\,(y,\,z))]}{(x-x_0)^{\alpha}\,(z-z_0)\,\gamma}.$$

Откуда имеем:

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{1}{F'_w}\cdot\left[\frac{b\,(x,\,y,\,z,\,F\,(x,\,y,\,z,\,w\,(y,\,z)\,)}{(x-x_0)^{\alpha}\,(z-z_0)^{\gamma}}-\frac{\partial F}{\partial y}\right],\quad \frac{\partial F}{\partial w}\neq 0 \tag{6}$$

Легко показать, что правая часть уравнения в частных производных (6) не зависит от переменного $x$. Причём, правая часть уравнении (6) регулярна по переменной $y$, поэтому интегрируя ее с начальным условием (4):

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{1}{F'_w}\left[\frac{b\,(x_0,\,y,\,z;\,F\,(x_0,\,y,\,z\,w\,(y,\,z\,)}{(x-x_0)^{\alpha}\,(z-z_0)^{\gamma}}-\frac{\partial F}{\partial y}\right], \tag{7}$$

получим некоторую функцию $W=\Phi[(x_0,\,y,\,z_0,z)\,,\phi_1\,(z)]$. Подставляя $W=\Phi\,(x_0,...)$ (5), будем иметь:

$$V=F\,[x,\,y,\,z,\,x_0,y_0w\,(y_0,\,y,\,z_0,z)\,,\phi_1\,(z)] \tag{8}$$

имеющую особенность по переменной $x$, $z$ в точках линии $\Gamma_1$ ,$\Gamma_3$ .

Далее, учитывая замену $\frac{\partial u}{\partial x}=V=F\,[x,\,y,\,z,\,x_0,y_0w\,(y_0,\,y,\,z_0,z)]$, проинтегрируем это уравнение и в результате, получим:

$$u\,(x,,\,y,\,z)=\phi\,(y,z)+\int\limits_{x_0}^{x}F[(t,\,y,\,z,\,x_0,y_0,w\,(y_0,\,y,\,z_0,z)\,[\phi_1\,(z)]]\,dt \tag{9}$$

непрерывной по $x$, $y$ в $\overline{\Pi}_3$, в точках линии $z=z_0$ имеющей особенности порядка $\gamma$.

**Теорема 1**. *Пусть в системе (1)* $a,\,b\in C^1\left(\overline{\Pi}_3\right),u\in C^3\left(\Pi_3^{(0)}\right),\Pi_3^{(0)}=\overline{\Pi}_3-\{\Gamma_1+\Gamma_3\}$, $\Gamma_1=\{(x,\,y,\,z)\,|x=0\}\,,\Gamma_3=\{(x,\,y,\,z)\,|z=0\}$. *Если условие совместности (3) выполняется,* *но не тождественно, тогда многообразия решений системы (1) может представиться (может и не представится) через одну произвольную функцию переменных $(y,\, z)$. Если условие (3) будет выполнено тождественно, то многообразие всех решений системы определяется через две произвольные функции $\phi_1\,(z)\,\phi\,(y,\, z)$, непрерывные по $x,\, y$, и по параметру $z$ имеющей особенности порядка $\gamma$.*

**2.** Теперь рассмотрим систему уравнений вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{a(x,y,z)}{(x-x_0)^{\alpha}}\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{b(x,y,z)}{(y-y_0)^{\beta}}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{h(x,y,z)}{(z-z_0)^{\gamma}}, \tag{10}$$

где $a,\, b,h\in C^1\left(\overline{\Pi}_3\right)$, $u\in C^3\left(\Pi_3^{(0)}\right)$, $\Pi_0=\overline{\Pi}_3-\{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3\}$, $\alpha,\gamma\geq 0$. По аналогии п.1., делая замену вида $\frac{\partial u}{\partial x}=V$, где V - новая неизвестная функция, преобразуем систему (10) к системе в полных дифференциалах первого порядка

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{a\,(x,\, y,\, z)}{(x-x_0)^{\alpha}}V,\quad \frac{\partial V}{\partial y}=\frac{b\,(x,\, y,\, z)}{(y-y_0)^{\beta}}V+\frac{h\,(x,\, y,\, z)}{(z-\cancel{z}_0)^{\gamma}},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=V. \tag{11}$$

Условием совместности системы (11) будет:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{(y-y_0)^{\beta}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{(x-x_0)^{\alpha}}\right)\right]V+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h}{(\cancel{z}-z_0)^{\gamma}}\right)-\frac{ah}{(x-x_0)^{\alpha}\,(z-z_0)^{\gamma}}=0. \tag{12}$$

Допустим, условии (12) выполняется, но не тождественно, то решая её относительно неизвестной функции $V$, будем иметь: $V=h_2\,(x,\, y,\, z)$. Если эта

функция удовлетворяет системе (11), то получим, что система (11) имеет некоторое частное решение, а по третьей уравнений из (11) имеем:

$$V\,(x,\, y,\, z)=\phi\,(y,\, z)+H_3\,(x,\, y,\, z) \tag{13}$$

непрерывной во всей области $(\overline{\Pi}_3)$. В противном случае, системы (11) и (10) несовместные. Пусть в системе (11) $a\,(x,\, y,\, z)$ считается вполне определённой функции. При этом, для совместности системой (11) необходимо и достаточно, чтобы функции $b\,(x,\, y,\, z)$ и $h\,(x,\, y,\, z)$ имели вид:

$$\begin{cases} b\,(x,\, y,\, z)=(y-y_0)^{\beta}\left[\alpha\,(y,\, z)+\mathrm{A}'_y\,(x,\, y,\, z)\right]\\ h\,(x,\, y,\, z)=(\cancel{z}-z_0)^{\gamma}\cdot\beta\,(y,\, z)\;e^{\mathrm{A}(x,y,z)},\ \mathrm{A}\,(x,\, y,\, z)=\int_0^x\frac{a(t\,y,\,z)dt}{(t-x_0)^{\alpha}}\end{cases} \tag{14}$$

Тогда система (11) примет вид:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{a\,(x,\, y,\, z)}{(x-x_0)}V,\quad \frac{\partial V}{\partial y}=\left[\alpha\,(y,\, \cancel{z})+\mathrm{A}'_y\,(x,\, y,\, z)\right]\;V+\mathrm{B}\,(y,\, z)\,e^{A(x,y,z)} \tag{15}$$

Так как для системы (15) условие (12) выполняется тождественно, поэтому интегрируя первое уравнение системы, будем иметь:

$$V\,(x,\, y,z)=w\,(y,\, z)\,e^{\mathrm{A}(x,\,y,\,z)} \tag{16}$$

где $w=w\,(y,\, z)$ новая неизвестная функция.

Дифференцируя обе части (16) по переменной $y$, подставим ее результат в системе (15), и получим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\alpha\,(y,\, z)\,w=\beta\,(y,\, z)\,,$$

решение, которое имеет вид:

$$w\left(y,\,z\right)=e^{\mathrm{A}_1(y,\,z)}\left[C_1\left(z\right)+\mathrm{B}_1\left(y,\,z\right)\right]\in C^1\left(\overline{\Pi}_2\right),$$

где $\mathrm{A}_1\left(y,\,z\right)=\int_{y_0}^{y}\alpha\left(\tau,\,z\right)d\tau$, $\mathrm{B}_1\left(y,\,z\right)=\int_{y_0}^{y}e^{-\mathrm{A}(\tau,\,z)}\beta\left(\tau,\,z\right)d\tau$

Тогда многообразия всех решений системы уравнений (10) принимает вид:

$$u\left(x,\,y,\,z\right)=C_2\left(z\right)+e^{\mathrm{A}_1(y,\,z)}\left[C_1\left(z\right)+\mathrm{B}_1\left(y,\,z\right)\right]\int_{x_0}^{x}\exp\left\{\mathrm{A}\left(t,\,y,\,z\right)\right\}dt. \qquad (17)$$

При этом решение системы (10) в случаи $a\left(x_0,\,y,\,z\right)\geq 0$, и $\alpha\leq 1$ всюду $\overline{\Pi}_3$, и $\alpha>1$ в $\Pi_3^{(0)}$непрерывно по всем переменным. Если $a\left(x_0,\,y,\,z\right)<0$, то при всех $\alpha\geq 0$ решение системы (10) в $(\overline{\Pi}_3)$ непрерывно, а при $a\left(x_0,\,y,\,z\right)\geq 0$, $\alpha>1$ в точках линий $x=x_0$ имеет особенности показательного характера на $x$ а по $y$, $z$ непрерывно.

**Теорема 2.** *Пусть в системе уравнений (10) $a,\,b,\,h\in C^1\left(\overline{\Pi}_3\right),u\left(x,\,y,\,z\right)\in C^3\left(\overline{\Pi}_3^{(0)}\right)$. Если условие совместности (12) выполняется, но не тождественно, то возможно, что система (10) разрешима и ее решение определяется формулой вида (13) непрерывной по всех переменным выражающееся одной произвольной функций $\phi\left(y,\,z\right)$, либо не имеет решения. Для того чтобы условие совместности (12) для системы (10) выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы взаимосвязь между функциями $a\left(x,y,\,z\right),b\left(x,y,z\right),$ $h\left(x,y,\,z\right)$ определялись формулами (14). При этом система уравнений (10) разрешима и многообразие её решений определяется формулой вида (17) непрерывной по переменным $y,z$* всюду $\overline{\Pi}_3$*, а по переменной $x$- непрерывно в случае $\alpha\leq 1,a>0$ а в случае $\alpha>1,a>0$ решение системы (10) формулой вида (17) в $\left(\Pi_3^{(0)}\right)$ непрерывно, и в точках линии $x=x_0$ имеет особенности показательного характера.*

## Литература

1. Михайлов Л.Г.- ДАН России, 2002, т.384, №6, с.731-734.
2. Михайлов Л.Г. - ДАН России, 2004, т.398, №2, с.1-4.
3. Михайлов Л.Г. - Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. – Душанбе, Дониш:, 1986, - 116с.
4. Шарипов Б.- Труды, Международной конференции, посвященной 10- летию РТСУ. Душанбе 2005, с. 64-66.
5. Рузметов Э., Норкулов Р.О.- Интегральные представления многообразия решений для некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной поверхностью. Сборник научных статей. Выпуск 7, Душанбе ТГПУ, 1998.
6. Норкулов Р.О.- Интегральные представления многообразия решений для некоторых однородных систем двух уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной поверхностью в трехмерном пространстве. Сборник научных статей. Выпуск 6, Душанбе ТГПУ, 1998.

УДК 517.956

# Об одной системе уравнений неклассического типа в n-мерном пространстве

Нурублоев М.

**(Российско-Таджикский (славянский) университет , Душанбе)**

Исследование разрешимости граничных задач для дифференциальных уравнений высокого порядка вида

$$M^m u = M\left(M...\left(Mu\right)...\right) = 0, n \geq 2 \tag{1}$$

является актуальным, так как здесь наблюдаются новые эффекты разрешимости граничных задач, отличных от случая $u = 0$. Например известная система А.Б. Бицадзе [1, с. 134], для которой задача Дирихле является некорректной определяется итерацией оператора Коши-Римана. Ф. Бракс и Р. Делонге [2, 3, с. 49], исследуя уравнение (1) в случае $M = D$, где $D$ – оператор гиперкомплексного дифференцирования, ввели новый класс функций, который назвали классом моногенных функций.

В отличие от указанных выше работ в данной работе мы исследуем граничную задачу для системы (1), в которой матричным дифференциальным оператором $M$ является оператор сопоставляющий вектору $u = u\left(u_1,\ u_2,\ ...,\ u_n\right)$ левые части уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0\,, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_j} = 0\,, \quad j = \overline{2,\ n}\,, \tag{2}$$

где $u_j\left(j = \overline{1,\ n}\right)$ – искомые вещественные функции, а $m = 4$.

Система (2) при $n \geq 3$ является системой составного типа, а при $n = 2$ система эллиптична.

Следует отметить, что многомерным неклассическим системам первого и второго порядков посвящены довольно много работ [4, с. 189] и имеющиеся там списки литературы. Однако, многомерные неклассические системы высших порядков мало изучены.

Системы уравнений вида (1) при $m \quad = 4$ записывается в виде

$$\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial\, x_1^2}\right)\ \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, u_j + \frac{\partial^4 u_j}{\partial\, x_1^4} = 0\,, \quad j = \overline{2,\ n}$$

$$\Delta^2 u_1 = 0\ , \tag{3}$$

где $u_j\left(x_1,\ x_2,\ x_3, ...,\ x_n\right)$ – искомые функции, а $\Delta$ – оператор Лапласа по всем переменным.

Характеристическая форма системы (3) имеет вид:

$$\chi\ \left(\xi_1,\ \xi_2,\ ...,\ \xi_n\right) = \xi_1^{2(n-2)}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2\right)\ ,$$

следовательно, любая поверхность, задаваемая уравнением $\phi\left(x_2,\ x_3, ...,\ x_n\right) = 0$, будет характеристической для системы.

Построим общее решение системы (3). Нетрудно проверить, что следствием системы (3) является

$$\Delta^2\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) = 0\,, \tag{4}$$

т.е. $\vartheta = \sum\limits_{i=2}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ – бигармоническая функция.

Действуя оператором $\Delta^2$ на систему (3) с учетом (4), получим

$$\frac{\partial u^4}{\partial x_1^4}\Delta^2 u_j = 0\,, \tag{5}$$

Так как система (5) является следствием системы (3), то всякое решение системы (3) удовлетворяет системе уравнений (5).

Всякое решение системы (5) можно представить в виде

$$u_j = \vartheta_j + \omega_j\,, \quad j = \overline{1,\ n}\,, \tag{6}$$

где $\vartheta_j$ – бигармонические функции, а $\omega_j$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^4 \varpi_1}{\partial\, x_1^4} = 0\,, \text{ при этом } \omega_1 = 0\,, \tag{7}$$

Таким образом, если бигармонические функции $\vartheta_j$ и решение $\omega_j$ уравнения (7) удовлетворяют соотношению $\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{\partial_i}{\partial x_i} = 0$, то выражение (6) удовлетворяют системе (3), при этом $\vartheta = \frac{\partial H}{\partial x_i}$, где $H = (x_1,\ x_2, ...,\ x_n)$ – бигармоническая функция в $R^n$, а

$$\omega_j = \sum_{i=1}^{4} x_1^{i-1}\psi_j^{(i)}\ , \tag{8}$$

где $\psi_j^{(i)}$ – четырежды дифференцируемые, ограниченные во всем пространстве функции, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi_j^{(i)}}{\partial x_i} = 0\,.$$

Следовательно, все регулярные в полупространстве $x_1 > 0$ решения системы (3) представляются в виде

$$u_j = \frac{\partial\, H_1}{\partial\, x_j} + x_1\frac{\partial\, H_2}{\partial\, x_j} + \sum_{i=1}^{4} x_1^{i-1}\psi_j^{(i)}\,, \tag{9}$$

где $H_j\,(j = 1,\ 2)$ – гармонические в $R^n$ функции, а $\psi_j^{(i)}$ – определены по формуле (8).

**Задача.** Найти в полупространстве $R_+^n = \{(x_1,\ \ X) : x_1 > 0, \quad X = (x_2,\ x_3,\ ...x_n) \in R^{n-1}\}$ решение системы (3), ограниченное на бесконечности и удовлетворяющее на гиперплоскости $x_1 = 0$ условию

$$f_k\,(x_2,\ x_3,\ ...x_n)\ ,\ \ j = \overline{1,\ n}\,, \tag{10}$$

где $f_k\,(X)$ – заданные достаточно гладкие и достаточно быстро убывающие на бесконечности функции.

Решение задачи будем искать в виде

$$u_j\,(x_1,\ X) = \mathrm{grad}\, H\,(x_1,\ X) + \omega_j\,(x_1,\ X)\ , \tag{11}$$

где $H = H_1 + x_1 H_2,\ \ \Delta H_j = 0\,(j = 1,\ 2)$ , а $\omega_j$ - решение уравнения (11), удовлетворяющего соотношению $\mathrm{div}\,\omega_j = 0$. Поскольку решение задачи находится в классе ограниченных на бесконечности функции, то необходимо положить $H_2 = \psi_j^{(i)} = 0\ \ (i = 2,\ 3,\ 4)$.

Следовательно, решение поставленной задачи будем искать в виде

$$u_j = \frac{\partial\, H_1}{\partial\, x_j} + \psi_j^{(1)}, \quad j = \overline{1,\ n}\ , \tag{12}$$

Используя (11) для $H$и $\omega_j$ из граничного условия (12) получим:

$$\omega_j = f_j\,(X) - \operatorname{grad} H|_{x_1=0}\ , \tag{13}$$

Пусть $G_j\,(X) = H_j\,(0,\ X)$ – значений гармонических функций $H_j\,(x_1,\ X)$ на гармоничности $x_1 = 0$. Тогда применяя к (13) оператор div с учетом (12) и то, что $\operatorname{div}\operatorname{grad} = \Delta$, из (13) получим

$$\Delta G_j = \operatorname{div} f_j$$

из которого следует

$$G_j\,(X) = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{R^n}\frac{\operatorname{div} f_j\,(\xi)}{r^{n-1}}\,d\xi\,,\quad r = |\,X-\xi\,|\,, \tag{14}$$

где $\omega_n$ – площадь единичной сферы в $R^n$. Гармоническая в полупространстве $x_1 > 0$ функция $H_1\,(x_1,\ X)$ по своим граничным значениям $G_j\,(X)$ определяется однозначно [5, с. 259]

$$H_1\,(x_1,\ X) = \frac{x_1}{\omega_n}\int\limits_{R^n}\frac{G_3\,(\xi)}{\left(r^2+x_1^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}\,d\xi\,.$$

Тогда функции $\psi_j^{(1)}\,(X)$ определяются по (12) и (10). Следовательно, исходная задача однозначно разрешена и решение имеет вид

$$u_j = \operatorname{grad} H_1 + f_j - \operatorname{grad} H_1|_{x_1=0}\ , \tag{15}$$

**Теорема.** Если $f_K\,(X)$ ограничены на бесконечности, то задача всегда разрешима и имеет единственное решение, которое определяется формулой (15).

Из приведенного выше проследования вытекает, что характер разрешимости поставленной задачи для системы (3) во многом аналогичен характеру разрешимости задачи Дирихле для сильно эллиптических систем, однако для системы (3) новым моментом является требование более высокой гладкости граничных данных, а именно четырехкратной дифференцируемости $f_j\,(X)$ .

## Литература


1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных – М.: Наука, 1981, 448с.
2. Brachx F. The behavior at infinity of $(R)$ – monogenic functions of a quaternion variable // Quart J // Pure Appl. Math, 1978, v.52, №3, p. 49-60.
3. Delanghe R., Bracrx F. Hypercomlex fungtions theory Hilbert modules with reproducing Rernel // Proc. London Math, Soc. 1978, v,38, №3, p. 545-576.
4. Сафаров Д.Х. Многомерные неклассические системы уравнений с частными производными . – Душанбе, 1996, 229с.
5. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964, 830с.

УДК 517.956

# Интегральные представления и граничные задачи для одной переопределенной системы, полученной итерированием дифференциальных операторов в частных производных первого порядка

Олимов А.Г.

**(Худжандский государственный университет им. ак. Б. Гафурова)**

В прямоугольнике $D = \{a < x < b; \;\; c < y < d\}$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} A_x^2 u = f_1(x,y), & A_x u \equiv \dfrac{\partial u}{\partial x} + p_1(x,y)\,u - q_1(x,y), \\ A_y^2 u = f_2(x,y), & A_y u = \dfrac{\partial u}{\partial y} + p_2(x,y)\,u - q_2(x,y), \end{cases} \qquad (1)$$

где $A_x^2 u = A_x(A_x u)$, $\;A_y^2 u = A_y(A_y u)$, $\;p_i(x,y)$, $q_i(x,y)$, $f_i(x,y)$; $j = 1,2$
известные функции точек прямоугольника $D$.

Определение. Решением системы (1) назовем функцию $u(x,y)$, $\;u(x,y) \in C'(D)$, для которого $A_x u \in C_x'(D)$, $\;A_y u \in C_y'(D)$ и $A_x^2 u$, $\;A_y^2 u$ обращают уравнения системы в тождества, относительно точек $D$.

В настоящем сообщении, используя методику работы [1], при определенных условиях на коэффициенты, построены интегральные представления общего решения системы (1), зависящие от трех произвольных постоянных. Эти представления применены для выяснения постановки и решения ряда граничных задач.

**Литература:**

1. Раджабов Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверх сингулярными коэффициентами. Душанбе, 1992-236с.

УДК 517.954

# Формула представления решения краевых задач для одного уравнения в частных производных с двумя сингулярными граничными линиями

Охунов Н.

**(Худжандский государственный университет им. ак. Б. Гафурова)**

В прямоугольнике $0 < x < a, \quad 0 < y < b$ рассмотрим уравнение

$$-\Delta u + \left(\frac{q^2}{x^2} + \frac{p^2}{y^2}\right) u = 0 \qquad (1)$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ оператор Лапласа, $p$ и $q$ - постоянные числа.

Такое уравнение назовем уравнение с двумя граничными сингулярными линиями.

Уравнение (1) имеет шест серии частных решений:

$$\sqrt{xy}\;\; \mathrm{I}_\nu(kx) J_\mu(ky), \quad \sqrt{xy}\;\; \mathrm{K}_\nu(kx) J_{-\mu}(ky), \qquad (2)$$

$$\sqrt{xy}\ \ J_\nu(kx)I_\mu(ky),\quad \sqrt{xy}\ \ J_{-\nu}(kx)\mathrm{K}_\mu(ky),\qquad (3)$$
$$\sqrt{xy}\cdot x^\nu y^\mu,\quad \sqrt{xy}\cdot x^{-\nu}y^{-\mu}.$$

Причем первые решения каждой серии ограниченны в сингулярных линиях $x=0$ и $y=0$, а вторые неограниченны, точнее ограничение решения, при $x=0$ имеют нуль порядка $\nu+\dfrac{1}{2}$, при $y=0$ нуль порядка $\mu+\dfrac{1}{2}$, а неограниченные имеют полюс порядка $\nu-\dfrac{1}{2}$ и $\mu-\dfrac{1}{2}$ соответственно.

Так как согласно теории функций Бесселя (см. [1]), функция $J_\lambda(x)$ имеет счетное множество положительных корней, а $\mathrm{I}_\lambda(x)$ не имеет вещественных корней, то это различие в представлении решений используется при решения краевых задач.

Общую краевую задачу для уравнения (1) внутри прямоугольника:

$$-\Delta u+\left(\frac{q^2}{x^2}+\frac{p^2}{y^2}\right)u=0\quad \text{в прямоугольнике}\quad 0<x<a,\quad 0<y<b \qquad (4)$$

$$L[u]\equiv\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\Big|_S=f(s)\,,\quad \alpha\geqslant 0,\quad \beta\geqslant 0,\quad \alpha+\beta>0 \qquad (5)$$

нужно разбить на две стандартные. Стандартной задачей в данном случае называется задача, в которой неоднородные граничные условия заданы на линии $x=a$, а на линии $y=b$ граничные условия нулевые или наоборот. Мы предельное значение $u$ не задаем на сингулярных линиях $x=0$ и $y=0$ потому что, на этих линиях $u$, $u'_x$ и $u'_y$ равны нулю (см также [2]).

Имеет место

**Теорема.** Пусть $k_1^{(\mu)}, k_2^{(\mu)},\dots,k_m^{(\mu)},\dots,$ *положительные корни уравнения* $\alpha_1 kJ'_\mu(kb)+\left(\dfrac{\alpha_1}{2b}+\beta_1\right)J_\mu(kb)=0$, *а* $k_1^{(\nu)}, k_2^{(\nu)},\dots,k_m^{(\nu)},\dots,$ *положительные корни уравнения* $\alpha_2 kJ'_\nu(ka)+\left(\dfrac{\alpha_2}{2a}+\beta_2\right)J_\nu(ka)=0$

*Тогда задача*

$$-\Delta u+\left(\frac{q^2}{x^2}+\frac{p^2}{y^2}\right)u=0,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b$$
$$\alpha_1\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_1 u\Big|_{x=0}=0\,,\quad \alpha_1\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_1 u\Big|_{x=a}=f_1(y)\,,$$
$$\alpha_2\frac{\partial u}{\partial y}+\beta_2 u\Big|_{y=0}=0,\quad \alpha_2\frac{\partial u}{\partial y}+\beta_2 u\Big|_{y=b}=f_2(x)\,,$$

*имеет единственное классическое решение в виде*

$$u(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{C_m\frac{\sqrt{x}I_\nu\left(k_m^{(\mu)}x\right)}{L\left[\sqrt{x}I_\nu\left(k_m^{(\mu)}x\right)\right]_{x=a}}\sqrt{y}J_\mu\left(k_m^{(\mu)}y\right)+\right.$$
$$\left.+D_m\frac{\sqrt{y}I_\mu\left(k_m^{(\nu)}y\right)}{L\left[\sqrt{y}I_\mu\left(k_m^{(\nu)}y\right)\right]_{y=b}}\sqrt{x}J_\nu\left(k_m^{(\nu)}x\right)\right\}$$

*где коэффициенты определяются по формулам :*

$$C_m=\frac{1}{\left\|J_\mu(k_m^{(\mu)}\sigma)\right\|_b^2}\int_0^b f_1(\sigma)J_\mu(k_m^{(\mu)}\sigma)\sigma d\sigma,$$

$$D_m = \frac{1}{\left\| J_\nu(k_m^{(\nu)}\sigma) \right\|_a^2} \int\limits_0^a f_2(\sigma) J_\nu(k_m^{(\nu)}\sigma)\sigma d\sigma$$

**Замечание 1**. *Пусть в уравнение* (1) $q = 0$ либо $p = 0$*, тогда уравнение (1) превращается в уравнение с одной сингулярной граничной линией:*

$$-y^2\Delta u + p^2 u = 0, \tag{6}$$

$$-x^2\Delta u + q^2 u = 0. \tag{7}$$

Поскольку при $q = 0$, $\nu = 1/2$ и $I_{1/2} = \sqrt{2/\pi x}\,\mathrm{sh}\, x$, $J_{1/2}(x) = \sqrt{2/\pi x}\sin x$, то ограниченные при $y = 0$ решения уравнения (6) имеют вид:

$$\mathrm{sh}\, kx\sqrt{y}J_\mu(ky), \quad \mathrm{sh}\, k(a-x)\sqrt{y}J_\mu(ky), \quad \sin kx\sqrt{y}I_\mu(ky). \tag{8}$$

а ограниченные при $x = 0$ решения уравнения (7) имеют вид:

$$\sqrt{x}I_\nu(kx)\sin ky, \sqrt{x}J_\nu(kx)\,\mathrm{sh}\, ky, \sqrt{x}J_\nu(kx)\,\mathrm{sh}\, k(b-y) \tag{9}$$

Решения краевых задач для уравнения (6) могут быть разложены по системе (8), а для уравнения (7) по системе (9).

### Литература

1. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций, ч. 1- 4. -Л.; ИЛ, 1949, 798 с.
2. Михайлов Л.Г. //ДАН России, 2002. т. 384. №6. с. 731- 734

УДК 517. 956

## Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений в частных производных с тремя неизвестными функциями в пространстве

Пиров Р.

**(Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни)**

Переопределенные системы с одной неизвестной функцией достаточно хорошо разработаны в работах Э. Гурса ( см. напр. [1]).

Появленио в науке гидродинамики, теории упругости и теории электромагнитного поля во многом способствовало изучение задач со многими неизвестными. Здесь особенно уместно вспомнить общую трёхмерную задачу теории поля (восстановления векторного поля по заданному полю вихрей и дивергенций, содержащее в скалярном виде, четыре уравнение и три неизвестных). Исходя из этого исследованием систем с двумя , тремя и более неизвестными функциями занялась школа академика Михайлова Л.Г. [2], [3], [4].

В настоящей работе рассматривается система

$$u_x,\ u_y, v_x,\ v_z = f^i(x,\ y\ , z; u,\ v,\ w)\ ,\ i = \overline{1,4},\ w_z = f^5(x,\ y,\ z; u,\ v,\ w,\ v_y) \tag{1}$$

где $u,\ w \in c^2()$, $v, f^i, i = \overline{1,5} \in c^2(\Pi)$ , $\Pi$ – замкнутая область удовлетворяющая $|x - x_0| \le a$, $|y - y_0| \le a$, $|u - u_0| \le b$, $|v - v_0| \le b$, $|w - w_0| \le b$, а индекс «нолик» означает значение функций в начальной точке $(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

Основная цель работы заключается в нахождение явных условий совместности, многообразий решений, постановки задач с начальными данными и изучения их разрешимости.

Методика исследования заключается в переходе к системам с большим числом неизвестных и к системам в полных дифференциалах (п.д.-система).

Замена $v_y$ новой неизвестной функцией $v\,(x, y, z)$ (т.е. $v_y$ =R(x, y, z) ) , превращаем нелинейную систему (1) в квазилинейную:

$$u_x, \quad u_y, v_x, \quad v_z = \quad f^i\,(x,\,y\,,z)\,,\, i = \overline{1,\,4}, \quad v_y = R \quad w_z = f^5(x,\,y,\,z; u,\,v,\,w,\,R) \qquad (2)$$

Поэтапные операции перекрестного дифференцирования $u_{xy} = u_{yx}$, $v_{xy} = v_{yx}$, $v_{yz} = v_{zy}$ и $v_{xz} = v_{zx}$, приводят к уравнениям:

$$f_w^1 \cdot w_y - f_w^2 \cdot w_x = \ldots, \quad R_x - f_w^3 \cdot w_y = \ldots, R_z - f_w^4 \cdot w_y = \ldots, \quad f_u^3 \cdot u_z - f_w^4 \cdot w_x = \ldots., \quad (3)$$

где вместо точек фигурируют явные выражения, содержащие правые части (2) и их частные производные первого порядка. При $f_w^4 = 0,\ \ f_u^3 \neq 0$ приходим к

$$u_z R_z = f^k\,(x, y, z, u, v, w, R)\,, \ \ k = 6, 7 \qquad (4)$$

при $f_w^6 \neq 0$ и $f_w^1 \neq 0$ к $w_x w_y R_x = f^i\,(x, y, z, u, v, w, R)\,, \quad i = 8, 9, 10$ (5)

Раскрывая $D_z\,(2_2) = D_y\,(2_2)$ получим

$$R_y = f^{11}\,(x, y, z, u, v, w, R) \qquad (6)$$

Отметим, что $f^i,\ i = \overline{1, 11}$ явно выражаются через правые части (2) и их частными производными первого и второго порядка. Присоединяя (4), (5) и (6) к (2) получим п.д.-систему с четырьмя неизвестными функциями $u,\ v,\ w$ и $R = u_y$. Условиями полной интегрируемости этой системы будут семь функциональных равенств

$$H^i\,(x, y, z, u, v, w, R) \equiv 0,\ i = \overline{1, 7} \qquad (7)$$

Задачи с начальными данными для этой п.д.-системы (эквивалентной исходной системы (1) ставится в виде

$$[u]_0 = c_1,\, [v]_0 = c_2,\, [w]_0 = c_3,\, [v_y]_0 = c_4 \qquad (8)$$

**Теорема.** Пусть дана система (1), где $u, w \epsilon C^2\,(\Pi)\,,\ f^i,\, v \epsilon C^3\,(\Pi)\,,\ i = \overline{1, 5}\ ,\ f_w^4 \equiv 0$, $f_w^3 \neq 0,\ f_w^6 \neq 0$ и $f_R^6 \neq 0$. Тогда при тождественном выполнении условий (7) в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, z_0, u_0, w_0, u_y)$ задача (1) (8) имеет единственное решения. Иными словами при выполнении условий теоремы многообразия решений системы содержит четыре произвольных постоянных.

**Замечание.** Если условие (7) не выполняется тождественно, а разрешимо в виде $R = \varphi\,(x, y, z, u, v, w)\,,\ \varphi \in C^1$ то система приводиться к п.д. относительно трёх неизвестных $u$, $v$, и $w$. Здесь действительно достаточно задать,

$$[u]_0 = c_1,\ \ [v]_0 = c_2,\, [w]_0 = c_3, \qquad (9)$$

что обеспечивает $R \equiv \varphi\ (x_0, y_0, z_0, u_0, w_0, u_y)$ . Ясно, что при этом задача (1) (9) разрешима единственным образом.

## Летература

1. Corsat E. Lecons sur der equation jaux derives partcelles de premier ordre. Parij, 1921, 454p.p

2. Михайлов Л.Г. Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными. 1986, 116с.
3. Пиров Р. О квазилинейных системах четырёх дифференциальных уравнений в частных производных с тремя неизвестными функциями и её приложений. Известия ТОМАНВШ, №1, 2012, стр. 108-111
4. Пиров Р. Об одном классе квазилинейных систем четырёх дифференциалных уравнений в частных производных с тремя неизвестными функциями в пространстве. Материалы международной конференции, посвященной 60-летию академика М.Шабозова, Душанбе, 29-30 июня 2012г, стр. 125-127.


УДК 517.946

## Граничные задачи для неклассических систем уравнений 4-го порядка

Рахмонов Б.А.

**(Таджикский национальный университет)**

В данной работе рассматриваются граничные задачи для одной неклассической системы уравнений 4-го порядка и исследуется характер их разрешимости [1,2].

Рассмотрим неклассическую систему уравнений 4-го порядка

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta - \lambda graddiv\right) u = 0, \quad \lambda > 1, \tag{1}$$

где $u(x,t) = (u_1, u_2, ..., u_m)$ - искомая вектор-функция, $\Delta$, $grad$, $div$ - операторы Лапласа, градиента и дивергенции по $x \in R^m$.

В полупространстве $R_+^{m+1} = \{(x,t) : x \in R^m, t > 0\}$ с границей $\Gamma = \{t = 0\}$ рассмотрим задачу.

**Задача A.** *Найти в полупространстве $R_+^{m+1}$ решение $u(x,t)$ системы (1), удовлетворяющее условиям*

$$u|_{t=0} = \psi_0(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi_1(x), \quad u_{tt}|_{t=0} = \psi_2(x), \quad u_{ttt}|_{t=0} = \psi_3(x), \tag{2}$$

*где $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x)$ - заданные достаточно гладкие и ограниченные на бесконечности вектор-функции.*

Систему (1) сведём к системе уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = V(x,t),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \Delta V - \lambda graddiv V = 0.$$

Следовательно, задача $A$ разбивается на две следующие задачи:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\Delta V + \lambda graddiv V, \tag{3}$$

$$V|_{t=0} = \psi_4(x), \quad divV_t|_{t=0} = \psi_5(x), \tag{4}$$

где

$$\psi_4(x) = \psi_2(x) - \Delta\psi_0(x), \quad \psi_5(x) = div\psi_3(x) - div\Delta\psi_1(x),$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = V(x,t), \tag{5}$$

$$u|_{t=0} = \psi_0(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi_1(x). \tag{6}$$

Из системы (3) следует, что вектор-функция $\omega(x,t) = rotV$ удовлетворяет уравнению [2]

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + \Delta\omega = 0, \tag{7}$$

а вектор-функция $\theta(x,t) = divV$ удовлетворяет системе вида

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = (\lambda - 1)\Delta\theta. \tag{8}$$

Тогда задача (3) - (4) распадается на задачу Коши

$$\theta(x,0) = div\psi_4(x), \quad \theta_t(x,0) = \psi_5(x), \tag{9}$$

для волнового уравнения (8) и на задачу Дирихле

$$\omega(x,0) = rot\psi_4(x), \tag{10}$$

для уравнения Лапласа (7). Решая задачу Коши (8), (9), найдем вектор-функцию $\theta(x,t)$ при $t \geq 0$. Решая задачу Дирихле (7),(10), найдем вектор-функцию $\omega(x,t)$ при $t \geq 0$ [3], причем $div\omega(x,t) = 0$. Если $\theta(x,t)$ и $\omega(x,t)$ известны, то, зафиксировав $t \geq 0$, решим переопределенную систему с заданными правыми частями:

$$divV = \theta(x,t), \quad rotV = \omega(x,t). \tag{11}$$

При выполнении условия $div\omega(x,t) = 0$ система (11) совместна и ее решение представляется в виде [2]

$$V(x,t) = -\frac{1}{(m-2)|\sigma|} grad \int\limits_{R^m} \frac{\theta(t,\xi)}{|\xi - x|^{m-2}} d\xi + \frac{1}{(m-2)|\sigma|} rot \int\limits_{R^m} \frac{\omega(t,\xi)}{|\xi - x|^{m-2}} d\xi, \tag{12}$$

где $|\sigma|$–площадь поверхности единичной сферы в $R^m$.

Используя представление решения (12) и начальные условия (4), будем иметь

$$V(0,x) = -grad \frac{1}{(m-2)|\sigma|} \int\limits_{R^m} \frac{\theta(0,\xi)}{|\xi - x|^{m-2}} d\xi + \frac{1}{(m-2)|\sigma|} rot \int\limits_{R^m} \frac{\omega(0,\xi)}{|\xi - x|^{m-2}} d\xi =$$

$$= -\frac{1}{(m-2)|\sigma|} grad \int\limits_{R^m} \frac{div\psi_4(x)}{|\xi - x|^{m-2}} d\xi +$$

$$+ \frac{1}{(m-2)|\sigma|} rot \int\limits_{R^m} \frac{rot\psi_4(x)}{|\xi - x|^{m-2}} d\xi =$$

$$= -graddiv \left( \frac{1}{(m-2)|\sigma|} \int\limits_{R^m} \frac{\psi_4(x)(\xi)}{|\xi - x|^{m-2}} d\xi \right) +$$

$$+rotrot\left(\frac{1}{(m-2)|\sigma|}\int\limits_{R^m}\frac{\psi_4(x)(\xi)}{|\xi-x|^{m-2}}d\xi\right)=$$

$$=-graddiv\left(\frac{1}{(m-2)|\sigma|}\int\limits_{R^m}\frac{\psi_4(x)(\xi)}{|\xi-x|^{m-2}}d\xi\right)+$$

$$+graddiv\left(\frac{1}{(m-2)|\sigma|}\int\limits_{R^m}\frac{\psi_4(x)(\xi)}{|\xi-x|^{m-2}}d\xi\right)+$$

$$+\Delta\left(\frac{-1}{(m-2)|\sigma|}\int\limits_{R^m}\frac{\psi_4(x)(\xi)}{|\xi-x|^{m-2}}d\xi\right)=\psi_4(x).$$

Далее, в силу второго равенства (4) имеем

$$V_t(0,x)=-grad\frac{1}{(m-2)|\sigma|}\int\limits_{R^m}\frac{\theta_t(0,\xi)}{|\xi-x|^{m-2}}d\xi+rot\frac{1}{(m-2)|\sigma|}\int\limits_{R^m}\frac{\omega_t(0,\xi)}{|\xi-x|^{m-2}}d\xi,$$

$$divV_t(0,x)=\Delta\left(\frac{-1}{(m-2)|\sigma|}\int\limits_{R^m}\frac{\psi_5(x)}{|\xi-x|^{m-2}}d\xi\right)=\psi_5(x),$$

По известной правой части, теперь можно найти решение система уравнения (5), удовлетворяющее условиям (6) в виде [4]

$$u(x,t)=\frac{1}{(n-2)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\int\limits_0^t\left(t^2-r^2\right)^{\frac{n-3}{2}}rT_r(\psi_0)dr+$$

$$+\frac{1}{(n-2)!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int\limits_0^t(t^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}}T_r(\psi_1)dr+$$

$$+\frac{1}{(n-2)!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int\limits_0^t d\zeta\int\limits_0^\zeta(\zeta^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}}rT_r[V(x,t-\zeta)]dr, \qquad (13)$$

где $T_r(f)$ - обозначает среднее значение функции $f$ на сфере радиуса $r$ с центром в точке $(\xi_1,\xi_2\ldots,\xi_n)$:

$$T_r[f(x_1,x_2,\ldots,x_n)]=\frac{1}{\sigma_n r^{n-1}}\int\limits_{\sum\limits_{i=1}^n(x_i-\xi_i)^2=r^2}f(x_1+\xi_1,\ldots,x_n+\xi_n)d\xi,$$

$\sigma_n$-площадь $n$-мерной единичной сферы.

Таким образом, имеет место следующий результат.

**Теорема .** Если $\psi_0(x),\psi_1(x),\psi_2(x),\psi_3(x)$ достаточно гладкие в $R^m$ вектор-функции, то задача **A** однозначно разрешима и ее решение представимо через решение задачи (3)-(4) в виде (13).

**Литература**

1. Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1987, 415 с.
2. Сафаров Д.Х. Неклассические системы уравнений. – Душанбе: Дониш, 2008, 431 с.
3. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: МИР, 1964, 830 с.
4. Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г. и др. Линейные уравнения математической физики. – М.: Наука, 1964, 367 с.


УДК 517.968.2

## Задачи типов Римана-Гильберта для одного класса двумерного комплексного интегрального уравнения с граничной особой линией


Раджабов Н.

**(Таджикский национальный университет)**


Пусть $D = \{|Z| < R\}$ и $\Gamma = \{|z| = R\}$. В области $D$ рассмотрим интегральное уравнение следующего вида

$$\varphi(z) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_D \left[\sum_{m=1}^{n} p_m ln^{m-1}\left(\frac{R-r}{R-\rho}\right)\right] \frac{exp\,[i\psi]\,\varphi(t)\,d\xi d\eta}{(R-\rho)(t-z)} = f(z), \tag{1}$$

где $z = x + iy$, $t = \xi + i\eta$, $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$, $\rho^2 = x^2 + y^2, \psi = argt$ $p_j\,(1 \leqslant j \leqslant n)$ – заданные вещественные постоянные , $f(z)$ – заданная функция , $\varphi(z)$ – искомая функция.

Решение интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций $\varphi(z) \in C\left(\overline{D}\right)$, обращающихся в нуль на $\Gamma$ и при $r \to R$ имеющих следующие асимптотическое поведение

$\varphi(z) = o\left[(R-r)^{\varepsilon}\right], \quad \varepsilon > 0$ при $r \to R$.

Уравнение типа (1) при $p_j = 0$(j=2,3, ....) с граничными и внутренними сингулярными и сверх-сингулярными линиями и их приложением посвящены [1]-[6]. Для исследования интегрального уравнения (1) используем методику, разработанную в главе 9 работы [4] и [1]-[3].

В дальнейшем будем пользоваться следующими утверждениями

**Теорема 1**. *Пусть в интегральном уравнении (1)* $p_j\,(1 \leqslant j \leqslant n)$ *такие ,что корни алгебраического уравнения*

$$\lambda^n + \sum_{m=1}^{n} p_m \lambda^{n-m}\,(m-1)! = 0 \tag{2}$$

$\lambda_j(1 \leqslant j \leqslant n$ *– вещественные, разные и положительные,* $f(z) = f(r) \in C\left(\overline{D}\right)$, $f(t) = 0$, $t \in \Gamma$ *и представимо в виде*

$$f(z) = f(r) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k\,(R-r)^{k+\gamma} \tag{3}$$

*где* $\gamma = const > 0, f_k$ *заданные постоянные*

$$(k+\gamma)^n + \sum_{m=1}^{n} p_m (k+\gamma)^{n-m}\,(m-1)! \neq 0 \tag{4}$$

*для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда интегральные уравнение (1) всегда разрешимо и его общее решение содержит n произвольных аналитических функций комплексного переменного z и дается при помощи формулы*

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{n} {}_k(z)(R-r)^{\lambda_k} +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+\gamma)^n}{(k+\gamma)^n + \sum\limits_{m=1}^{n} p_m (k+\gamma)^{n-m}(m-1)!}(R-r)^{k+\gamma} \equiv \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(z)(R-r)^{\lambda_k} + K_\gamma[f[z]] \quad (5)$$

*где $\Phi_k(z)\,(1 \leqslant k \leqslant n)$- произвольные аналитические функции комплексного переменного z в D.*

**Теорема 2.** *Пусть выполнено все условия теоремы 1 и решение интегрального уравнения (1) , функция $\varphi(z) \in C^{(n-1)}(D)$. Тогда в представление (5), аналитические функции $\Phi_k(z)\,(1 \le k \le n)$ через значение $\varphi(z)$ и его производные $(n-1)$-го порядка находятся по формуле*

$$\Phi_k(z) = \frac{(R-r)^{-\lambda_k}}{\Delta_0} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \Delta_j^k D_{\overline{z}}^{j-1}[\varphi(z) - K_\gamma[f[z]]], \quad 1 \le k \le n, \quad (6)$$

*где* $D_{\overline{z}} = 2exp[-i\theta]\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$,

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1, 1, 1 \ldots..1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots.\lambda_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \\ \lambda_1^{n-1}, \lambda_2^{n-1}, \ldots..\lambda_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_j^k = \begin{vmatrix} 1\,, 1, \ldots\ldots\ldots.1, \;\; 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..1 \\ \lambda_1\,, \lambda_2, \ldots\ldots\ldots\lambda_{k-1}\; \lambda_{k+1}, \ldots\ldots..\lambda_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1^{j-1}, \ldots\ldots\ldots\lambda_{k-1}^{j-1}, \lambda_{k+1}^{j-1}, \ldots\ldots\ldots\lambda_n^{j-1} \\ \lambda_1^{j+1}, \ldots\ldots\ldots\lambda_{k-1}^{j+1}, \lambda_{k+1}^{j+1}, \ldots\ldots\ldots\lambda_n^{j+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1^{n-1}, \ldots\ldots\ldots\lambda_{k-1}^{n-1}, \lambda_{k+1}^{n-1}, \ldots\ldots\ldots\lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Интегральные представление (5) и его формулы обращение (6) дают возможности для интегрального уравнения (1) ставит, и исследовать следующую граничную задачу типа Римана – Гильберта

**Задача $\mathbf{N_1}$.** Требуются найти решение интегрального уравнения (1), когда параметры $p_j\,(1 \le j \le n)$ такие , что корни алгебраического уравнения (2) вещественные, разные, положительные . Функция $f(z) = f(r)$ представимо в виде абсолютно и равномерно сходящего обобщенного степенного ряда (3), по граничным условиям

$$Re\left[\left[(R-r)^{-\lambda_k}(a_k(t) + b_k(t)) D_{\overline{z}}^{k-1}\varphi(t)\right]\right]_\Gamma = B_k(t), \quad 1 \le k \le n, \quad (7)$$

$$D_{\overline{z}}^0 \varphi(z) = \varphi(z),$$

где $B_k(t) \quad (1 \le k \le n)$- заданные непрерывные функции точек Г. Подставляя их в формулу (5) , находим решение задачи $\mathbf{N_1}$.

В частности имеет место следующее утверждение

**Теорема 3.** *Пусть* $\theta_k = Ind\left[\left(a_k\left(t\right) + b_k\left(t\right)\right)\right]$ *, и в интегральном уравнение (1) параметры* $p_j\left(1 \le j \le n\right)$ *, функция* $f\left(z\right)$ *удовлетворяют всем условиям теоремы 1. Тогда если* $\theta_j \ge 0\left(1 \le j \le n\right)$ *, то задача* $N_1$ *всегда разрешимо и его общее решение содержит* $2\sum\limits_{j=1}^{n}\theta_j + n$ *произвольных постоянных. При этом однородная задача имеет* $2\sum\limits_{j=1}^{n}\theta_j + n$ *линейно-независимых решений. Если* $\theta_j < 0\left(1 \le j \le n\right)$ *, то однородная задача* $\mathbf{N_1}$ *не имеет решение , кроме нулевого. Неоднородная задача разрешимо тогда и только тогда, когда в (7) правые части удовлетворяют* $2\sum\limits_{j=1}^{n}\theta_j - n$ *условии разрешимости. При этом решение задачи* $\mathbf{N_1}$ *выписывается в явном виде.*

Утверждение подобное теореме 2 получено и в остальных возможных случаях.

## Литература


1. Rajabov N. Volterra type integral equation with boundary and interior fixed singularity and super-singularity kernels and their application. –Germany:LAP LAMBERT Academic Publishing , 2011, 282p.
2. Rajabov N. An explicit solution to a class of a second kind complex integral equati, on with singular and super-singular kernels // Functional –Analytic and Complex Methods , their Interactions and Applications to Partial Differential Equations , World Scientific , 2001, pp. 313-329.
3. Раджабов Н. , Раджабова Л. Введение в теорию многомерных интегральных уравнений типов Вольтерра с сингулярными и сверх-сингулярными ядрами и его приложения. Germany. LAP LAMBERT Academic Publishing , 2012, 502p.
4. Раджабов Н. К теории одного класса двумерного комплексного интегрального уравнения , обобщающего интегральное уравнение типа И.Н. Векуа с фиксированным сингулярным ядром //Материалы Второй Международной Российско-Узбекский симпозиум :" Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики", Эльбрус-2012, с. 227-230.
5. Раджабов Н. Радиально-симметричные решения комплексного двумерного нелинейного интегрального уравнения типа И.Н. Векуа с фиксированными сингулярными и сверх-сингулярным ядром //Тезисы докладов международной конференции " Дифференциальные уравнения , теории функций и приложения" посвященной 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа . Новосибирск, 28мая-2июня 2007г., с. 156-157.
6. Раджабов Н. К теории одного класса нелинейного интегрального уравнения типа И.Н. Векуа с фиксированными сингулярными ядрами. Известия АН Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. №3(148), 2012, с.7-20.
7. Раджабов Н. К теории одного класса двумерного комплексного интегрального уравнения , для которой вся граница является особой линией//Материалы IV Международная конференция " Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии , информатики и физики", Нальчик, Терскол, Россия, 4-8 декабря 2013г. с.225-228.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи, Из-во " наука", м. 1977, 640с.

УДК 517.968.220

# Кривые задачи для одного класса двумерного симметричного по одному из переменных интегрального уравнения Вольтерра с двумя сингулярными линиями

Раджабов Н., Зарипов С.

**(Таджикский национальный университет)**

Через D обозначим прямоугольник следующего вида

$D_0 = \{(x,y) : -a < x < a,\ o < y < b\}$ соответственно обозначим

$D_0^- = \{ -a < x < ,\ o < y < b\}$ $D_0^+ = \{o < x < a,\ o < y < b\}$ $\Gamma_0 = \{-a < x < a\}$, $\Gamma_1 = \{0 < y < b\}$. В области D$= \dfrac{D_0}{\Gamma_1}$ рассмотрим двумерное интегральное уравнения типа Вольтерра следующего вида

$$\varphi(x,y) + \int\limits_{-x}^{x} \frac{A(t)\varphi(t,y)}{|t|}dt + \int_0^y \frac{B(s)\varphi(x,s)}{s}ds + \int_{-x}^{x} \frac{dt}{|t|} \int_0^y \frac{c(t,s)\varphi(t,s)}{s}ds = f(x,y) \quad (1)$$

где $A(x)$, $B(y)$ и $C(x,y)$ – функции, заданные соответственно на $\Gamma_0$, $\Gamma_1$ и $\bar{D}_0$, $f(x,y)$ функция заданная на D, $\varphi(x,y)$ - искомая функция. Причем функция $A(x)$ в точке $x = 0$ может имеет разрыв первого рода.

Проблемы исследованиям одномерных, двумерных и в некоторых случаях многомерных интегральных уравнений Вольтерровского типа с одной и двумя сингулярными линиями и областями посвящены работы [1-6].

Целью настоящей работы является выяснение подстановка различных краевых задач для уравнения (1) и их исследование.

Заметим, что задача типов Коши для уравнения (1) ставится в тех случаях, кода общее решение интегрального уравнения содержит одну или две произвольное функции одного переменного.

В дальнейшем будем воспользоваться следующем утверждением.

**Теорема 1.** *Пусть в интегральном уравнение (1) A(x)∈ $C(\Gamma_0)$, и в точке x=0 может имеет разрыв первого рода, и в окрестности точек x=0, A(x) удовлетворяют условии Гёльдера и A(+0)<A(-0). Функция B(y) в окрестности точек y=0, удовлетворяет условии Гёльдера B(0)>0. Функция f(x,y)* $\in C(\bar{D}_0)$, *f(0,0) =0, со следующим асимптотическим поведением* $f(x,y) = 0[|x|^{\delta_1} y^{\varepsilon}], \delta_1 > |E(0)|, \varepsilon > 0$ *при (x,y)*$\to (0,0)$. *Тогда интегрального уравнения (1) всегда разрешимо и его решения из класса* $C(\bar{D}_0)$, *даётся формулой*

$$\varphi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{K}_1[f(x,y), c_1(y)],\ \text{когда}\ (x,y) \in \mathrm{D}^+ \\ \mathrm{K}_3[f(x,y), c_1(y)],\text{когда}\ (x,y) \in D^- \end{array} \right\} \quad (2)$$

*где* $c_1(y)$ *– произвольная непрерывная точек* $\Gamma_1$, *причем* $c_1(0) = 0$, со *следующим асимптотическим поведением* $c_1(y) = 0[y^{\varepsilon}]$, $\varepsilon > 0$ *при* $\to 0$,

$$\mathrm{K}_1[f(x,y), c_1(y)] = \mathrm{K}_2[\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})] + x^{|E(0)|} \exp\left(-W_E^{|}(x)\right) c_1(y),$$

$$\mathrm{K}_3[f(x,y), c_1(y)] = \mathrm{K}_4[\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})] - x^{|E(0)|} \exp\left(-W_E^{|}(x)\right) c_1(y).$$

$$\mathrm{K}_2[\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})], \mathrm{K}_4[\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})]$$

– *известные интегральные операторы* в [5].

Как следует из теоремы 1 в случае B(0)>0, E(0)<0, общее решение интегрального уравнения (1) содержит одну произвольную функцию переменного $y$. В этом случае ставится и исследуется, следующая задача.

**Задача $\mathbf{R_1}$.** Требуется найти решение интегрального уравнения (1) при B(0)>0, E(0)<0, по граничному условию.

$$(|x|^{E(0)}\phi(x,y))_{x=0} = D_1^+(y),$$

где

$D_1^+(y)$ – заданная функция точек $\Gamma_1$.

О разрешимости задача $R_1$ имеет место следующие утверждения.

**Теорема 2.** *Пусть в интегральном уравнение (1) функции A(x), B(y), f(x,y) удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Кроме того пусть в задача* $R_1$ *функция* $D_1^+(y) \in C(\Gamma_1)$, $D_1^+(0) = 0$, *со следующим асимптотическим поведением*

$$D_1^+(y) = 0\left[y^{\gamma_1}\right], \quad \gamma_1 > |B(0)| \text{ при } y \to 0.$$

*Кроме того пусть существуют предел*

$$f_1(y) = \left(|x|^{E(0)} f(x,y)\right)_{x=0}$$

*причём* $f_1(0) = 0$, *со следующим асимптотическим поведением*

$$f_1(y) = 0\left[y^{\gamma_2}\right], \quad \gamma_2 > |B(0)| \text{ при } y \to 0.$$

*Тогда задача* $R_1$ *имеет единственное решение, которое дается формулой (2), где* $c_1(y)$ *определяется при помощи формулы*

$$c_1(y) = D_1^+(y) - f_1(y) + \int_0^y \left(\frac{y}{s}\right)^{|B(0)|} e^{W_b^|(y) - W_b^|(s)} \frac{B(s)}{s} f_1(s)\, ds.$$

Утверждение подобны теореме 1, получено и в случаях $A(+0) < A(-0)$, $E(0) > 0$, $B(0) < 0$ и $E(0) > 0$, $B(0) < 0$.

Так как в случае $E(0) > 0$, $B(0) > 0$ общее решение содержит одну произвольную функцию, а в случае $E(0) < 0$, $B(0) < 0$ общее решение содержит две произвольные функции одного переменного, поэтому в этих случаях также ставятся задачи типов $R_1$ и решение этих задач также найдено в явном виде.

## Литература


1. Раджабов Н. Интегральные уравнении типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверх-сингулярными ядрами и их приложения. Душанбе, 2007, 221с
2. Раджабов Н. Раджабова Л. Введение в теорию многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированными сингулярными и сверх - сингулярными ядрами и их приложении, Germany; LAP LAMBERT Academic Publishing 2011, 502 p.
3. Rajabov N. Volterra type integral equation with boundary and interior fixed singularity and super - singularity kernels and their application Germany; LAP LAMBERT Academic Publishing ; 2011, 282 p.
4. Раджабов Н. многомерного интегральное уравнение вольтеровского типа с сингулярными граничными областями в ядрах. ДАН Росси, 2011, том 473 №2 1-3 с.

5. Раджабов Н, Зарипов С.Об одном двухмерном интегральном уравнении вольтерровского типа с одной граничной и одной внутренней сингулярной линиями //материалы X – школы молодых ученых Российской Федерации. Трескол, 4-8 декабря 2013, 52-55 с.
6. Раджабов Н, Б. Окили. Модельное двумерное симметричное интегральное уравнение вольтерровского типа с одной граничной и одной внутренней сингулярной линей //Вестник Таджикского национального университета 1|2(81) 2012, 43-48 с.

УДК 517.956.6

# Система трёх модельных дифференциальных уравнений первого порядка с одной левой сингулярной точкой

Раджабов Н., Меликов О.

**(Таджикский национальный Университет)**

Пусть $\Gamma = \{x : a < x < b\}$. На $\Gamma$ рассмотрим модельную систему обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида

$$\begin{cases} y_1'(x) + \dfrac{A_{11}y_1(x) + A_{12}y_2(x) + A_{13}y_3(x)}{(x-a)^{\alpha}} = \dfrac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha}} \\ y_2'(x) + \dfrac{A_{21}y_2(x) + A_{22}y_2(x) + A_{23}y_3(x)}{(x-a)^{\alpha}} = \dfrac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha}} \\ y_3'(x) + \dfrac{A_{31}y_3(x) + A_{32}y_3(x) + A_{33}y_3(x)}{(x-a)^{\alpha}} = \dfrac{f_3(x)}{(x-a)^{\alpha}}, \end{cases} \tag{1}$$

где $A_{ij}\,(1 \leq i, j \leq 3)$ – заданные постоянные, $f_j(x)$ $(1 \leqslant j \leq 3)$ – заданные функции, $y_j(x)$ искомые функции.

Допустим, что в систему (1) функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ разлагаются в обобщенные равномерно сходящие степенные ряды следующих видов:

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k1}(x-a)^{k+\gamma}, \tag{2}$$

$$f_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k2}(x-a)^{k+\gamma}, \tag{3}$$

$$f_3(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k3}(x-a)^{k+\gamma}, \tag{4}$$

где $f_{kj}\,(1 \leqslant j \leqslant 3)$ известные постоянные, $\gamma = const > 0,\ \alpha = 1$.

Например, пусть согласно признаку Даламбера существуют следующие пределы

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|f_{k+1,1}|}{|f_{k1}|} = L_1, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{|f_{k+1,2}|}{|f_{k2}|} = L_2\,, \ \lim_{k\to\infty} \frac{|f_{k+1,3}|}{|f_{k3}|} = L_3, \tag{5}$$

и выполнено следующие условии

$$L_1(b-a) < 1, \quad L_2(b-a) < 1, \quad L_3(b-a) < 1, \tag{6}$$

Решение системы (1) будем искать в виде следующих рядов

$$\begin{cases} y_1(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} y_{k1}(x-a)^{k+\gamma} \\ y_2(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} y_{k2}(x-a)^{k+\gamma} \\ y_3(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} y_{k3}(x-a)^{k+\gamma} \end{cases} \tag{7}$$

где $y_{kj}$ $(1 \leqslant j \leqslant 3)$ – неизвестные постоянные.

Подставляя значения $f_j(x)$ и $y_j(x)$ $\quad (1 \leqslant j \leqslant 3)$ в систему (1), имеем:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{3}(x-a)^{k+\gamma-1}y_{k1}(k+\gamma) & +\sum\limits_{k=0}^{3}(x-a)^{k+\gamma-1}\left[A_{11}y_{k1}+A_{12}y_{k2}+A_{13}y_{k3}\right] = \\ & =\sum\limits_{k=0}^{3}(x-a)^{k+\gamma-1}f_{k1} \\ \sum\limits_{k=0}^{3}(x-a)^{k+\gamma-1}y_{k2}(k+\gamma) & +\sum\limits_{k=0}^{3}(x-a)^{k+\gamma-1}\left[A_{21}y_{k1}+A_{22}y_{k2}+A_{23}y_{k3}\right] = \\ & =\sum\limits_{k=0}^{3}(x-a)^{k+\gamma-1}f_{k2} \\ \sum\limits_{k=0}^{3}(x-a)^{k+\gamma-1}y_{k3}(k+\gamma) & +\sum\limits_{k=0}^{3}(x-a)^{k+\gamma-1}\left[A_{31}y_{k1}+A_{32}y_{k2}+A_{33}y_{k3}\right] = \\ & =\sum\limits_{k=0}^{3}(x-a)^{k+\gamma-1}f_{k3} \end{cases} \tag{8}$$

В равенство (8) приравнивая коэффицентов при $(x-a)^{k+\gamma-1}$ в обеих частях, получим

$$\begin{cases} (k+\gamma+A_{11})\,y_{k1}+A_{12}y_{k2}+A_{13}y_{k3}=f_{k1} \\ A_{21}y_{k1}+(k+\gamma+A_{22})\,y_{k2}+A_{23}y_{k3}=f_{k2} \\ A_{31}y_{k1}+A_{32}y_{k2}+(k+\gamma+A_{33})\,y_{k3}=f_{k3} \end{cases} \tag{9}$$

где $(k=0,1,2,\dot{)}$.

Таким образом, при каждой фиксированной $k$ для определение $y_{kj}$ $(1 \leqslant j \leqslant 3)$ мы получили линейную систему трёх уравнений с тремя неизвестными.

Находим решение системы (13) по методу Крамера.

Сначало вычислим $\Delta_k$,

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} k+\gamma+A_{11}, & A_{12}, & A_{13} \\ A_{21}, & k+\gamma+A_{22}, & A_{23} \\ A_{31}, & A_{32}, & k+\gamma+A_{33} \end{vmatrix} \tag{10}$$

Далее вычислим $\Delta_k^j$ $(1 \leq j \leq 3)$

$$\Delta_k^1 = \begin{vmatrix} f_{k1}, & A_{12}, & A_{13} \\ f_{k2}, & k+\gamma+A_{22}, & A_{23} \\ f_{k3}, & A_{32}, & k+\gamma+A_{33} \end{vmatrix} = (-1)^2 f_{k1}\Delta_k^{11} + (-1)^3 f_{k2}\Delta_k^{12} + (-1)^4 f_{k3}\Delta_k^{13} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} f_{kj}\,(-1)^{1+j}\Delta_k^{1j}$$

где

$$\Delta_k^{11} = \begin{vmatrix} k+\gamma+A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & k+\gamma+A_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_k^{12} = \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & k+\gamma+A_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_k^{13} = \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ k+\gamma+A_{22} & A_{23} \end{vmatrix}$$

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x-a)^{k+\gamma} U_k, \tag{11}$$

где

$$U_k = \frac{(-1)^2 f_{k1} \begin{vmatrix} k+\gamma+A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & k+\gamma+A_{33} \end{vmatrix} + (-1)^3 f_{k2} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & k+\gamma+A_{33} \end{vmatrix} + }{}$$

$$\frac{+(-1)^4 f_{k3} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ k+\gamma+A_{22} & A_{23} \end{vmatrix}}{\Delta_k}$$

Далее имеем

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{U_{k+1}}{U_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^2 f_{k+1,1} \begin{vmatrix} k+1+\gamma+A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & k+1+\gamma+A_{33} \end{vmatrix} +}{}\right.$$

$$\frac{+(-1)^3 f_{k+1,2} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & k+1+\gamma+A_{33} \end{vmatrix} + (-1)^4 f_{k+1,3} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ k+1+\gamma+A_{22} & A_{23} \end{vmatrix}}{\Delta_{k+1}}$$

$$\frac{\Delta_k}{(-1)^2 f_{k1} \begin{vmatrix} k+\gamma+A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & k+\gamma+A_{33} \end{vmatrix} + (-1)^3 f_{k2} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & k+\gamma+A_{33} \end{vmatrix} +}$$

$$\left.\frac{}{+(-1)^4 f_{k3} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ k+\gamma+A_{22} & A_{23} \end{vmatrix}}\right| =$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k}\right| \left|\frac{(-1)^2 f_{k+1,1} \begin{vmatrix} k+1+\gamma+A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & k+1+\gamma+A_{33} \end{vmatrix} +}{(-1)^2 f_{k1} \begin{vmatrix} k+\gamma+A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & k+\gamma+A_{33} \end{vmatrix} + (-1)^3 f_{k2} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & k+\gamma+A_{33} \end{vmatrix} +}\right.$$

$$\left.\frac{+(-1)^3 f_{k+1,2} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & k+1+\gamma+A_{33} \end{vmatrix} + (-1)^4 f_{k+1,3} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ k+1+\gamma+A_{22} & A_{23} \end{vmatrix}}{+(-1)^4 f_{k3} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ k+\gamma+A_{22} & A_{23} \end{vmatrix}}\right|$$

$$= \left|\frac{f_{k+1,1}}{f_k}\right| = L_1, \ \ L_1(b-a) < 1.$$

Таким образом, радиус сходимости для неизвестной функции $y_1(x)$ совпадает с радиус сходимости ряда (2).

Аналогичным образом проверяется, что радиус сходимости рядов для $y_2(x)$ и $y_3(x)$ совпадают с радиус сходимости рядов (3) и (4).

Итак доказана следующая теорема

**Теорема.** *Пусть в системе (1) правые части то есть функции* $f_j(x)$ $(1 \leqslant j \leqslant 3)$ *разлагаются в равномерно сходящиеся степенные ряды видов (2), (3), (4). Причем пусть существуют следующие пределы:*

$$L_j = \left|\frac{f_{k+1,j}}{f_{k,j}}\right| \qquad (1 \leqslant j \leqslant 3)$$

причем $L_j(b-a) < 1$.

*Кроме того* $A_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq 3)$ *такие что, детерминант (10)* $\Delta_k \neq 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. *Тогда система (1) в классе функции представимых в виде (7) всегда разрешима и его частное решение даётся при помощи формулы (7). Причем радиус сходимости рядов (7) совпадает с ряд сходимости рядов (2), (3), (4).*

## Литература


1. Rajabov N. Introduction to ordinary differential equation with super-singular coefficients, Dushanbe, 1998, 100p.
2. Раджабов Н. Обобщенные задачи типа линейного сопряжения для общей линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с одной сингулярной и сверх-сингулярной точкой //Труды 9-го Международного симпозиума МДОЗМФ-2000, Орел-2000, 29-мая, 2-июня, с 367-369.
3. Раджабов Н. Задачи типа линейного сопряжения для линейного обыкновенного дифференциального уравнений второго порядка с одной сингулярной и сверх-сингулярной точкой. //Докл. АИ РТ., 1999, т.XI, №4, с.31-34.
4. Раджабов Н. Меликов О. Задачи линейного сопряжения для модельной системы двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с одной внутренней сингулярной точкой.//Вестник Национального университета, 2004, серия математика, №1, с. 102-108.
5. Rajabov N. Higher order ordinary differential equation with super-singular points//Partial Differential and Integral Equation, 347-358, 1999 Kluwer-Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
6. Гахов Ф.Д. Краевые задачи, Из-во "Наука", М.1977, 640с.
7. Н.Раджабов, О.Меликов. Интегральные представления и задачи типов линейного сопряжения для модельной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с одной внутренней сверх-сингулярной точкой. Вестник Таджикского Государственного Национального Университета (научный журнал). Душанбе: "Сино" -2008

УДК 517. 968. 220

# Об одной граничной задаче для интегрального уравнения типа Вольтера с двумя граничными сингулярными точками

Раджабов Н., Саидов С.

**(Таджикский национальный университет)**

Пусть $=\{x; a<x<b\}$ множество точек на вещественной оси. На Г рассмотрим интегральное уравнение

$$\phi(x)+\int_a^x \left\{p+q\ln\left[\left(\frac{x-a}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{t-a}\right)\right]\right\}\frac{\phi(t)\,dt}{(t-a)(b-t)}=f(x), \qquad (1)$$

где $p, q$ заданных постоянные, $f(x)$ заданная функция, $\phi(x)$- искомая функция. Интегральное уравнение (1) при $q=0$ била изучена в [1], [2]. Следуя [1], [2] решение интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций $\phi(x)\in C[a,b)$, $\phi(a)=0$ со следующим асимптотическим поведением $\phi(x)=0\left[(x-a)^{\varepsilon}\right]$, $\varepsilon>0$ при $x\to a$.

В точке $x=b$ решение уравнение (1) могут бить неограниченными или обращаются в нуль. Проблемы исследование интегральных уравнений типов (1) с одной граничной сингулярной или суперсингулярной точкой или с двумя граничными сингулярными точками, посвящено работы [1] – [7].

Как следует из [7] решение интегральные уравнение (1) в зависимости от параметров $p, q$ и знака число $D=p^2-4(b-a)q$ может имеет единственное решение, общее решение может содержать, одну произвольную постоянную, или две произвольные постоянные.

В настоящий работе в случае, когда общее решение уравнение (1) содержать две произвольные постоянные, ставятся и исследуются задачи типа Коши.

**Задача** $K_1$

Требуется найти решение уравнение (1) при $p\prec 0,\ q\succ 0,\ p^2\succ 4(b-a)q$, когда в сингулярной точке $x=a$ задано следующие условия

$$\left.\begin{array}{l}\left[(x-a)^{-\lambda_1}\left(D_{a,b}^x\phi(x)\right)-\lambda_1(b-a)\phi(x)\right]_{x=a}=A\\ \left[(x-a)^{-\lambda_2}\left(D_{a,b}^x\phi(x)\right)-\lambda_2(b-a)\phi(x)\right]_{x=a}=B\end{array}\right\} \qquad (2)$$

где $A, B$ заданные число, $\lambda_2=\frac{-p-\sqrt{D}}{2(b-a)}$ $\lambda_1=\frac{-p+\sqrt{D}}{2(b-a)}$, $D_{a,b}^x=(x-a)(b-x)\frac{d}{dx}$.

**Решение задача** $K_1$**.**

Для нахождение решения задача $K_1$ используем следующую теорему из [1, 2].

**Теорема 1.** *Пусть в интегральном уравнение (1)* $p<0,\ q>0,\ p^2>4(b-a)q$. *Функция* $f(x)\in C[a,b]$, $f(a)=0$ *со следующим асимптотическим поведением*

$$f(x)=0\left[(x-a)^{\delta_1}\right]\quad \delta_1\succ\lambda_1\ \ \lambda_1=\frac{|p|+\sqrt{D}}{2(b-a)}, \qquad (3)$$

$$D=p^2-4(b-a)q\quad x\to a.$$

*Тогда однородное интегральное уравнение (1) в классе функций обращающиеся в нуль в точке* $x=a$ *и неограниченное в точке* $x=b$*имеет две линейно независимых решений видов* $\phi_1(x)=\left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\lambda_1}$, $\phi_2(x)=\left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\lambda_2}$, $\lambda_2=\frac{|p|-\sqrt{D}}{2(b-a)}$, *а неоднородное уравнение (1) всегда разрешимо и его общее решение в классе функций обращающиеся в нуль в точке* $x=a$ *и* *неограниченной в точке* $x = b$ *содержит две произвольные постоянные и дается формулой.*

$$\phi(x) = \phi_1(x)\,c_1 + \phi_2(x)\,c_2 + f(x) - \frac{(b-a)^2}{\sqrt{D}}\int\limits_a^x \left\{\lambda_2^2\left[\left(\frac{x-a}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{t-a}\right)\right]^{\lambda_2} - \right.$$

$$\left. - \lambda_1^2\left[\left(\frac{x-a}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{t-a}\right)\right]^{\lambda_1}\right\}\frac{f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)} \equiv K_{a,b}^{-,1}\left[c_1,\ \ c_2,\ \ f(x)\right], \quad (4)$$

где $c_1, c_2$ – произвольные постоянные.

Далее из интегральные представление (4) находим

$$D_{a,b}^x\phi(x) = \lambda_1(b-a)\,\phi_1(x)\,c_1 + \lambda_2(b-a)\,\phi_2(x)\,c_2 + f(x) -$$

$$- \frac{(b-a)^2}{\sqrt{D}}\int\limits_a^x \left\{\lambda_2^3\left[\left(\frac{x-a}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{t-a}\right)\right]^{\lambda_2} - \right.$$

$$\left.\lambda_1^3\left[\left(\frac{x-a}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{t-a}\right)\right]^{\lambda_1}\right\}\frac{f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)} + p\left(f(x)\right). \quad (5)$$

Таким образом для определения $c_1, c_2$ имеем следующую систему

$$\begin{cases} \phi_1(x)\,c_1 + \phi_2(x)\,_2 = \phi(x) - f(x) + \\ +\frac{(b-a)^2}{\sqrt{D}}\int\limits_a^x \left\{\lambda_2^2\left[\left(\frac{x-a}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{t-a}\right)\right]^{\lambda_2} - \lambda_1^2\left[\left(\frac{x-a}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{t-a}\right)\right]^{\lambda_1}\right\}\frac{f(t)dt}{(t-a)(b-t)}, \\ \lambda_1(b-a)\,\phi_1(x)\,c_1 + \lambda_2(b-a)\,\phi_2(x)\,c_2 = D_{a,b}^x\phi(x) - D_{a,b}^x f(x) + \\ +\frac{(b-a)^3}{\sqrt{D}}\int\limits_a^x \left\{\lambda_2^3\left[\left(\frac{x-a}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{t-a}\right)\right]^{\lambda_2} - \lambda_1^3\left[\left(\frac{x-a}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{t-a}\right)\right]^{\lambda_1}\right\}\frac{f(t)dt}{(t-a)(b-t)} - pf(x) \end{cases}$$

В ведем следующее обозначение

$$E_1(x) = -f(x) + \tfrac{(b-a)^2}{\sqrt{D}}\int\limits_a^x \left\{\lambda_2^2\left[\left(\tfrac{x-a}{b-x}\right)\left(\tfrac{b-t}{t-a}\right)\right]^{\lambda_2} - \lambda_1^2\left[\left(\tfrac{x-a}{b-x}\right)\left(\tfrac{b-t}{t-a}\right)\right]^{\lambda_1}\right\}\tfrac{f(t)dt}{(t-a)(b-t)},$$

$$E_2(x) = -D_{a,b}^x f(x) + \tfrac{(b-a)^2}{\sqrt{D}}\int\limits_a^x \left\{\lambda_2^3\left[\left(\tfrac{x-a}{b-x}\right)\left(\tfrac{b-t}{t-a}\right)\right]^{\lambda_2} - \lambda_1^3\left[\left(\tfrac{x-a}{b-x}\right)\left(\tfrac{b-t}{t-a}\right)\right]^{\lambda_1}\right\}\tfrac{f(t)dt}{(t-a)(b-t)} - pf(x)$$

Тогда выше приведенная система принимает следующий вид

$$\left.\begin{array}{l} \phi_1(x)\,c_1 + \phi_2(x)\,c_2 = \phi(x) + E_1(x) \\ \lambda_1(b-a)\,\phi_1(x)\,c_1 + \lambda_2(b-a)\,\phi_2(x)\,c_2 = D_{a,b}^x\phi(x) + E_2(x) \end{array}\right\},$$

Решая эту систему относительно $c_1$ $c_2$ после переходя к пределу при $x \to a$, находим значении $c_1$ $c_2$ через предельные значении неизвестной функции и его производные

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{(b-a)^{\lambda_2}}{\sqrt{D}}\lim\limits_{x\to a}\left[(x-a)^{\lambda_2}D_{a,b}^x\phi(x) - \lambda_2(b-a)\,\phi(x)\right] \\ c_2 = -\frac{(b-a)^{\lambda_1}}{\sqrt{D}}\lim\limits_{x\to a}\left[(x-a)^{\lambda_1} - \lambda_1(b-a)\,\phi(x) - D_{a,b}^x\phi(x)\right] \end{cases}$$

Далее используя эти свойства решений и условие (2), находим

$$c_1 = -\frac{(b-a)^{\lambda_2}}{\sqrt{D}}B\,c_2 = \frac{(b-a)^{\lambda_1}}{\sqrt{D}}A$$

Поставляя эти значении $c_1$ и $_2$ в формулы (4) находим решение задачи $K_1$в виде,

$$\phi\left(x\right)=K_{a,b}^{-;1}\left[-\frac{\left(b-a\right)^{\lambda_2}}{\sqrt{D}}B;\quad \frac{\left(b-a\right)^{\lambda_1}}{\sqrt{D}}A;\;\; f\left(x\right)\right]. \tag{6}$$

Таким образом доказано

**Теорема 2.** *Пусть в интегральном уравнение (1), параметры* $p, q$ *удовлетворяют всем условия теоремы 1. Тогда задача* $K_1$ *имеет единственное решение, которые дается формулой (6).*

**Замечание 1** Аналогичным образом ставятся и исследуются другие задачи типов Коши.

**Замечание 2**. Для интегральные уравнение (1) представление получено и в случае, когда $p<0,\ p^2=4\left(b-a\right)q$, и когда $p>0,\ p^2=4\left(b-a\right)q$. В случае $p>0,\ p^2=4\left(b-a\right)q$, общее решение также содержит две произвольное постоянные. В этом случае, также ставятся и исследуются задачи типов Коши.

### Литература


1. Раджабов Н., Саидов С. К теории общего интегрального уравнения вольтеровского типа с двумя граничными точками//ДАН РТ. 2012. Т. 55, №7, С. 519-525.
2. Раджабов Н., Саидов С. Одномерное интегральное уравнение вольтеровского типа с двумя граничными сингулярными точками//Вестник ТНУ, серия естественных наук. 2012. №1/3(85), С. 36-42.
3. Rajabov N. Volterra type Integral Equation with boundary and interior fixed singularity and super- singularity Kernels and their application. Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. 282p.
4. Rajabov N. About New class of Volterra Type Integral Equation with Boundary singularity in Kernels//Advances in Applied Mathematics and Approximation Theory. Springer Proceeding in Mathematics and statistic 41, pp. 339-358, USA.
5. Rajabov N. To Theory One Class Linear Model No classical Volterra Type Integral Equation with Left Boundary singular point//Applied Mathematics. 2013.№4, pp. 1301-1312, USA.
6. Раджабов Н., Саидов С. К теории одного класса одномерного модельного интегрального уравнения Вольтеровского типа с двумя граничными сингулярными точками // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы современного анализа и информатики. Терскол 2013г, с. 55-59.
7. Rajabov N., Saidov S. About New Class of Volterra Type Integral Equation with Two Boundary Singularity in Kernels// Proceedings of the 2014 International Conference on Pure Mathematics- Applied Mathematics (PM-AM 14). Venice, Italy, Marh 15-17 2014 214-217pp.


УДК 517.955

## О некоторых аналитических свойствах односторонних нелинейных проекторов

Садриддинов М.М.

**(ТТУ им. акад. М. Осими, Душанбе, Таджикистан)**

В работе исследуются некоторые аналитические свойства односторонних нелинейных проекторов, введенных впервые [1], и находятся условия их существования.

Рассматривается система дифференциальных уравнений $m-$го порядка

$$\frac{dX(t)}{dt}=A(t)X(t)+F(t,X(t));\quad F(t,0)\equiv 0. \tag{1}$$

Пусть проекции вектора $F(t, X)$ являются голоморфными функциями от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ – проекций вектора и непрерывными функциями от $t$ в области $D$ :

$$\|X\| = \max_j |x_j| \leq \rho, (j = 1, 2, ..., m), -\infty < t < +\infty, \tag{2}$$

и в этой области выполняются условия Липшица

$$\|F(t, X_1) - F(t, X_2)\| \leqslant \beta \|X_1 - X_2\|.$$

Предположим, что система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t), \quad -\infty < t < \infty \tag{3}$$

элементы матрицы $(t)$являются ограниченными и непрерывными функциями по $t$, являются экспоненциально дихотомичными [2]на оси $t$и ее матрица Грина $G(t, \tau)$ удовлетворяет условию

$$\|G(t, \tau)\| \leqslant ce^{-\lambda|t-\tau|}, \qquad \lambda = 0, \quad c \geqslant 1. \tag{4}$$

Как показано в [3], нелинейный оператор Грина$H(t, \tau, X)$удовлетворяет векторному интегральному уравнению

$$H(t, \tau, X) = G(t, \tau)X + \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau)F(s, H(s, \tau, X))ds. \tag{5}$$

Пусть $X \in B_1(\tau)$, где $B_1(\tau)$- сечение [3] при $t = \tau$ интегрального многообразия $G_1$ решений, притягивающихся при $t \to +\infty$ к нулевому решению. При этом имеем равенство

$$H(t, \tau, X) = 0 \quad (t < \tau),$$

и уравнение (5) при $t > \tau$ принимает следующий вид

$$H_1(t, \tau, X) = G(t, \tau)X + \int_{\tau}^{\infty} G(t, s)F(s, H_1(s, \tau, X))ds, \tag{6}$$

где

$$H_1(t, \tau, X) = H(t, \tau, P_1(\tau, X)) \quad (t > \tau),$$

при $X = P_1(t, X)$.

Аналогично, получается другое векторное интегральное уравнение при $t < \tau$

$$H_2(t, \tau, X) = G(t, \tau)x + \int_{-\infty}^{\tau} G(t, s)F(s, H_2(s, \tau, x))ds, \tag{7}$$

где $X \in B_2(\tau)$ - сечение при $t = \tau$ интегрального многообразия $G_2$ решений, притягивающихся при $t \to -\infty$ к нулевому решению.

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

**Теорема**. Пусть для системы нелинейных дифференциальных уравнений (1) выполнены условия (3), (5) и

$$0 < \beta < \frac{\lambda}{2c(1+c)}. \tag{8}$$

Тогда в области $D_1$:

$$\|X\| < \rho(1+c)^{-1} \tag{9}$$

существуют нелинейные операторы $H_k(t,\tau,X)$ $(k=1,2)$, являющиеся решениями векторных интегральных уравнений (6), (7) и выполняются условия

$$\|H_k(t,\tau,X)\| < \rho \ \ (k=1,2). \tag{10}$$

Нелинейные операторы Грина $H_k(t,\tau,X)$ $(k=1,2)$ удовлетворяют в области $D_1$ условиям

$$\|H_1(t,\tau,X)\| \leqslant (1+c)\,\|X\|\, txp\,\{-\nu(t-\tau)\} \ \ (t>\tau),$$

$$\|H_2(t,\tau,X)\| \leqslant (1+c)\,\|X\|\, \exp\,\{\nu(t-\tau)\} \ \ (t<\tau),$$

где $\nu = [\lambda(\lambda - 2c(1+c)\beta)]^{\frac{1}{2}}$.

### Литература


1. Валеев К.Г., Финин Г.С. Построение функций Ляпунова. - Киев; Наук. Думка, 1981.
2. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. –М.; Наука, 1970.-535с.
3. Курбаншоев С.З. О некоторых аналитических свойствах односторонних нелинейных проекторов, -Докл.АН.Тадж. ССР, 1983, Т.25, №1, с.3-7.


УДК 536.21

## Теплопроводность внутри неограниченного цилиндра эллиптического сечения

Самаров Ш., Махмаёров Б.

**(ТТУ им. акад. М. Осими, Душанбе, Таджикистан)**

В данной работе исследуется теплопроводность внутри неограниченного цилиндра эллиптического сечения при различных заданиях температуры на поверхности тела.

Рассмотрим неограниченный цилиндр эллиптического сечения ось и образующая которого перпендикулярны плоскости $Oxy$. Поместим начало координат в центре эллипса $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{c^2} = 1$. Пусть внутренний источник тепла $W = 0$, а начальная температура равна $T_0$. Краевая задача в безразмерных координатах примет вид [1]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{1}{b^2}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial \eta^2}\right), \ \ [T(\xi,\eta,t)]_{t=0} = T_0, \ \left[\overline{T}(\xi,\eta,t)\right]_\Gamma = \phi(t), \tag{1}$$

где $\xi = \dfrac{x}{b}$, $\eta = \dfrac{y}{c}$- безразмерные координаты, $\Gamma$- граница области $D\left\{1 - \dfrac{x^2}{b^2} - \dfrac{y^2}{c^2} \geqslant 0\right\}$.

Применяя интегральное преобразование Лапласа по $t$, получим

$$a\left(\frac{1}{b^2}\cdot\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \eta^2}\right) - p\overline{T}(\xi,\eta,p) + T_0 = 0, \ \left[\overline{T}(\xi,\eta,p)\right]_\Gamma = \overline{\phi}(p) \tag{2}$$

Решение краевой задачи (2) основан на методе комплексного применения интегрального преобразования и ортогональной проекции.

Решение задачи (2) ищем в виде [2]

$$\overline{T_n}(\xi,\eta,p) = \overline{\phi}(p) + \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k(p)\Psi_k(\xi,\eta) \tag{3}$$

где координатные функции $\Psi_k$определяется из формул

$$\Psi_k = (1-\xi^2-\eta^2)(\xi^2+\eta^2)^{k-1}(k=1,2,...,n),\ \Psi_k\,|_\Gamma = 0$$

Рассмотрим следующие случаи:

а) Температура стенки постоянная $T_{cm} \to T_0 = const$, тогда в первом приближений получим

$$\theta_1 = \frac{(T-T_0)}{(T-T_0)} = 1 - \frac{3}{2}(1-\xi^2-\eta^2)\exp(-6F_0),\ \text{ где } F_0 = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)t.$$

б) Температуры стенки линейная функция времени, т.е. $T_{cm} = T_0 + \Delta T \cdot t$. В этом случае относительная избыточная температура в первом приближений имеет вид

$$\theta_1 = 1 + \frac{N}{q}\left[2F_0 - \frac{1}{2}(1-\xi^2-\eta^2)\right] - \frac{1}{2}(1-\xi^2-\eta^2)\left(3-\frac{N}{q})\right)\exp(-6F_0)$$

где $q = a\left(\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)$, $N = \dfrac{\Delta T}{T-T_0}$.

в) Пусть температуры стенки экспоненциальная функция времени, т.е. $T_{cm} = T_0 +$ $+\Delta T\,[1-\exp(-mt)]$. Тогда получим [3]

$$T_1 = T_0 - \Delta T\left[1-\exp\left(-\frac{2m}{q}F_0\right) - \frac{3}{2}\cdot\frac{\Delta Tm}{3q-m}\right]\left[\exp - \left(-\frac{2m}{q}F_0\right) - \exp(-6F_0)\right](1-\xi^2-\eta^2)$$

г) В случае, когда температуры стенки гармоническая функция времени, т.е. при $T = T_0 + \Delta T\cos\omega t$. Где $\Delta T$- амплитуда колебаний, $\omega$- частота колебаний,

решение будет

$$T_1(\xi,\eta,F_0) = T_0 + \Delta T\cos(pd\cdot F_0) - \frac{3}{2}\cdot\frac{\Delta T}{E^2}\left[9q^2\exp(-6F_0) - (\omega E\sin pd\cdot F_0 - \phi)\right](1-\xi^2-\eta^2),$$

где $q = a\left(\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)$, $pd = \dfrac{2\omega}{q}$, $F_0 = \dfrac{qt}{2}$,

$$E = \sqrt{\omega^2+9q^2},\ tg\phi = \frac{\omega}{3q}$$

Аналогичные решения были получены во вторых и т.д. приближениях.

**Литература**

1. Цой П.В. “Методы расчета задач тепломассопереноса”. М. Энергоатомиздат, 1984, 410 стр.
2. Цой П. В. “Системные методы расчета тепломассопереноса”. М. Издательство МЭИ, 2005, 568 стр.
3. Махмаёров Б. “Приближенный расчёт нестационарной теплопроводности для тел неклассической формы”. Материалы международной конференции “16 сессии Шурои Оли Республики Таджикистан (12) созыва и её историческая значимость в развитии науки и образования”, г. Душанбе , 2002г.

УДК 517.927

# Интегральные представления и решение задача типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнение четвертого порядка первого рода, при положительном коэффициенте

Сатторов А.С., Назаров Дж.

**(Таджикский национальной университет)**

Пусть D−конечная область в первом квадранте ограниченная гладкой кривой Γ с концами в точках O(0, 0) и $A(1,0)$ и в четвертом квадранте ограниченно характеристическими линиями уравнения.

Часть области D в которой $x > 0,\ \ y > 0$ обозначим через D$^+$-эллиптической части и при $x > 0,\ \ y < 0$ обозначим через D$^-$-гиперболической части.

В области D$^-$ рассмотрим уравнении следующего вида

$$L_{\alpha,\beta}\left[Q\left(x,y\right)L_{\mu,\nu}U\right]=0, \tag{1}$$

где $L_{\mu,\nu}U\equiv y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{6\mu-1}{2}\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\frac{6\nu-1}{2}\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\alpha,\beta,\mu,\nu$ – вещественные числа,

$$Q\left(x,y\right)=x^{\frac{4-3\alpha+3\mu}{2}}\left(-y\right)^{\frac{4-3\beta+3\nu}{2}}\Big/\left(\beta-\nu\right)\left(\beta+\nu-1\right)x^3+\left(\alpha-\mu\right)\left(\alpha+\mu-1\right)y^3.$$

В [1-6] изучены различные вырождающегося дифференциальных уравнений и исследована краевые задачи в областях D$^+$ и D$^-$

Введем следующее интегральный оператор

$$T_{\alpha,\beta}\varphi_i=A_\alpha A_\beta\int\limits_0^1 d\sigma\int\limits_0^1\frac{\varphi_i\left[x^{3/2}\left(1-2\sigma\right)-\left(-y\right)^{3/2}\left(1-2\tau\right)\right]d\tau}{\left[\sigma\left(1-\sigma\right)\right]^\alpha\left[\tau\left(1-\tau\right)\right]^\beta},$$

где $\varphi_i\quad(i=1,2,3,4)$ – произвольные функции, $A_\alpha=\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\alpha)},\ \ A_\beta=\frac{1}{\mathrm{B}(\beta,\beta)}$ - функции Эйлера второго рода.

Регулярным решением уравнения (1) в области $D^-$ будем называть функцию $U(x,y)$ имеющую непрерывные частные производные первого и второго порядка по $x$ и $y$ в $D^-$, непрерывную в $\bar{D}^-$.

**Теорема 1.** Пусть $2\mu\geqslant1,\ \ 2\nu\geqslant1,\ 2a\geqslant1,\ 2\beta\geqslant1$ и $a>\mu,\beta>\nu$. Тогда регулярное решение уравнения (1) в области $D^-$ представим в виде

$$U\left(x,y\right)=A_\mu A_\nu T_{1-\mu,1-\nu}\,\varphi_1+A_aA_\beta x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}\left(-y\right)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-a,\,1-\beta}\psi_1 \tag{2}$$

где $\varphi_1,\ \psi_1$−произвольные функции одного аргумента из класса $C^2\left(D^-\right)$ и $A_\mu,A_\nu,A_a,A_\beta$-постоянные числа.

**Теорема 2.** Пусть $0<2\mu<1,\ \ 2\nu\geqslant1,\quad 2a\geqslant1,\ 2\beta\geqslant1$ и $\ \beta>\nu$. Тогда регулярное решение уравнения (1) в области $D^-$ представим в виде

$$U\left(x,y\right)=$$
$$A_\mu A_\nu T_{1-\mu,1-\nu}\,\varphi_1+A_{1-\mu}A_\nu x^{\frac{3}{2}(1-2\mu)}T_{\mu,1-\nu}\,\varphi_2+A_aA_\beta x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}\left(-y\right)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-a,\,1-\beta}\psi_1 \tag{2}$$

где $\varphi_1,\varphi_2,\ \psi_1$−произвольные функции одного аргумента из класса

$C^2(D^-)$ и $A_\mu, \mathrm{A}_{1\text{-}\mu}, A_\nu, A_a, A_\beta$-постоянные числа.

**Теорема 3.** Пусть $2\mu \geqslant 1,\ \ 0 < 2\nu < 1,\ \ 2a \geqslant 1,\ 2\beta \geqslant 1$ и $a > \mu$. Тогда регулярное решение уравнения (1) в области $D^-$ представим в виде

$$U(x,y) = A_\mu A_\nu T_{1-\mu,1-\nu}\,\varphi_1 + A_\mu A_{1-\nu}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}\,T_{1-\mu,\nu}\,\varphi_2 + \\ + A_a A_\beta x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}\,T_{1-a,\,1-\beta}\psi_1 \quad (3)$$

где $\varphi_1, \varphi_2,\ \psi_1$ – произвольные функции одного аргумента из класса $C^2(D^-)$ и $A_\mu, \mathrm{A}_{1\text{-}\nu}, A_\nu, A_a, A_\beta$-постоянные числа.

**Теорема 4.** Пусть $0 < 2\mu < 1,\ \ 0 < 2\nu < 1,\ \ \ 2a \geqslant 1,\ 2\beta \geqslant 1$. Тогда регулярное решение уравнения (1) в области $D^-$ представим в виде

$$U(x,y) = A_\mu A_\nu T_{1-\mu,1-\nu}\,\varphi_1 + A_{1-\mu} A_\nu x^{\frac{3}{2}(1-2\mu)} T_{\mu,1-\nu}\,\varphi_2 + A_\mu A_{1-\nu}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}\,T_{1-\mu,\nu}\,\varphi_3 + \\ + A_{1-\mu}A_{1-\nu}x^{\frac{3}{2}(1-2\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}\,T_{\mu,\nu}\,\varphi_4 + A_a A_\beta x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}\,T_{1-a,\,1-\beta}\psi_1 \quad (4)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4,\ \ \psi_1$–произвольные функции одного аргумента из класса $C^2(D^-)$ и $A_\mu, \mathrm{A}_{1\text{-}\mu}, \mathrm{A}_{1\text{-}\nu}, A_\nu, A_a, A_\beta$ – постоянные числа.

**Теорема 5.** Пусть $2\mu \geqslant 1,\ \ \ 0 < 2\nu < 1,\ 2a \geqslant 1,\ 0 < 2\beta < 1$ и $a > \mu,\ \beta > \nu$. Тогда регулярное решение уравнения (1) в области $D^-$ представим в виде

$$\begin{gathered} U(x,y) = A_\mu A_\nu T_{1-\mu,1-\nu}\,\varphi_1 + A_\mu A_{1-\nu}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}\,T_{1-\mu,\nu}\,\varphi_2 + \\ + A_a A_\beta x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}\,T_{1-a,\,1-\beta}\psi_1\ + A_a A_{1-\beta} x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-\beta-\nu)}\,T_{1-a,\,\beta}\psi_2 \end{gathered} \quad (6)$$

где $\varphi_1, \varphi_2,\ \ \psi_1, \psi_2$–произвольные функции одного аргумента из класса $C^2(D^-)$ и $A_\mu, \mathrm{A}_{1\text{-}\nu}, A_\nu, A_a, A_\beta, \mathrm{A}_{1\text{-}\beta}$-постоянные числа.

**Задача $K_1$.** Требуется найти регулярное решение уравнения (1) при $2\mu \geqslant 1, 2\nu \geqslant 1$, $2\alpha \geqslant 1, 2\beta \geqslant 1, \alpha > \mu$ и $\beta > \nu$ удовлетворяющее начальным условиям:

$$\lim_{y\to -0} U(x,y) = f_1(x) \lim_{y\to -0}\left[x^{\frac{3}{2}(\mu-\alpha)}(-y)^{\frac{2+3\nu-3\beta}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right] = g_1(x) \qquad (K_1)$$

где $f_1(x)$и $g_1(x)$ – заданные функции в интервале $0 < x < 1$.

Для решения задача $K_1$ используем интегральное представление (2). Учитывая начальные условия $(K_1)$**,** из (2) получим

$$A_\mu \int\limits_0^1 \frac{\varphi_1\left[x^{\frac{3}{2}}(1-2\sigma)\right]d\sigma}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\mu}} = f_1(x), A_\alpha \int\limits_0^1 \frac{\psi_1\left[x^{\frac{3}{2}}(1-2\sigma)\right]d\sigma}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}} = \frac{2}{3A_\alpha(\nu-\beta)}g_1(x) \qquad (7)$$

Аналогично [6] обращая равенств [7] имеем.

$$\varphi_1\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{\mathrm{B}(\mu,\mu)}F_1(x), \quad \psi_1\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3(\nu-\beta)\mathrm{B}(\alpha,\alpha)}G_1(x), \qquad (8)$$

где $F_1(x) = \dfrac{2^{2\mu-2}\mathrm{B}^{-1}(\lambda\,;\,1-\lambda)}{3^k(k+\lambda-1)\cdots(\lambda-1)\lambda}\dfrac{d}{dx}\int\limits_0^{x^{3}/2}\left(\dfrac{d}{s^2ds}\right)^k\left[s^{\dfrac{6\mu-1}{2}}f_1(s)\right]\dfrac{ds}{(x^3-s^2)^\lambda}$,

$$G_1(x) = \frac{2^{2\mu-2}\mathrm{B}^{-1}(\lambda\,;\,1-\lambda)}{3^k(k+\lambda-1)\cdots(\lambda-1)\lambda}\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^{3}/2}\left(\frac{d}{s^2ds}\right)^k\left[s^{\frac{6\mu-1}{2}}g_1(s)\right]\frac{ds}{(x^3-s^2)^\lambda}$$

Таким образом доказывается следующая теорема.

**Теорема 6.** Если $f(x) \in C^{4+k}, \quad g(x) \in C^{3+k}$. Тогда решение задача $(K_1)$ даётся равенством (2), где функции $\varphi_1$ и $\psi_1$ соответственно находятся из равенств (8).

**Задача** $K_2$**.** Требуется найти регулярное решение уравнения (1) при $2\mu \geqslant 1$, $0 < 2\nu < 1$, $2\alpha \geqslant 1$, $2\beta \geqslant 1$, $\alpha > \mu$ и $\alpha > \mu$, $\nu + \beta > 1$ удовлетворяющие начальным условиям:

$$\lim_{y\to -0} U(x,y) = f_1(x), \lim_{y\to -0} (-y)^{3\nu-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} = f_2(x),$$

$$\lim_{y\to -0} \left[ x^{\frac{3}{2}(\mu-\alpha)} (-y)^{\frac{5+3\nu-3\beta}{2}} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (-y)^{3\nu-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right] = g_1(x), \qquad (K_2)$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $g_1(x)$ – заданные функции в интервале $0 < x < 1$.

Для решения задача $K_2$ используем интегральное представление (4). Аналогично решение задача $(K_1)$, учитывая начальные условия $(K_2)$, из (4) находим

$$A_\mu \int_0^1 \frac{\varphi_1 \left[ x^{\frac{3}{2}} (1-2\sigma) \right] d\sigma}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\mu}} = f_1(x), A_\mu \int_0^1 \frac{\varphi_2 \left[ x^{\frac{3}{2}} (1-2\sigma) \right] d\sigma}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\mu}} = f_2(x)$$

$$A_\alpha \int_0^1 \frac{\psi_1 \left[ x^{\frac{3}{2}} (1-2\sigma) \right] d\sigma}{[\sigma(1-\sigma)]^{\,1-\alpha}} = g_1(x) \qquad (9)$$

Обращая равенств (9) как и раньше будим иметь

$$\varphi_1\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{\mathrm{B}(\mu,\mu)} F_1(x), \varphi_2\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{\mathrm{B}(\mu,\mu)} F_2(x), \psi_1\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\alpha)} G_1(x) \qquad (10)$$

**Теорема 7.** Если $f_1(x) \in C^{4+k}, \quad f_2(x) \in C^{3+k}$ и $g_1(x) \in C^{2+k}$. Тогда решение задача $K_2$ в области $D^-$ даётся равенством (4), где функции $\varphi_1, \varphi_2$ и $\psi_1$ соответственно находятся из равенств (10).

**Задача** $K_3$**.** Требуется найти регулярное решение уравнения (1) в области $(D^-)$ при $2\mu \geqslant 1$, $0 < 2\nu < 1$, $2\alpha \geqslant 1$, $0 < 2\beta < 1$, $\alpha > \mu$ и $\beta > \nu$ удовлетворяющее начальным условиям:

$$\lim_{y\to -0} U(x,y) = f_1(x), \lim_{y\to -0} \left[ x^{\frac{3}{2}(\mu-\alpha)} (-y)^{\frac{2+3\nu-3\beta}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} \right] = g_1(x),$$

$$\lim_{y\to -0} \left\{ x^{\frac{3}{2}(\mu-\alpha)} (-y)^{\frac{6\beta-1}{2}} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (-y)^{\frac{2+3\nu-3\beta}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right\} = g_2(x),$$

$$\lim_{y\to -0} \left\{ (-y)^{\frac{2+3\nu-3\beta}{2}} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (-y)^{\frac{6\beta-1}{2}} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (-y)^{\frac{2+3\nu-3\beta}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right\} \right\} = f_2(x),$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $g_1(x)$, $g_2(x)$ – заданные функции на интервале $0 < x < 1$.

Для решения задача $K_3$ используем интегральное представление (6). Аналогично как и выше находим

$$\varphi_1\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = F_1(x), \varphi_2\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = F_2(x), \psi_1\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = G_1(x), \psi_2\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = G_2(x) \qquad (11)$$

где

$$F_1(x)=\frac{2^{2\mu-1}}{3^k\mathrm{B}(\lambda\,;\,1-\lambda)(k+\lambda-1)\cdots(\lambda-1)\lambda\mathrm{B}(\mu\,;\,\mu)}\frac{d}{dx}\times$$
$$\times\int\limits_0^{x^{3/2}}\left(\frac{d}{s^2ds}\right)^k\left[s^{\frac{3}{2}(2\mu-1)}f_1(s)\right]\frac{sds}{(x^3-s^2)^\lambda},$$

$$F_2(x)=\frac{2^{k+2\lambda}}{\mathrm{B}(\mu\,;\,\mu)(1-2\nu)(\nu-\beta)(1-\beta-\nu)\mathrm{B}(\lambda\,;\,1-\lambda)(k+\lambda-1)\cdots(\lambda-1)\lambda}\frac{d}{dx}\times$$
$$\times\int\limits_0^{x^{3/2}}\left(\frac{d}{s^2ds}\right)^k\left[s^{\frac{3}{2}(2\mu-1)}f_2(s)\right]\frac{sds}{(x^3-s^2)^\lambda},$$

$$G_1(x)=\frac{2^{2\alpha-1}}{\mathrm{B}(\alpha\,;\,\alpha)3^{m+1}(\nu-\beta)\mathrm{B}(\ell\,;\,1-\ell)(m+\ell-1)\cdots(\ell-1)\ell}\frac{d}{dx}\times$$
$$\times\int\limits_0^{x^{3/2}}\left(\frac{d}{s^2ds}\right)^m\left[s^{\frac{3}{2}(2\alpha-1)}g_1(s)\right]\frac{sds}{(x^3-s^2)^\ell},$$

$$G_2(x)=\frac{2^{2\alpha}}{\mathrm{B}(\alpha\,;\,\alpha)3^{m+2}(1-6\beta)(1-\nu-\beta)\mathrm{B}(\ell\,;\,1-\ell)(m+\ell-1)\cdots(\ell-1)\ell}\frac{d}{dx}\times$$
$$\times\int\limits_0^{x^{3/2}}\left(\frac{d}{s^2ds}\right)^m\left[s^{\frac{3}{2}(2\alpha-1)}g_2(s)\right]\frac{sds}{(x^3-s^2)^\ell},$$

$\mu=k+\lambda$, $k=\{\mu\}$ – целая часть, $\lambda=\{\mu\}$ дробная часть $\mu$ и $\alpha=m+\ell$, $m=\{a\}$-целая часть, $\ell=\{a\}$ дробная часть $\alpha$.

## Литература


1. Трикоми Ф. лекции по уравнениям в частных производных, издательстве иностранный литература, М: 1957, с. 443
2. Келдыш М.Б. О некоторых случаях вырождения уравнения эллиптического типа на границе области. ДАН СССР, 1951, т. 77, №2, с. 181-183
3. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа – М: изд-во АНСССР, 1959.
4. Смирнов М. М. Модельные уравнения смешанного типа четвертого порядка. Л. 1972.
5. Раджабов Н. Интегральные представление задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией и сингулярными поверхностями. –Душанбе, част I. 1980
6. Сатторов А.С. Интегральные представления и задача типа Коши для одного вырождающегося уравнения четвертого порядка первого рода с двумя сингулярными линиями. Вестник ЛГУ, сер I, 1990, 3(№15), стр. 41-46.

УДК 517.965.2

# Об одном свойстве квазипериодических решений второго рода для неоднородного уравнения Коши – Римана

Сафаров Д.С., Гаюров А.Т.

**(Курган-Тюбинский госуниверситет им. Н. Хусрава)**

**Определение 1.** *Определенная на комплексной плоскости /однозначная функция комплексного переменного* $\omega(z)$, *удовлетворяющая условием*

$$\omega(z+h_j)=\alpha_j\omega(z)+c_j,\ \ j=1,2, \tag{1}$$

где $\alpha_j, c_j$ – *постоянные, причем* $Jm\dfrac{h_2}{h_1}$ *, называется квазипериодической функцией второго рода, с основными периодами* $h_1, h_2$.

Когда $a=b=1$, функции, удовлетворяющие условию (1) называются квазипериодическими, а при $a\neq 1$, $b\neq 1$, $c_1=c_2=0$ двоякопериодическими функциями второго рода [1].

Легко видеть, что для существования однозначного решения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$c_1(1-\alpha_2)=c_2(1-\alpha_1), \tag{2}$$

при этом любое решение (2) представимо в виде

$$\omega(z)+\phi(z)+\frac{c_1}{1-\alpha_1},$$

где $\phi(z)$ – произвольная однозначная двоякопериодическая функция второго рода, удовлетворяющая условиям

$$\phi(z+h_j)=\alpha_j\phi(z),\ \ j=1,2. \tag{3}$$

Условие $Jm\left(\dfrac{h_2}{h_1}\right)\neq 0$ позволяет построить решетки периодов $\Gamma=\{m_1h_1+m_2h_2,\ m_1,m_2-$ целые $\}$ на плоскости $\not C$.

Будем исследовать задачи нахождения решения функциональных уравнений (1), удовлетворяющие в любом параллелограмме $\Omega$ – решетки $\Gamma=\{\,m_1h_1+m_2h_2,\ m_1,m_2$ -

целые неоднородному уравнению Коши – Римана

$$w_{\bar z}=f(z), \tag{4}$$

где $f(z)$ –заданная двоякопериодическая функция второго рода с периодами $h_1, h_2$, удовлетворяющая условию (3).

**Определение 2.** *Однозначные решения (1) определенные на плоскости* $\not C$ *и удовлетворяющие уравнению (1) в* $\Omega$ *будем называть квазипериодическими решениями второго рода.*

Квазипериодическое решение второго рода уравнения (1) понимается в обобщенном смысле И.Н. Векуа [2]. Это означает, что задача (1), (4) могут допускать в любом параллелограмме $\Omega$ – решетки $\Gamma=\{m_1h_1+m_2h_2, m_1,m_2-\text{целые}\}$ особые точки типа полюса и уравнение (4) удовлетворяется почти всюду в $\Omega$.

Будем предполагать, что $f(z)\in L_p\left(\bar\Omega\right)$, $p>2$ и обобщенное решение задачи (1) будем искать в классе $W_p^1(\Omega\backslash\Omega_0)$, $p>2$, $\Omega_0-$подмножество области $\Omega$, не содержащее полюсов решения. Когда $\Omega_0 = \emptyset$, решения задачи (1), (4) из класса $W_p^1(\Omega)$, $p > 2$ называются регулярными. Можно считать, что $\Omega$ – основной параллелограмм с вершинами $0, h_1, h_1 + h_2, h_2$.

Здесь методом теории эллиптических функций, мы дадим полное решение задачи (1), (4) опираясь на интегральные представления двоякопериодических функций, посредством функций Вейерштрасса $\varsigma(z)$ и $\sigma(z)$, [3].

Будем искать обобщенное квазипериодическое решение второго рода уравнения (1), допускающие внутри $\Omega$ полюсы $b_1, b_2, ..., b_r$ соответственно с кратностями $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ и главными частями

$$\frac{A_k}{z - b_k} + \sum_{j=2}^{\lambda_k} (-1)^{j-1} \frac{(j-1)! A_k^{j-1}}{(z - b_k)^j}, \ k = 1, 2, ..., r, \tag{5}$$

где $A_k, A_k^{j-1}$ – константы.

Если обозначить через $\Delta$ число

$$\Delta = \frac{1}{2\pi i} \left[ h_2 \ln \alpha_1 - h_1 \ln \alpha_2 \right],$$

то возможны два случая: $\Delta \in \Gamma$ или $\Delta \bar{\in} \Gamma$.

Введем теперь обозначение

$$A = \frac{c_1}{1 - \alpha_1} = \frac{c_2}{1 - \alpha_2},$$

и условимся называть $A$ – точками решения задачи (1), (4) те точки, в которых решение задачи $w(z)$ (при $f(z) \equiv 0$) принимает значение $A$, то есть $w(z) = A$.

Так как $A$ точки решение задачи согласно формулы (2) по условию совпадают, с числом нулей эллиптической функцией второго рода, то справедливо следующая.

**Теорема 1.** *$A-$точки и число полюсов решения задачи (1), (4) равны с учетов их кратности.*

Доказательство этой теоремы следует из теоремы теории вычетов.

Если обозначим через $a_1, a_2, ..., a_r$ лежащие в параллелограмме $\Omega$ $A-$точки решения задачи (1), (4) через $b_1, b_2, ..., b_r-$полюсы решения задачи с учетом кратности, то для их существования справедлива формула [3] ,

$$\sum_{k=1}^{r} a_k - \sum_{k=1}^{r} b_k \equiv \frac{1}{2\pi i} \left[ h_2 \ln a - h_1 \ln b \right] (\mathrm{mod}\Gamma). \tag{6}$$

Из этой формулы получим

**Следствие.** Если$\Delta \in \Gamma$, $r \geqslant 2$, *а когда* $\Delta \bar{\in} \Gamma$, $r \geqslant 1$, *то есть в первом случае решение задачи не имеет одной простой* $A$ точек.

При выполнение условия (6) можно выписывать все решения задача (1), (4). Действительно, пусть $\chi(z)$ – эллиптическая функция второго рода, удовлетворяющая условию (3) с заданными нулями $a_1, a_2, ..., a_r$ и полюсами $b_1, b_2, ..., b_r$ и справедливо формула (16), и пусть

$$\frac{1}{\chi(z)} f(z) \in L_p^*, \ p > 2.$$

Построении таких функций дано в [1]. Функция вида

$$w(z) = \chi(z) \ \psi(z) + A,$$

где

$$\psi_{\bar{z}} = \frac{1}{\chi(z)} f(z)$$

является решением задачи (1), (4), имеющее $A$ – точки.

**Теорема 2.** Пусть $\chi(z)$ *– эллиптическая функция второго рода, удовлетворяющая условия (3) с заданными нулями* $a_1, a_2, ..., a_2$*и полюсами* $b_1, b_2, ..., b_2$*и выполнено условие (6) и пусть* $\chi^{-1}(z)f(z) \in L_p^*, p > 2$ *. Тогда для существования решения задачи (1), (4) принимающие значение в точках* $a_1, a_2, ..., a_2$ *и с полюсами* $b_1, b_2, ..., b_2$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\chi(z)} f(t)\, d_t\Omega = 0.$$

*При этом решения задача (1), (4) представимы в виде*

$$w(z) = \chi(z)\left[c + \mathrm{T}_{\varsigma}\left(\frac{1}{\chi} f\right)\right] + A,$$

*c—произвольная постоянная.*

Все $A$—точки и полюсы решения задачи (1), (4) не обязаны совпадать с нулями и полюсами некоторый эллиптической функцией второго рода.

**Теорема 3.** *Пусть выполнено условие теоремы 2 и решение задача (1), (2) допускает ещё один полюс первого порядка в точке* $z = b_0$ *и принимает значение* $A$ *в точке* $z = a_0$ и $b_0 - a_0 \in \Gamma$. *Тогда задача (1), 4) при любой правой части* $f$ *, для которой*

$$\frac{1}{\chi(z)} f(z) \in L_p^*,\ p > 2$$

*имеет одно единственное решение вида*

$$w(z) = \chi(z)\left\{d\varsigma(z - b_0) - d\varsigma(a_0 - b_0) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\chi(t)} f(t)\left[\varsigma(t - z) - \varsigma(t - a_0)\right]\right\} + A,$$

где$d = \dfrac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} \dfrac{1}{\chi(t)} f(t) d\Omega.$

### Литература

1. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. – М., Наука, 1972, 304 с.
2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М., 1959, 629 с.
3. Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщенные аналитические функции и их приложения. Душанбе, “Дониш”, 2012, 190 с.

УДК 517.946

## Обобщенная система моисила-теодореску с сингулярностью на границе

Сафаров Д.Х.

**(Таджикский национальный университет)**

В работе найдены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Дирихле для обобщённой системы Моисила-Теодореску с сингулярными коэффициентами.

1. Рассмотрим в полупространстве $R^3_+ = \{(x, y, t) = (z, t) \in R^3, t > 0\}$ следующую эллиптическую систему уравнений с частными производными первого порядка относительно пары комплекснозначных функций $u(z,t), v(z,t)$ [1]:

$$2\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial v}{\partial t} + A_{11}(z,t)\,u + A_{12}(z,t)\,v = f_1(z,t)\,,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\frac{\partial v}{\partial z} + A_{21}(z,t)\,u + A_{22}(z,t)\,v = f_2(z,t)\,, \tag{1}$$

где $A_{ij}(z,t), \quad f_i(z,t)$ - ограниченные функции, заданные в $R^3_+$, убывающие на бесконечности как $o(\rho^{-1-\varepsilon}),\ \varepsilon > 0$.

***Задача Дирихле.*** *Найти пару функций $u(z,t), v(z,t)$, непрерывную вплоть до границы $t = 0$, убывающую на бесконечности, удовлетворяющую в полупространстве $R^3_+$ системе (1) и при $t = 0$ граничным условиям:*

$$u(z,0) = \gamma_1(z),\ v(z,0) = \gamma_2(z), \tag{2}$$

*где $\gamma_1(z)$, $\gamma_2(z)$ - заданные функции, непрерывные на плоскости $z = x + iy \in C$.*

***Теорема 1.*** *Задача Дирихле (1) - (2) имеет решение тогда и только тогда (в плоть до наибольшего конечного числа дополнительных условий), если для любого решения $\varphi(z,t)$, $\psi(z,t)$ однородной сопряженной с (1) системы*

$$2\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial t} - \overline{A_{11}}(z,t)\varphi - \overline{A_{21}}(z,t)\psi = 0,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - 2\frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}} - \overline{A_{12}}(z,t)\varphi - \overline{A_{22}}(z,t)\psi = 0, \tag{3}$$

*непрерывного вплоть до границы $t = 0$ , убывающего на бесконечности имеет место равенство:*

$$\int\limits_{R^3_+} (f_1(z,t)\overline{\varphi}(z,t) + f_2(z,t)\overline{\psi}(z,t))dxdydt -$$
$$-\int\limits_{C} (\gamma_2(z)\overline{\varphi}(z,t) - \gamma_1(z)\overline{\psi}(z,t))dxdydt = 0. \tag{4}$$

**Доказательство.** Если задача (1) - (2) имеет решение, тогда равенство (4) непосредственно следует из тождества Грина [2]. Обратно, пусть (4) имеет место. Тогда, если пара функций $u(z,t), v(z,t)$ является решением задачи Дирихле (2) для следующей сильно эллиптической системы второго порядка

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(2\frac{\partial A_{11}}{\partial z} + \frac{\partial A_{21}}{\partial t}\right)u - 2\overline{A}_{11}\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} + 2A_{11}\frac{\partial u}{\partial z} + (A_{21} - \overline{A}_{21})\frac{\partial u}{\partial t} +$$
$$+(\overline{A}_{11} + A_{22})\frac{\partial v}{\partial t} + 2(A_{12} - \overline{A}_{21})\frac{\partial v}{\partial z} + \left(2\frac{\partial A_{12}}{\partial z} + \frac{\partial A_{22}}{\partial t}\right)v - (|A_{11}|^2 + |A_{21}|^2)u +$$
$$+(\overline{A}_{11}A_{12} + \overline{A}_{21}A_{22})v = 2\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_2}{\partial t} - \overline{A}_{11}f_1 - \overline{A}_{21}f_2,$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 4\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \overline{z}} + \left(2\frac{\partial A_{22}}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial A_{12}}{\partial t}\right)v + (2A_{21} + 2\overline{A}_{12})\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} + (\overline{A}_{22} - A_{11})\frac{\partial u}{\partial t} -$$

$$-(\overline{A}_{12}+A_{12})\frac{\partial v}{\partial t}+2A_{22}\frac{\partial v}{\partial \overline{z}}+2\overline{A}_{22}\frac{\partial v}{\partial z}+\left(2\frac{\partial A_{21}}{\partial \overline{z}}-\frac{\partial A_{11}}{\partial t}\right)u-(A_{11}\overline{A}_{12}+A_{21}\overline{A}_{22})u-$$
$$-(|A_{12}|^2+|A_{22}|^2)v=2\frac{\partial f_2}{\partial \overline{z}}-\frac{\partial f_1}{\partial t}+\overline{A}_{12}f_1+\overline{A}_{22}f_2, \tag{5}$$

то из (5) следует, что пара функций

$$\varphi=2\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}-\frac{\partial v}{\partial t}+A_{11}u+A_{12}v-f_1,\ \psi=\frac{\partial u}{\partial t}+2\frac{\partial v}{\partial z}+A_{21}u+A_{22}v-f_2$$

является решением системы (3). Так что посредством (4) мы получаем

$$\int\limits_{R^3_+}(|\varphi(z,t)|^2+|\psi(z,t)|^2)dxdydz=$$
$$=\int\limits_{R^3_+}\left[\left(2\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}-\frac{\partial v}{\partial t}+A_{11}u+A_{12}v-f_1\right)\overline{\varphi}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial u}{\partial t}+2\frac{\partial v}{\partial z}+A_{21}u+A_{22}v-f_2\right)\overline{\psi}\right]dxdydt=$$
$$=\int\limits_{C}(\gamma_2(z)\overline{\varphi}(z,t)-\gamma_1(z)\overline{\psi}(z,t))dxdydt-\int\limits_{R^3_+}(f_1\overline{\varphi}+f_2\overline{\psi})dxdydt=0,$$

то есть $\varphi=\psi=0$ в $R^3_+$, а это означает, что пара функций $u(z,t),v(z,t)$ является решением задачи Дирихле (1)-(2). Теорема доказана

2. Теперь рассмотрим следующую систему

$$\begin{aligned}&2\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}-\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{a(z,t)}{t}v+A_{11}\left(z,t\right)u+A_{12}\left(z,t\right)v=f_1\left(z,t\right),\\&\frac{\partial u}{\partial t}+2\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{a(z,t)}{t}u+A_{21}\left(z,t\right)u+A_{22}\left(z,t\right)v=f_2\left(z,t\right).\end{aligned}\tag{6}$$

Если $a(z,t)\neq 0,\ z\in C$, то данная система будучи эллиптической в полупространстве $R^3_+$ является сингулярной на ее границе $t=0$. Следующая система

$$\begin{aligned}&2\frac{\partial u^*}{\partial \overline{z}}+\frac{\partial v^*}{\partial t}-\frac{\overline{a}(z,t)}{t}v^*-\overline{A}_{11}\left(z,t\right)u^*-\overline{A}_{12}\left(z,t\right)v^*=0,\\&\frac{\partial u^*}{\partial t}+2\frac{\partial v^*}{\partial \overline{z}}+\frac{\overline{a}(z,t)}{t}u^*-\overline{A}_{21}\left(z,t\right)u^*-\overline{A}_{22}\left(z,t\right)v^*=0\end{aligned}\tag{7}$$

является однородной сопряженной, соответствующей системе (6).

***Теорема 2.*** *Пусть $\overline{a}_{\overline{z}}\log t,\ \overline{a}_z\log t,\ \overline{a}_t\log t$ - ограниченные в конечной части $R^3_+$ и достаточно быстро убывающие на бесконечности функции. Если $Rea(z,0)\geq 0, z\in C$, тогда в классе функций, ограниченных вплоть до границы $t=0$ и убывающих на бесконечности как $O(\rho^{-(1+Rea_\infty)})$, где $a_\infty=\lim\limits_{\rho\to\infty}a,\ \rho^2=|z|^2+t^2$, неоднородная система (6) имеет решение (вплоть до наибольшего конечного числа условий), ограниченное в конечной части $R^3_+$, убывающее на бесконечности при любых правых частях, а если $Rea(z,0)<0, z\in C$, то данная система имеет решение в упомянутом выше классе тогда и только тогда (вплоть до наибольшего конечного числа дополнительных условий), если* *для любого решения $u^*, v^*$ однородной сопряженной системы (7), непрерывного вплоть до границы $t = 0$ и убывающего на бесконечности как $O(\rho^{-2-\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$, выполняется равенство*

$$\int\limits_{R^3_+} (f_1\overline{u}^* + f_2\overline{v}^*)dxdydt = 0. \tag{8}$$

**Доказательство.** Вводя пару функций $\varphi$ и $\psi$ при помощи

$$u(z,t) = t^{a(z,t)}\varphi(z,t),\ v(z,t) = t^{a(z,t)}\psi(z,t),$$

мы получаем вместо (6) следующую систему:

$$\begin{aligned} &2\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}} - \frac{\partial\psi}{\partial t} - A^*_{11}(z,t)\varphi + A^*_{12}(z,t)\psi = f_1(z,t)t^{-a}, \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial t} - 2\frac{\partial\psi}{\partial z} + A^*_{21}(z,t)\varphi + A^*_{22}(z,t)\psi = f_2(z,t)t^{-a}, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$A^*_{11} = 2a_{\overline{z}}\log t + A_{11},\ A^*_{12} = -2a_t\log t + A_{12},$$
$$A^*_{21} = a_t\log t + A_{21},\ A^*_{22} = 2a_z\log t + A_{22}.$$

В соответствии с предположениями теоремы система (9) обладает регулярными коэффициентами. Таким образом, если $Rea(z,0) \geq 0, z \in C$, то данная система имеет решение (вплоть до наибольшего конечного числа условий разрешимости на правые части), а если $Rea(z,0) < 0, z \in C$, то в соответствии с теоремой 1 данная система имеет решение тогда и только тогда (вплоть до наибольшего конечного числа дополнительных условий), когда для любого решения однородной сопряженной с (9) системы

$$\begin{aligned} &2\frac{\partial\varphi^*}{\partial z} + \frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \overline{A}^*_{11}(z,t)\varphi^* - \overline{A}^*_{21}(z,t)\psi^* = 0, \\ &\frac{\partial\varphi^*}{\partial t} - 2\frac{\partial\psi^*}{\partial\overline{z}} - \overline{A}^*_{12}(z,t)\varphi^* - \overline{A}^*_{22}(z,t)\psi^* = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

в полупространстве $R^3_+$ , непрерывного вплоть до границы $t = 0$ и убывающего достаточно быстро на бесконечности, выполняется равенство

$$\int\limits_{R^3_+} t^{-a(z,t)}(f_1(z,t)\overline{\varphi}^*(z,t) + f_2(z,t)\overline{\psi}^*(z,t))dxdydt = 0.$$

Для подтверждения равенства (8), достаточно убедиться в том, что пара функций $u^* = t^{-\overline{a}}\varphi^*,\ v^* = t^{-\overline{a}}\psi^*$ является решением системы (7). Это можно проверить непосредственными вычислениями, принимая во внимание (10). Теорема доказана.

## Литература


1. Метод сингулярных интегральных уравнений. - М.: Наука, 1987, 415 с.
2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. - М.: Наука, 1988, 509 с.

УДК 517. 55

# Об одной краевой задаче теории аналитических функций в сингулярном случае

Усманов Н.[†], Караев Х.[‡]

([†]**Финансово-экономический институт**)
([‡]**Институт предпринимательства и сервиса**)

Постановка задачи. Найти функции $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, представимые интегралом типа Коши, имеющие почти всюду на $\Gamma$ ограничение значения $\Phi^{\pm}(t)$ , удовлетворяющие условию сопряжения:

$$\Phi^+(t) = \frac{\prod\limits_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{\kappa_r}}{\prod\limits_{j=1}^{R}(t-\xi_j)^{q_j}} \cdot \mathrm{A}_1(\mathrm{t})\ \Phi^-(t) + \frac{\prod\limits_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{\kappa_r}}{\prod\limits_{j=1}^{R}(t-\xi_j)^{q_j}}\ \mathrm{B}_1(t)\,\Phi^-(-t) + \\ + \frac{\prod\limits_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{\kappa_r}}{\prod\limits_{j=1}^{R}(t-\xi_j)^{q_j}}\ \mathrm{C}_1(\mathrm{t})\ \overline{\Phi^-(t)} + \mathrm{D}(\mathrm{t}),\ \Phi^+(\infty) = \Phi^-(\infty) = D(\infty) = 0 \tag{1}$$

Здесь $\kappa_r\,(r = 1,\ 2,\ ...,\ \mathrm{R})$, $\xi_j\,(j = 1, 2, ..., j)$- некоторые несовпадения точки контура: $\kappa_r$, $\mathrm{q_j}$-целые положительные числа. Обозначим $\sum\limits_{r=1}^{R}\kappa_r = \kappa$, $\quad \sum\limits_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{j}} q_j = q$

Пусть $0 \neq \mathrm{A}_1(-\infty,\ \infty)$, $\ \mathrm{B}(\mathrm{t})$, $\mathrm{C}(\mathrm{t}) \in\ \mathrm{M}(\text{-}\infty,\ \infty)$, $\mathrm{D}(\mathrm{t})$, $\Phi^{\pm}(t) \in\ \mathrm{L}_2(-\infty,\ +\infty)$.

$\Gamma-$ вещественная ось $(-\infty,\ +\infty)$. Ищутся решения, представимые интегралом типа Коши.

Предположим, что функция $D(t)$ в окрестности точек $t = \eta_r$ имеет производные порядков $\kappa - 1$, удовлетворяющие условию Гельдера.

Построим интерполяционный многочлен $\mathrm{T}(t)$ так, чтобы он удовлетворял следующим условиям:

$$D^{(u)}(\eta_r) = \mathrm{T}^u\ (\eta_\mathrm{r}) \quad (u = 0,\ 1,\ 2,...,\ \text{r-1}) \tag{2}$$

Такой многочлен определяется единственным образом и в дальнейшем понадобится для приведения (1) к задаче, коэффициенты которой не обращаются в нуль.

Используя (2), перепишем задачу в следующем виде:

$$\Phi^+(t) - \mathrm{T}(t) = \frac{\prod\limits_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{\kappa_r}}{\prod\limits_{j=1}^{R}(t-\xi_j)^{q_j}}\ \mathrm{A}_1(\mathrm{t})\ \Phi^-(t) + \frac{\prod\limits_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{\kappa_r}}{\prod\limits_{j=1}^{R}(t-\xi_j)^{q_j}}\ \mathrm{B}_1(t)\ \Phi^-(-t) + \\ + \frac{\prod\limits_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{\kappa_r}}{\prod\limits_{j=1}^{R}(t-\xi_j)^{q_j}} + \frac{\prod\limits_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{\kappa_r}}{\prod\limits_{j=1}^{R}(t-\xi_j)^{q_j}}\mathrm{C}_1(\mathrm{t})\ \Phi^-(t) + \mathrm{D}(\mathrm{t}) - \mathrm{T}(t) \tag{3}$$

или

$$\Phi_1^+(t) = \frac{\mathrm{A}_1(t)}{\prod\limits_{j=1}^{j}(t-\xi_j)^{q_j}}\Phi^-(t) + \frac{\mathrm{B}_1(t)}{\prod\limits_{j=1}^{j}(t-\xi_j)^{q_j}}\Phi^-(-t) + \frac{C_1(t)}{\prod\limits_{j=1}^{j}(t-\xi_j)^{q_j}}\overline{\Phi^-(t)} + D_1(t) \tag{4}$$

где $\Phi_1^+(t) = \frac{\Phi^+(t) - \mathrm{T}(t)}{\prod\limits_{j=1}^{j}(t-\xi_j)^{q_j}}$

Поскольку из краевого условия (4) видно, что $\Phi^-(t)$ имеет нули порядка $q$ в точках $\xi_j$, то полагая в (4)

$$\Phi^{-}(t)=\prod_{j=1}^{\mathrm{I}}(t-\xi_j)^{-q_j}\,\text{Ƶ}^{-q}\Phi_1^{-}(t),$$

$$\overline{\Phi^{-}(t)}=\overline{\prod_{j=1}^{\mathrm{I}}(t-\xi_j)^{-q_j}\,\text{Ƶ}^{-q}\Phi_1^{-}(t)}=\prod_{j=1}^{\mathrm{I}}(t-\xi_j)^{-q_j}\,\overline{\text{Ƶ}^{-q}}\exp\left(-2i\sum_{j=1}^{\mathrm{I}}Q_jq_j\right),\qquad(5)$$

$$Q_j=\arg(t-\xi_j)$$

и подставляя эти выражения в (4), получим

$$\Phi_1^{+}(t)=t^{-q}\mathrm{A}_1(t)\,\Phi_1^{-}(t)+t^{-q}\mathrm{B}_1(t)\,\Phi_1^{-}(-t)+\overline{t^{-q}}\exp\left(-2i\sum_{j=1}^{\mathrm{I}}Q_jq_j\right)\cdot C_1(t)\,\overline{\Phi_1^{-}(t)}+D_1(t)\quad(6)$$

или

$\Phi_1^{+}(t)=\mathrm{A}_2(t)\,\Phi_1^{-}(t)+\mathrm{B}_2(t)\,\Phi_1^{-}(t)+C_2(t)\,\overline{\Phi_1^{-}(t)}+D_1(t)$, где $\Phi_1^{+}(t)=t^{-q}\mathrm{A}_1(t)$, $\mathrm{B}_2(t)=$ $=t^{-q}\mathrm{B}_1(t)$, $C_2(t)=\overline{t^{-q}}\exp\left(-2i\sum\limits_{j=1}^{\mathrm{I}}Q_jq_jC_1(t)\right)$

Используя представление

$$\mathrm{X}^{+}(t)=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-\chi}\mathrm{A}_2(t)\,\mathrm{X}^{-}(t),\quad -\infty<t<+\infty$$

Преобразуем (6) таким образом

$$\psi^{+}(t)-\psi^{-}(t)=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-x}\times$$
$$\times\left[\frac{\mathrm{X}^{-}(-t)}{\mathrm{X}^{+}(t)}\mathrm{B}_2(t)\,\psi^{-}(-t)+\frac{\mathrm{X}^{-}(t)}{\mathrm{X}^{+}(t)}C(t)\,\psi^{-}(t)-\frac{D(t)}{X^{+}(t)}-\{P_{x-1}\left(\frac{ƶ-i}{ƶ+i}\right)\right]\quad(7)$$

где $\mathrm{P}_{x-1}\left(\frac{ƶ-i}{ƶ+i}\right)=C_0+C_1\left(\frac{ƶ-i}{ƶ+i}\right)+\ldots\ \mathrm{C}_{\text{x-1}}\left(\frac{ƶ-i}{ƶ+i}\right)^{x-1}$ подобрать так, чтобы $\psi^{+}(ƶ)$ не имела полюса в точке $ƶ=i$

Полагая $\psi(ƶ)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu(t_1)}{t_1-z}dt_1$, получим следующее интегральное уравнение, эквивалентной задаче (8), следовательно, и (1):

$$\mu(t)=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-x}\cdot\left\{\frac{1}{2}\ \frac{\mathrm{X}^{-}(-t)}{\mathrm{X}^{+}(t)}\mathrm{B}(t)\quad[-\mu+S'\mu]+\frac{\overline{\mathrm{X}^{-}(t)}}{\mathrm{X}^{+}(t)}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-x}C(t)\cdot[-\mu+S\mu]-\right.$$
$$\left.-\left[\frac{D(t)}{\mathrm{X}^{+}(t)}-\mathrm{P}_{x-1}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)\right]\right\}\quad(8)$$

где $S'\mu=\dfrac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\mu(t_1)}{t_1+t}dt$

Свободный член уравнения (8) содержит $\chi$- произвольных постоянных $C_k$.

Если $\sup\limits_{t\in r}\left|\dfrac{B(t)\,\mathrm{X}^{-}(-t)}{\mathrm{X}^{-}(t)\,\mathrm{A}(t)}\right|+\sup\limits_{t\in r}|C(t)|<1$,

то, по принципу сжатых отображений, уравнение (8) имеет единственное решение при каждом свободном члене.

Поэтому, полагая $C(t)$ и $\mathrm{P}_{\chi-1}$ равным последовательно и $i,\left(\frac{t-i}{t+i}\right),\ i\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^2\ldots,\ \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\chi-1}$, $i\left(\dfrac{t-i}{t+i}\right)^{\chi-1}$ ,... получим серию задач (5), эквивалентных интегральному уравнению (8), из которых находим линейно независимые решения уравнения однородной задачи (1) для полуплоскости. Полагая $\mathrm{P}_{\chi+1} = 0$ и $D(t) \neq 0$, получим частное решение однородной задачи.

Пусть $\chi < 0$. В том случае

$\Phi^{+}(z) = \left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^{\chi} \psi^{+}(z) + \mathrm{P}_{\chi-1}\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)$ будет иметь полюс в точке $z = i$. Для его аннулирования необходимо и достаточно выполнение дополнительных условий, чтобы $\psi(z)$ имела нуль порядка $|\chi|$, при $z = i$, что приводит к условиям разрешимости

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t-i)^{\chi} Q\left[S(t)\right] dt = 0, \ \mathrm{K} = 1, \ 2, \ \ldots, \ \text{-}\chi \tag{9}$$

$Q-$ линейный оператор

Итак, имеет места теорема.

**Теорема.** Пусть $0 \neq \mathrm{A}_1(t) \in \mathrm{H}(-\infty, \infty)$, $\mathrm{B}_1(t)$ и $C(t) \in \mu(-\infty, +\infty)$. $D(t)$, $\Phi^{\pm}(t) \in L_2(-\infty, +\infty)$, $\chi = Jnd\ \mathrm{t}^{-\mathrm{q}}\mathrm{A}_1(t)$, где Г- вещественная ось $(-\infty, +\infty)$. Ищутся решения, представимые интегралом типа Коши.

Пусть $\underset{t\in r}{\mathrm{sur}} \left|\dfrac{\mathrm{B}_1(t)\,\chi^{-}(-t)}{\chi^{-}(t)\,\mathrm{A}(t)}\right| + \underset{t\in r}{\mathrm{sur}} |c(t)| < 1$

Здесь $\chi^{+}(z)$- каноническая функция коэффициента $\mathrm{A}_1(t)$, $l$- число решений однородной задачи, $P$- число условий разрешимости неоднородной.

Тогда: 1. если $\chi \geqslant 0$, то $l = 2\chi$, $\mathrm{P} = 0$;

2. если $\chi < 0$, то $l = 0$, $\mathrm{P} = 2|\chi|$;

Литература.

1. Михайлов Л.Г., Усманов Н.У., Доклады ДАН. 2002.т. 387, №3, 309-311с.
2. Юханонов Н.Н. ДАН Тадж. ССР., 1967, т $\bar{x}$, №4.
3. Гахов Ф.Д., Симагина В.И. Изв. АН СССР. 1962, т.26 №3.

УДК 517.55

# Задача линейного сопряжения гармонических функций для полуплоскости

Усманов Н., Саидов Б.

**(Финансово-экономический институт)**

В предлагаемой работе рассматривается следующая задача сопряжения:

Пусть $L$ есть действительная ось; задача сопряжения гармонических функций заключается в том, чтобы найти две гармонические соответственно в верхней и нижней полуплоскостях функции $U^{+}(x,y)$, $U^{-}(x,y)$, по граничным условиям

$$\alpha_k(t)U_x^{+} + \beta_k(t)U_y^{+} = \gamma_k(t)U_x^{-} + \eta_k(t)U_y^{-} + \delta_k\ , \ k = 1,2. \tag{1}$$

Здесь $\alpha_k$, $\beta_k$, $\gamma_k$, $\eta_k$, $\delta_k$ – заданные на $L$ функции класса Гёльдера.

Умножая вторую строку (1) на $i$ и вычитая из первой, перепишем краевое условие в следующем виде:

$$[\alpha_1(t) + i\alpha_2(t)]\ U_x^{+} + [\beta_1(t) + i\beta_2(t)]\ U_y^{+} = [\gamma_1(t) + i\gamma_2(t)]\ U_x^{-} + [\eta_1(t) + i\eta_2(t)]\ U_y^{-} + \delta_1(t) + i\delta_2(t)\ .$$

Так как $U_x^{+} = \phi^{+}(t) + \overline{\phi^{+}(t)}$ , $U_x^{-} = \phi^{-}(t) + \overline{\phi^{-}(t)}$ ,

$$U_y^{-} = i\left[\phi^{-}(t) - \overline{\phi^{-}(t)}\right]\ ,\ \ U_y^{+} = i\left[\phi^{+}(t) - \overline{\phi^{+}(t)}\right] \quad ,$$

поэтому имеем:

$$\alpha(\mathrm{t})\phi^{+}(t)+(\mathrm{t})\cdot\overline{\phi^{+}(t)}=c(t)\phi^{-}(t)+d(t)\overline{\phi^{-}(t)}+E(t), \tag{2}$$

где

$$a(\mathrm{t})=\alpha_1(t)+i\alpha_2(t)+i\beta_1(\mathrm{t})-\beta_2(t),\quad b(\mathrm{t})=\alpha_1(t)+i\alpha_2(t)-i\beta_1(\mathrm{t})+\beta_2(t)\ ,$$
$$\mathrm{c(t)}=\gamma_1(t)+i\gamma_2(t)+i\eta_1(\mathrm{t})-\eta_2(t),\quad d(t)=\gamma_1(t)+i\gamma_2(t)+i\eta_1(t)+\eta_2(t).$$

Комплексно сопрягая (2) исключим $\overline{\phi^{+}(t)}$

$$\phi^{+}(t)=A(t)\phi^{-}(t)+B(t)\overline{\phi^{-}(t)}+g(t), \tag{3}$$

где

$$A(t)=\frac{\overline{a(t)}c(t)-b(\mathrm{t})\overline{\mathrm{d(t)}}}{|a(t)|^2-|b(\mathrm{t})|^2}\ ,\ B(t)=\frac{\overline{a(t)}d(t)-\overline{c(t)}b(\mathrm{t})}{|a(t)|^2-|b(\mathrm{t})|^2}\ ,\ g(t)=\frac{\overline{a(t)}E(t)-(\mathrm{t})\overline{\mathrm{E(t)}}}{|\mathrm{a(t)}|^2-|b(\mathrm{t})|^2}, \tag{4}$$
$$||^2-||^2\neq 0\ .$$

Рассуждая, как в [1, c.143], далее получим следующую теорему:

***Теорема.*** *Пусть в задаче сопряжения гармонический функций (1)* $A(t)\in H(-\infty,\infty)\ ,\ A(t)\neq 0\ ,\ æ\ =Ind_L A(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\{\ln A(t)\}_{-\infty}^{\infty}\ ,\ B(t)\in H(L)\ ,\ g(t)\in H(L).$ *Рассматриваются решения, представимые интегралом Коши.* $\sup\limits_{-\infty<t<\infty}\left|\frac{B(t)}{A(t)}\right|<1$, *где A(t),B(t) выражаются через* $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$ *по формулам (4),* $\ell-$ *числа линейно-независимых решений однородной задачи и* $p-$*числа условий, необходимых и достаточных для разрешимости неоднородной.*

*Тогда: 1) при* $æ\geqslant 0, \ell=2æp=0$; *2) при* $æ<0,\ell=0,\ \ p=|æ|$. *Необходимое и достаточное условие разрешимости неоднородной задачи (1) имеет следующий вид*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(t-i)^{-æ}Q\left[g(t)\right]dt=0\ ,\ k=0,1,2,\cdot\cdot\cdot,-æ, \tag{5}$$

*где Q- линейный оператор.*

***Доказательство.***

1. Пусть $æ\geqslant 0$.

Положим $\psi^{+}(z)=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-æ}\left[\phi^{+}(z)-\mathrm{P}_{æ\text{-}1}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)\right]$, где полином $\mathrm{P}_{æ-1}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$-подобран так, чтобы функция $\psi^{+}(z)$ не имела полюса в точке $z=i$.

Тогда (3) можно записать в таком виде:

$$\psi^{+}(t)=A_1(t)\psi^{-}(t)+B_1(t)\overline{\psi^{-}(t)}+g_1(t), \tag{6}$$

где $A_1(t)=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-æ}A(t)\ ,\quad B_1(t)=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-æ}B(t)\ ,\quad g_1(t)=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-æ}\left[g(t)-\mathrm{P}_{æ-1}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)\right]\ .$

Так как $Ind_L A_1(t)=0$, то $A_1(t)$ можно представить в виде $A_1(t)=\frac{\chi^{+}(t)}{\chi^{-}(t)}$,

где $\chi^{+}(t)=\ell^{F(z)}$, $\chi^{-}(t)=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-æ}\ell^{F(z)}$, $F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\left[\left(\frac{t_1-i}{t_1+i}\right)^{-æ}A_1(t)\right]\frac{dt_1}{t_1-z}$.

Подставляя выражение $A_1(t)$ в (6), получим:

$$\Psi^{+}(z)-\Psi^{-}(z)=\frac{B_1(t)}{A_1(t)}\frac{\overline{\chi^{-}(t)}}{\chi^{-}(t)}\Psi^{-}(t)+\frac{g_1(t)}{\chi^{+}(t)}, \tag{7}$$

где $\Psi_1^+(z) = \frac{\psi^+(z)}{\chi^+(z)}$, $\quad \Psi_1^-(z) = \frac{\psi^-(z)}{\chi^-(z)}$.

Решение задачи (7) будем искать в виде

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(t_1)}{t_1 - z} dt_1.$$

Теперь, вставляя формулы Сохотцкого для него в (7), получим интегральное уравнение

$$\mu(t) = \frac{B(t)}{A(t)} \cdot \frac{\overline{\chi^-(t)}}{\chi^-(t)} \cdot \frac{1}{2}(\overline{-\mu + S\mu}) + \left[C(t) - \mathrm{P}_{\text{æ}-1}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-\text{æ}}\right]\frac{1}{\chi^+(t)}, \tag{8}$$

которое эквивалентно краевой задаче (1).

По условию $\sup\limits_{-\infty < t < \infty}\left|\frac{B(t)}{A(t)}\right| < 1$ и по принципу сжатых отображений уравнение (8) имеет единственное решение при каждом свободном члене.

Поэтому, полагая $g(t)$ и $\mathrm{P}_{\text{æ}-1}$ равными последовательно

$$1,\ i,\ \left(\frac{t-i}{t+i}\right),\ i\left(\frac{t-i}{t+i}\right),\ \ldots,\ \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\text{æ}-1},\ i\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\text{æ}-1},$$

получим серию задач (6), эквивалентных интегральному уравнению (8), из которых находим линейно независимые решения однородной задачи (1) для полуплоскости.

Полагая $\mathrm{P}_{\text{æ}+1} \equiv 0$ и $g(t) \neq 0$, получим частное решение неоднородной задачи.

Пусть æ $< 0$. В этом случае $\phi^+(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\text{æ}}\psi^+(z) + \mathrm{P}_{\text{æ}-1}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$ будет иметь полюс в точке $z = i$. Для его аннулирования достаточно выполнение таких дополнительных условий, чтобы $\psi(z)$ имела нуль порядка $|\text{æ}|$, при $z = i$, что и приводит к условиям разрешимости (5).

Теорема доказана.

***Замечание.*** Задачу (1) для полуплоскости можно привести к случаю, когда $L$– есть окружность единичного радиуса.

Это можно сделать, отображая верхнюю полуплоскость, например, функцией $\zeta = \frac{z-i}{z+i}$, $\left(\tau = \frac{t-i}{t+i}\right)$ на контур $|\zeta| = 1$. При этом отображении действительная ось переходит в окружность плоскости $\zeta$.

## Литература

1. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе: Изд. АН Тадж ССР, 1963, 183 с.
2. Никольский С.М. -Изв. АН СССР, матем, т. 23. 1959. с. 281-292.
3. Михайлов Л.Г. -ДАН СССР, 1981.т. 256, №2. с. 276-281.
4. Михайлов Л.Г., Усмонов Н.У. - Материалы расширенного заседания семинара Института прикладной математики и механики им. И.Н.Векуа, Тбилиси 1985, т.1, №1, с. 150-154.

УДК 517. 55

# Об интегральных уравнениях на прямой с разностными и суммарными ядрами в сингулярном случае

Усмонзода Некруз.

**(Финансово-экономический институт)**

Рассмотрим следующие особые интегральные уравнения в сингулярном случае:

$$\phi\left(x\right)+\int_{0}^{\infty}k_{1}\left(x-t\right)\varphi\left(t\right)dt+\int_{0}^{\infty}k_{2}\left(x+t\right)\varphi\left(t\right)dt+\int_{0}^{\infty}k_{3}\left(x+t\right)\overline{\varphi\left(t\right)}dt+f\left(t\right) \qquad (1)$$

$$0<x<\infty$$

Такие уравнения возникают всякий раз, когда мы имеем дело с граничными задачами, где границы являются полубесконечными (например, задача о дифракции волн на полу плоскости). В методе производится аналитическое продолжение преобразований Фурье по переменной преобразования с вещественной оси в комплексную плоскость.

Решение уравнения можно свести к решению краевой задачи.

Пусть в уравнение (1)

$$k_{1}\left(x\right),\quad k_{2}\left(x\right)\in L\left(-\infty,\ \infty\right),\quad k_{2}\left(x\right)\in L\left(0,\ \infty\right),\quad \varphi\left(x\right),\quad f\left(x\right)\in L_{2}\left(0,\ \infty\right)$$

Введём функции $\varphi_{+}\left(x\right)$, $\varphi_{-}\left(x\right)$, положив

$$\varphi_{+}\left(x\right)=\begin{cases}\varphi\left(x\right) & \text{при } x>0\\ 0 & \text{при } x<0\end{cases};\quad \varphi_{-}\left(x\right)=\begin{cases}0 \text{ при } x>0\\ \varphi\left(x\right)\text{при } x<0\end{cases}.$$

Тогда уравнение (1) запишется так:

$$\varphi_{+}\left(x\right)-\varphi_{-}\left(x\right)+\int_{-\infty}^{+\infty}k_{1}\left(x-t\right)\varphi_{+}\left(t\right)dt+\int_{-\infty}^{\infty}k_{2}\left(x-t\right)\varphi_{+}\left(t\right)dt+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}k_{3}\left(x+t\right)\overline{\varphi_{+}\left(t\right)}=f(x) \qquad (2)$$

Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\varphi_{\pm}\left(u\right)}k_{i}\left(x-u\right)du\right\}l^{-itx}dx=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\varphi_{\pm}\left(u\right)}du\int_{-\infty}^{\infty}K_{i}\left(t\right)l^{-i(x-u)t}dt\right\}l^{itx}dx\right]=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}K_{i}\left(t\right)l^{-itx}dt\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\varphi_{\pm}\left(t\right)}l^{-iut}du\right\}l^{itx}dx=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}K_{i}\left(t\right)\overline{\Phi^{\pm}\left(t\right)}l^{-ixt}dt\right\}l^{itx}dx=K_{i}\left(t\right)\overline{\Phi^{\pm}}\left(t\right) \qquad (3)$$

Преобразуя уравнение (2) по Фурье и используя свертку (3) получим:

$$\Phi^{-}\left(t\right)=\left[1+\mathrm{K}_{1}\left(t\right)\right]\Phi^{+}\left(t\right)+\mathrm{K}_{2}\left(t\right)\Phi^{+}\left(-t\right)+\mathrm{K}_{3}\left(t\right)\Phi^{+}\left(t\right)-F\left(t\right),\quad -\infty<t<\infty \qquad (4)$$

Функции $\Phi^{+}\left(t\right)$ и $\Phi^{-}\left(t\right)$, является предельными значениями функций, аналитических соответственно в верхней и нижней полу плоскостях.

Таким образом, решение интегрального уравнения (1) равносильно построению функций $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$, аналитических соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, по граничному условию (4).

Решение интегрального уравнение (1) определяется по формуле

$$\varphi(x) = \varphi_+(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(t)\, l^{-itx} dt \tag{5}$$

Комплексно сопрягая (4) и вводя аналитическую функцию $\Omega(z) = \overline{\Phi(\overline{z})}$,

$\Omega^+(t) = \overline{\Phi^-(t)}$, $\Omega^-(t) = \overline{\Phi^+(t)}$

имеем

$$\Omega^+(t) = \left[\overline{1 + \mathrm{K}_1(t)}\right]\Omega^-(t) + \overline{\mathrm{K}_2(t)}\Omega^-(-t) + \overline{\mathrm{K}_3(t)\Omega^-(t)} - \overline{F(t)} \tag{6}$$

Решая (6) получаем следующую теорему для уравнения (1)

Теорема. Пусть $1 + \mathrm{K}_1 \neq 0$ и ядро $\mathrm{K}_1(t) \in L(-\infty, \infty)$ такой, что $\mathrm{K}_1(t) \in \mathrm{H}(-\infty, \infty)$, $\mathrm{K}_2(x) \in L(-\infty, \infty)$, $f(x)$ и $\mathrm{K}_3(x) \in L(0, \infty)$, $\varphi(x) \in L_2(0, \infty)$, $\chi = -Jnd[1 - \mathrm{K}_1(t)]$, $-\infty < t < \infty$.

Пусть $\left|\dfrac{\mathrm{K}_2(t)}{1 + \mathrm{K}_1(t)}\right| + \left|\dfrac{\mathrm{K}_3(t)}{1 + \mathrm{K}_1(t)}\right| < 1$, $\mathrm{K}_1(-t) = \overline{\mathrm{K}_1(t)}$, т.е. $k_1 = \overline{k_1(x)}$

$l-$ число решение однородной уравнения (1), $p-$ число условий разрешимости неоднородной уравнения (1). Тогда для уравнения (1).

Тогда для уравнения (1) $l = 2\chi$, $p = 0$ при $\chi = 0$ и $\partial = 0$, $p = 2|\chi|$ при $\chi = 0$

### Литература


1. Михайлов Л.Г., Усманов Н.У., Доклады РАН 2002, т.387, №3, 309-311с.
2. Юхамонов Н.Н. ДАН тадж. ССР. 1967, т. $\bar{x}$, №4
3. Гахов Ф.Д., Симагина В.И. Изв. АН СССР 1962, т.26, №3


УДК 517.946

## Об одной общей вырождающейся неклассической системе первого порядка


Файзиев М.Г.

**(Таджикский национальный университет)**


Рассмотрим следующую вырождающуюся неклассическую (составную) систему с младшими членами

$$\begin{array}{c} w_z - u_x - v_y + u - v = 0, \\ v_z - z^p s_x - z^q w_y + z^p s + z^q w = 0, \\ u_z + z^p s_y - z^q w_x + z^p s - z^q w = 0, \\ s_z + v_x - u_y + u + v = 0, \end{array} \tag{1}$$

где $p, q$ - положительные вещественные постоянные. Данная система является одним из возможных обобщений модельной системы изученной в [1].

Пусть $G$ - ограниченная область на плоскости $z = 0$, $\Sigma$ - е граница. В цилиндре $\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in G, z \geq 0\}$ с границей $S = H \cup \Sigma$, где $H$ боковая поверхность цилиндра, исследуем следующую задачу.

**Задача P.** *Найти в области $\Omega$ решение (s,u,v,w) системы (1), удовлетворяющее условиям*

$$s|_{z=0} = f(x, y), \quad s|_H = 0, \quad s(x, y, \infty) = 0, \tag{2}$$

$$w|_{z=0} = g(x,y), \quad w_z|_{z=0} = h(x,y) \tag{3}$$

$$(\alpha u + \beta v)|_\Sigma = \gamma(x,y), \tag{4}$$

*где* $f, g, h, \alpha, \beta, \gamma$ - *заданные достаточно гладкие функции, причем* $f|_\Sigma = 0$ *и* $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Из системы уравнений (1) относительно компонентов $s(x,y,z)$ и $w(x,y,z)$ решения задачи простейшим преобразованием получим следующие соотношения

$$s_{zz} + z^p(s_{xx} + s_{yy}) - b^2 z^p s = 0, \tag{5}$$

$$w_{zz} - z^q(w_{xx} + w_{yy}) + b^2 z^q w = 0, \tag{6}$$

где $b^2 = 2$.

Следовательно, для определения функции $s(x,y,z)$ необходимо решать задачу Дирихле с граничными условиями (2) для вырождающегося эллиптического уравнения (5), а для функции $w(x,y,z)$ - задачу Коши с начальными условиями (3) для вырождающегося гиперболического уравнения (6).

Функцию $s$ будем строить методом Фурье в виде ряда

$$s(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(z)\delta_k(x,y), \tag{7}$$

где $\delta_k$ - составляют полную ортонормированную систему собственных функций задачи

$$\Delta\delta + \lambda^2\delta = 0, \quad \delta(x,y)|_H = 0, \tag{8}$$

а $\Phi_k(z)$ - решение уравнения

$$z^2\Phi_k'' - (b^2 + \lambda_k^2)\Phi_k = 0, \tag{9}$$

соответствующее собственному значению $\lambda_k^2$ задачи (8). Решение уравнения (9) дается формулой [2]

$$\Phi_k(z) = \tau[C_{1k} I_\nu(2\sigma\tau^{1/\nu}) + C_{2k} K_\nu(2\sigma\tau^{1/\nu})],$$

где $I_\nu$ и $K_\nu$ - модифицированные функции Бесселя и Макдональда, $C_{1k}$ и $C_{2k}$ - произвольные вещественные постоянные, а

$$\tau = \sqrt{z}, \quad \nu = \frac{1}{p+2}, \quad \sigma = \frac{\sqrt{b^2 + \lambda_k^2}}{p+2}.$$

Учитывая (7), имеем

$$s(x,y,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau[C_{1k} I_\nu(2\sigma\tau^{1/\nu}) + C_{2k} K_\nu(2\sigma\tau^{1/\nu})]\delta_k(x,y). \tag{10}$$

По условию задачи функция $s$ должна стремится к нулю на бесконечности, поэтому в (10) необходимо положить $C_{1k} = 0$. Тогда

$$s(x,y,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k}\tau K_\nu(2\sigma\tau^{1/\nu})\delta_k(x,y). \tag{11}$$

Удовлетворив первое условие (2), получим

$$s(x,y,\tau)|_{\tau=0} = f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\delta_k(x,y),$$

где $C_k = C_{2k}\dfrac{\pi ctg\nu\pi}{2\sigma\Gamma(1-\nu)}$, $\Gamma$ - функция Эйлера. Далее, воспользовавшись теоремой о разложении по собственным функциям задачи (8), найдём

$$C_k = f_k(x,y) = \iint\limits_G f(x,y)\delta_k(x,y)dG.$$

Теперь, будем решать задачу (6) - (3). Введя вместо $z$ переменную

$$t = (1-a)z^{\frac{1}{1-a}} \quad (a = \frac{p}{2+p} < 1),$$

уравнения (6) преобразуется к виду [3]

$$w_{tt} - (w_{xx} + w_{yy}) + \frac{a}{t}w_t + b^2 w = 0, \tag{12}$$

а условия (3) - к условиям

$$w(x,y,t)|_{t=0} = g(x,y), \quad \lim_{t\to 0}(\frac{t}{1-a})^a w_t = h(x,y). \tag{13}$$

Решение уравнения (12) представляется в виде

$$\begin{gathered} w = \frac{t^{1-a}}{1-a}\int\limits_0^{2\pi}\Psi(x+t\rho\cos\theta, y+t\rho\sin\theta)\overline{J}_{-\frac{1+a}{2}}(bt\sqrt{1-\rho^2})d\theta + \\ +\frac{1}{a-1}\int\limits_0^{2\pi}\Phi(x+t\rho\cos\theta, y+t\rho\sin\theta)\overline{J}_{-\frac{1+a}{2}}(bt\sqrt{1-\rho^2})d\theta. \end{gathered} \tag{14}$$

Удовлетворяя начальные условия (13), из равенства (18) получаем

$$\Phi(x,y) = \frac{a-1}{2\pi}g(x,y), \quad \Psi(x,y) = \frac{(a-1)^a}{2\pi}h(x,y).$$

Зная $s$ и $w$, из третьего и второго уравнений системы (1) находим

$$\begin{gathered} u(x,y,z) = \int\limits_0^z (z^q w_x - z^p s_y + z^q w - z^p s)dz + \varphi(x,y), \\ v(x,y,z) = \int\limits_0^z (z^q w_y + z^p s_x - z^q w - z^p s)dz + \psi(x,y), \end{gathered} \tag{15}$$

где $\varphi(x,y), \psi(x,y)$ - произвольные дифференцируемые функции. Подставляя выражения (19) в первое и четвёртое уравнения системы (1), и учитывая условие (4), для определения функции $\varphi(x,y), \psi(x,y)$ будем иметь

$$\begin{gathered} \varphi_x + \psi_y - \varphi + \psi = h(x,y), \\ \varphi_y - \psi_x - \varphi - \psi = q(x,y), \end{gathered} \tag{16}$$

где $q(x,y) = s_z|_{z=0}$,

$$(\alpha\varphi + \beta\psi)|_\Sigma = \gamma. \tag{17}$$

Пусть функции $h(x,y), q(x,y) \in C^1_\nu(G)$. Введем обозначения

$$W(\zeta) = \varphi + i\psi, \quad \zeta = y + ix, \quad a(\zeta) = \alpha + i\beta,$$

$$\partial_{\overline{\zeta}} = (\partial_y + i\partial_x)/2, \quad F(\zeta) = (q + ih)/2, \quad \mu = -(1+i)/2.$$

Тогда систему (20) и граничное условие (21) можем записать в комплексной форме

$$\frac{\partial W}{\partial \overline{\zeta}} + \mu \overline{W}(\zeta) = F(\zeta), \tag{18}$$

$$Re[\overline{a}(\zeta)W(\zeta)]_\Sigma = \gamma(\zeta). \tag{19}$$

Таким образом, задача определения компонентов $u$ и $v$ решения системы (1) с граничным условием (4) сведена к обобщенной задаче Римана - Гильберта (22) - (23), которая как известно [4], нётерова. Следовательно, имеет место следующий результат.

**Теорема.** *Задача P при соблюдении условий гладкости*

$$f \in C^1_\nu(\overline{G}), \quad g \in C^2(G), \quad h \in C^2(G) \cap C^1_\nu(G), \quad \alpha, \beta, \gamma \in C^1_\nu(G)$$

*нётерова и её индекс равен индексу функции* $\overline{a}(\zeta)$ .

## Литература


1. Сафаров Д.Х. Неклассические системы уравнений. – Душанбе: Дониш, 2008, 431 с.
2. Камке Е. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1976, 576 с.
3. Капилевич М.Б. Об одном уравнении смешанного эллиптико - гиперболического типа. – Математический сборник, 1952, т. 30(72), №1, с. 11-38.
4. Векуа И. Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988, 509 с.


УДК 517.927

# Система линейных дифференциальных уравнений сингулярными точками с нагрузками свободные члены и с дополнительными условиями

Хидиров Х.С.

**(Кулябский государственный университет им. А. Рудаки)**

Рассмотрим системы уравнений

$$\begin{cases} xy_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k g_k(x) \\ xy_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k g_k(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ xy_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k g_k(x) \end{cases} \tag{1}$$

где $a_{kj}(x)$ – заданные непрерывные функции, без ограничения общности можем считать их вещественными. Что касается свободных членов $f_j(x)$ и нагрузки $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k g_k(x)$ и решений, то при $x \neq 0$ они также считаются непрерывными, а $y_k(x)$ – непрерывно дифференцируемыми; в сингулярной точке $x = 0$ они могут быть непрерывными (класс ), либо просто ограниченными (класс М $_0$).

Будем пользоваться также векторной записью

$$x \cdot Y' = A(x) \cdot Y + F(x) + G(x), \tag{2}$$

где $A(x) = \|a_{kj}(x)\|, (k, j = 1, 2, \ldots, n)$, а $Y(x)$ – искомые функции, а $F(x)$, $G(x)$ – заданные векторы-столбцы, в силу чисто технических причин записываемые, однако в строку:

$$Y \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad F \equiv (f_1, f_2, \ldots, f_n), \quad G(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 g_1(x) \\ \alpha_2 g_2(x) \\ \ldots \\ \alpha_n g_n(x) \end{pmatrix}$$

С дополнительными условиями

$$\int_a^b \phi_i(x) \cdot y_i(x) dx = p_i, (i = 1, 2, ..., m) \tag{$3_0$}$$

Системам (1) соответствуют однородные уравнения, которые будем обозначать через $(2_0)$ и т.д.

Рассмотрим сначала систему с постоянными коэффициентами (модельную систему)

$$\begin{cases} x \cdot y_1' = a_{11}(0)y_1 + a_{12}(0)y_2 + \cdots + a_{1n}(0)y_n + f_1(x) + \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k g_k(x) \\ x \cdot y_2' = a_{21}(0)y_1 + a_{22}(0)y_2 + \cdots + a_{2n}(0)y_n + f_2(x) + \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k g_k(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x \cdot y_n' = a_{n1}(0)\, y_1 + a_2(0)y_2 + \cdots + a_{nn}(0)y_n + f_n(x) + \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k g_k(x) \end{cases} \tag{$1_0$}$$

Однородную систему напишем в виде:

$$\begin{cases} xy_1' = a_{11}(0)y_1 + a_{12}(0)y_2 + \cdots + a_{1n}(0)y_n = 0 \\ xy_2' = a_{21}(0)y_2 + a_{22}(0)y_2 + \cdots + a_{2n}(0)y_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ xy_n' = a_{n1}(0)y_1 + a_{n2}(0)y_2 + \cdots = a_{nn}(0)y_n = 0 \end{cases} \tag{$2_0$}$$

Пытаясь удовлетворить $(2_0)$ степенными функциями $x^\lambda$, придём к характеристическому уравнению

$$\Delta(\lambda) \equiv \det[A(0) - \lambda I] = 0 \tag{3}$$

$I$ – единичная матрица. В работе [1] рассматривался случай, когда его корни (вещественные или комплексные) все различные, обозначаются $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, причем $Re\lambda_k \neq 0$, $(k = 1, 2, ..., n)$ (из этого необходимо следует, что $\Delta^0 \equiv \det A(0) \neq 0$), мы этот метод применим для системы с нагрузкой свободным членам и с дополнительными условиями,

Если $(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{nk})$,$(k = 1, 2, ..., n)$ являются линейно независимыми решениями систем (с определителями, равными нулю, по рангу $(n - 1)$

$$\begin{cases} [a_{11}(0) - \lambda_k]\gamma_{1k} + a_{12}(0)\gamma_{2k} + \cdots + a_{1n}(0)\gamma_{nk} = 0 \\ a_{21}(0)\gamma_{1k} + [a_{22}(0) - \lambda_k]\gamma_{2k} + \cdots + a_{2n}(0)\gamma_{nk} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}(0)\gamma_{1n} + a_{2n}(0)\gamma_{2k} + \cdots + [a_{nn}(0) - \lambda_k]\gamma_{nk} = 0 \end{cases}$$

то $\det\|\gamma_{kj}\| \equiv \Gamma \neq 0$ и тогда $(\gamma_{1k}x^{\lambda_k}, \gamma_{2k}x^{\lambda_k}, \ldots, \gamma_{nk}x^{\lambda_k}) = Y_0^{(k)}$,

$$y_i(x) = \sum_{j=1}^n {}_j\gamma_{ij}x^{\lambda_j} \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

где $c_i$ – произвольные постоянные, для нахождения частного решения неоднородной системы $\hat{Y}(x) = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, ..., \hat{y}_n)$ методом вариации постоянных будем иметь

$$\begin{cases} \gamma_{11}x^{\lambda_1}\frac{dc_1}{dx} + \gamma_{12}x^{\lambda_2}\frac{dc_2}{dx} + \cdots + \gamma_{1n}x^{\lambda_n}\frac{dc_n}{dx} = f_1(x) + \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k g_k(x) \\ \gamma_{21}x^{\lambda_1}\frac{dc_1}{dx} + \gamma_{22}x^{\lambda_2}\frac{dc_2}{dx} + \cdots + \gamma_{2n}x^{\lambda_n}\frac{dc_n}{dx} = f_2(x) + \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k g_k(x) \\ \gamma_{31}x^{\lambda_1}\frac{dc_1}{dx} + \gamma_{32}x^{\lambda_2}\frac{dc}{dx} + \cdots + \gamma_{3n}x^{\lambda_n}\frac{dc_n}{dx} = f_3(x) + \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k g_k(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_{n1}x^{\lambda_1}\frac{dc_1}{dx} + \gamma_{n2}x^{\lambda_2}\frac{dc_2}{dx} + \cdots + \gamma_{nn}x^{\lambda_n}\frac{dc_n}{dx} = f_n(x) + \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k g_k(x) \end{cases} \tag{5}$$

откуда получаем

$$\frac{dc_k}{dx} = x^{-\lambda_k - 1}\sum_{j=1}^{n}\beta_{kj}f_k(x) + x^{-\lambda-1}\sum_{j=1}^{n}\beta_{kj}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i(x)\right), \quad (k = 1, 2, ..., n) \tag{6}$$

Где $\beta_{kj} = \Gamma_{kj}/\Gamma$ и $\Gamma_{kj}$ – алгебраическое дополнение элемента $\gamma_{kj}$ в матрице $\|\gamma_{kj}\|$ $(k, j = 1, 2, ..., n)$. Интегрируя (6) в пределах $[x, d]$ при $Re\lambda_k > 0$ и в пределах $[0, x]$ при $Re\lambda_k < 0$ и вводя, операторы

$$\theta_k^+ y = -\int\limits_x^d \frac{1}{t}\left(\frac{x}{t}\right)^{\lambda_k} y(t)dt - \sum_{i=1}^{n}\alpha_k\int\limits_x^d \frac{1}{t}\left(\frac{x}{t}\right)^{\lambda_k}\phi_k(t)dt \, (Re\lambda_k > 0,) \tag{7}$$

$$\theta_k^+ y = -\int\limits_0^x \frac{1}{t}\left(\frac{x}{t}\right)^{\lambda_k} y(t)dt - \sum_{i=1}^{n}\alpha_k\int\limits_0^x \frac{1}{t}\left(\frac{x}{t}\right)^{\lambda_k}\phi_k(t)dt \quad (Re\lambda_k < 0), (k = 1, 2, ..., n)$$

сможем записать

$$x^{\lambda_k}c_k = \theta_k^{\pm}\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_{kj}f_j + \left(\sum_{j=1}^{n}\beta_{kj}\sum_{i=1}^{n}\alpha_k g_k(x)\right)\right) = \sum_{j=1}^{n}\beta_{kj}\theta_k^{\pm}(f_j) + \sum_{j=1}^{n}\beta_{kj}\theta_k^{\pm}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_k g_i(x)\right) \tag{8}$$

так что $\hat{y}_p(x) = \sum\limits_{j=1}^{n}\theta_{pj}f_j + \sum\limits_{j=1}^{n}\theta_{pj}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k g_k(x)\right)$, ( $p = 1, 2, \ldots, n$ )

$$\theta_{pj} = \sum_{k=1}^{n}\gamma_{pk}\beta_{kj}\theta_k^{\pm}$$

$$\hat{Y} = T_0 F, \quad T_0 = \|\theta_{pj}\| \quad .$$

Таким образом, общее решение $(1_0)$ даётся формулами

$$y_p(x) = \sum_{k=1}^{n}c_k\gamma_{pk}x^{\lambda_k} + \sum_{j=1}^{n}\theta_{pj}f_j + \sum_{j=1}^{n}\theta_{pj}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k g_k\right)$$

$$Y(x) = \sum_{k=1}^{n}c_k Y_0(x)^{(k)} + T_0\cdot F + T_0 G$$

Возвращаясь к общему случаю переменных коэффициентов, стандартной процедурой вычитания преобразуем (1) к системе с постоянными коэффициентами, но со “свободными членами"

$$\tilde{f}_j(x) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{js}(x)\lambda_k + f_j(x), \tilde{a}_{js}(x) = a_{js}(x) - a_{js}(0) \tag{9}$$

Используя формулы обращения (9), придем к систем интегральных уравнений:

$$\begin{cases} y_1(x) = T_{11}y_1 + T_{12}y_2 + \cdots + T_{1n}y_n + \sum\limits_{j=1}^{n} c_j\gamma_{1j}x^{\lambda_j} + \sum\limits_{j=1}^{n} \theta_{1j}f_j + \sum\limits_{j=1}^{n} \theta_{1j}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k g_k\right) \\ y_2(x) = T_{21}y_1 + T_{22}y_2 + \cdots + T_{2n}y_n + \sum\limits_{l=1}^{n} c_j\gamma_{2j}x^{\lambda_j} + \sum\limits_{j=1}^{n} \theta_{2j}f_j + \sum\limits_{j=1}^{n} \theta_{2j}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k g_k\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n(x) = T_{n1}y_1 + T_{n2}y_2 + \cdots + T_{nn}y_n + \sum\limits_{j=1}^{n} c_j\gamma_{nj}x^{\lambda_j} + \sum\limits_{j=1}^{n} \theta_{nj}f_j + \sum\limits_{j=1}^{n} \theta_{nj}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k g_k\right) \end{cases} \tag{10}$$

где $T_{kp}y_{kp} = \sum\limits_{j=1}^{n} \theta_{kj}\left(a_{kp}y\right) \quad (k, p = 1, 2, ..., n)$

Решая эту систему, находим решение исходной системы.

**Литература**


1. Михайлов Л.Г. Об одном способе исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярными точками //ДАН России, 1994, т. 336, № 1, с. 21-23.
2. Михайлов Л.Г. Интегральные уравнения с однородными ядрами степени (-1). Душанбе, Дониш, 1966, 48с.
3. Хидиров Х.С. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с одной сингулярной точкой, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни //ДАН РТ, 2009, т. 52, № 7, с. 507-512.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва- 1956, 465с.


УДК 517.92

# Переопределённые линейные системы трёх дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной точкой и сингулярной линией

Хонимкулов А.С.

**(Курган-Тюбинский госуниверститет им. Н. Хусрава)**

Через $\omega$ обозначим параллелепипед

$$\Omega = \{(x, y, z)\,,\ o < x < a,\ o < y < b, o < z < c\}\,.$$

Соответственно обозначим:

$$\Omega_1 = \{\mathrm{x = o, o < y <}b\mathrm{, o < z <}c\}\,, \quad \Gamma_1 = \{o < x < a, \mathrm{y = o, z = o}\}\,,$$

$$\Omega_2 = \{\mathrm{o < x < a, y = o, o < z <}c\} \quad \Gamma_2 = \{\mathrm{x = o, o < y <}b\mathrm{, z = o}\}\,,$$

$$\Omega_3 = \{\mathrm{o < x < a,\ o < y <}b\mathrm{, z = o}\}\,, \quad \Gamma_3 = \{\mathrm{x = o, y = o, o < z <}c\}\,.$$

В области $\Omega$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений следующего вида

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{a(x,y,z)}{r^{\alpha}}u=\frac{f_1(x,y,z)}{r^{\alpha}} \\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{b(x,y,z)}{y^{\beta}}u=\frac{f_2(x,y,z)}{y^{\beta}} \\ \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{c(x,y,z)}{z^{\gamma}}u=\frac{f_3(x,y,z)}{z^{\gamma}} \end{cases} \qquad (1)$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $a\,(x,y,z)\,b\,(x,y,z)\,c\,(x,y,z)\quad f_i\,(x,y,z)\,,\ i=1,2,3-$заданные функции в области $\Omega$, $\alpha$ =*2*, $\beta>1,\gamma>1$.

Проблема нахождения многообразия решений и исследованный граничных задач для переопределённых систем с регулярными и сингулярными коэффициентами посвящены работы [1] – [5].

Целью настоящей работы является получение представление многообразия решений системы уравнении (1) в явном виде через одну произвольную постоянную.

В настоящей заметке на основе способа разработанного в [2] получено представление многообразия решений системы уравнении (1) при помощи произвольные постоянные.

Для системы (1) получено следующее утверждение.

**Теорема** 1. *Пусть в системе уравнений (1)* $\alpha$ =*2*, $\beta>1,\gamma>1$ *коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям совместности*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(\frac{\alpha(\mathrm{x,y,z})}{\mathrm{r}^2}\right)=\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\frac{b(\mathrm{x,y,z})}{\mathrm{y}^{\beta}}\right), \\ &\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\left(\frac{\alpha(\mathrm{x,y,z})}{\mathrm{r}^2}\right)=\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\frac{\mathrm{c}(\mathrm{x,y,z})}{\mathrm{z}^{\gamma}}\right), \\ &\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\left(\frac{b(0,\mathrm{y,z})}{\mathrm{y}^{\beta}}\right)=\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\frac{\mathrm{c}(0,\mathrm{y,z})}{\mathrm{z}^{\gamma}}\right). \end{aligned} \qquad (a)$$

$$\mathrm{y}^{\beta}\mathrm{r}^2\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(\frac{f_1\,(x,y,z)}{\mathrm{r}^2}\right)+b\,(\mathrm{x,y,z})\ f_1\,(\mathrm{x,y,z})=\mathrm{y}^{\beta}\mathrm{r}^2\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\frac{f_2(x,y,z)}{\mathrm{y}^{\beta}}\right)+a\,(\mathrm{x,y,z})\ f_2(x,y,z),$$

$$\mathrm{r}^2\mathrm{z}^{\gamma}\quad\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\frac{f_3\,(x,y,z)}{\mathrm{z}^{\gamma}}\right)+a\,(\mathrm{x,y,z})\ f_3\,(x,y,z)=\mathrm{r}^2\mathrm{z}^{\gamma}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_1\,(x,y,z)}{\mathrm{r}^2}\right)+\mathrm{c}\,(\mathrm{x,y,z})\ f_1\,(x,y,z)$$

$$\mathrm{y}^{\beta}\mathrm{z}^{\gamma}\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(\frac{f_3\,(0,y,z)}{\mathrm{z}^{\gamma}}\right)+b\,(0,\mathrm{y,z})\ f_3\,(0,y,z)=\mathrm{y}^{\beta}\mathrm{z}^{\gamma}\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_2(0,y,z)}{\mathrm{y}^{\beta}}\right)+\mathrm{c}\,(0,\mathrm{y,z})\ f_2(0,y,z).$$

*б) Кроме того функции* $\alpha\,(\mathrm{x,y,z})$, $b\,(\mathrm{x,y,z})$, $c\,(o,o,z)$ *в окрестности начало координат удовлетворяют следующим условиям типа Гёльдера*

$$|a\,(x,y,z)\,,-a\,(o,o,o)|\le H_1r^{\alpha_1}H_1=const,\ \alpha_1>1,$$

$$|b(0,y,z)-b\,(o,o,o)|\le H_2y^{\beta 1}{}_2=const,\ \beta_1>\beta-1,$$

$$|c\,(o,o,z)\,,-c\,(o,o,o)|\le H_3z^{\gamma_1}H_3=const,\ \gamma_1>\gamma-1.$$

*в) Функция* $f_1\,(x,y,z)\in(\bar{\Omega})$ *и при* $a\,(o,o,o)<f_1\,(o,o,o)=0$ *со следующим асимптотическим поведением*

$$f_1\,(x,y,z)=0\ \ (r^{\alpha_1})\,,\ \alpha_1>1$$

*г) Функция* $f_2\,(o,y,z)\in(\bar{\Omega})$ и при $b\,(o,o,o)<0,$ *со следующим асимптотическим поведением*

$$f_2\,(o,y,z)=0\,(\exp\left[\mathrm{b}\,(0,0,0,)\,\omega_{\beta-1}\,(\mathrm{y})\right]^{\gamma_1})\ \gamma_1=\beta-1$$

*д) Функция* $f_3\,(o,o,z)\in(\Gamma_3)$ *и при* $c\,(o,o,o)<0,$ *со следующим асимптотическим поведением*

$$f_3\,(o,o,z)=0\,(\exp\left[\ (0,0,0,)\,\omega_{\gamma-1}\,(z)\right]\ z^{\nu_2}\ )\,,\,\nu_2>\gamma-1.$$

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C^1(\Omega)$ представимо в виде

$$u(x,y,z)=\exp\left[-\omega_a^1(x,y,z)-\frac{\alpha(\mathrm{o,o,o})}{\sqrt{y^2+z^2}}\,\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}\right]\{\varphi_1(y,z)+$$

$$+\int_0^x\frac{f_1(t,y,z)}{t^2+y^2+z^2}\,\exp\left[\omega_a^1(t,y,z)+\frac{\alpha(\mathrm{o,o,o})}{\sqrt{y^2+z^2}}\,\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{y^2+z^2}}\right]\mathrm{dt}$$

$$\varphi_1(\mathrm{y},z)=\exp\left[-\omega_{\mathrm{b}}^{\beta}(o,,z)+b(0,0,0)\,\omega_{\beta-1}(\mathrm{y}s)\right](\chi_1(z)+$$

$$+\int_o^y\frac{f_2(\mathrm{o,s},z)}{\beta}\exp\left[\omega_{\mathrm{b}}^{\beta}(o,,z)-b(0,0,0)\,\omega_{\beta-1}(\mathrm{s})\right]ds$$

$$\chi_1(z)=\exp\left[-\omega_c^{\gamma}(o,o,z)+c(0,0,0)\,\omega_{\gamma-1}(z)\right](c_1+$$
$$+\int_o^z\frac{f_3(\mathrm{o,o},\zeta)}{\zeta^{\gamma}}\,\exp\left[\omega_c^{\gamma}(o,o,\zeta)-c(0,0,0)\,\omega_{\gamma-1}(\zeta)\right]d\zeta),$$

где $\omega_a^1(x,y,z)=\int_o^x\frac{\alpha(t,y,z)-a(o,o,o)}{t^2+y^2+z^2}\mathrm{dt}$, $\quad\omega_b^{\beta}(o,y,z)=\int_o^y\frac{b(o,s,z)-b(o,o,o)}{s^{\beta}}ds$

$$\omega^{\gamma}(o,o,z)=\int_o^z\frac{(o,o,\zeta)-c(\mathrm{o,o,o})}{\zeta^{\gamma}}d\zeta,\quad \omega_{\beta-1}(\mathrm{y})=\frac{1}{(\beta-1)\;y^{\beta-1}}$$

$$\omega_{\gamma-1}(\mathrm{z})=\frac{1}{(\gamma-1)\,z^{\gamma-1}},$$

$c_1$ - произвольная постоянная.

**Литература**


1. Михаилов Л.Г Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями Душанбе: 1986.-115стр.
2. Раджабов Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверх сингулярными коэффициентами. Душанбе: Из-во ТГУ, 1992.-236с.
3. Раджабов Н. К теории линейной переопределенной системы второго порядка с двумя сверх сингулярными линиями // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 14-й Саратовской зимней школы, посвященной памяти академика П.Л.Ульянова, Саратов, 28 января - 4 февраля 2008.- с 156-175.
4. Раджабов Н. Модельная линейная переопределенная система трех уравнений второго порядка с двумя сверх сингулярными линиями. // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы. Труды международной научной конференции 24-28 июня 2008г., Стерлитамак, Том 1, Уфа. “Гилем” 2008.- с 159-163.
5. Шамсуддинов Ф.М. Об одной переопределенной системе второго порядка со сверх сингулярной точкой. //Материалы международной – научной конференции. Казань. 2004г.-стр.109.

УДК 517.927

# О сильно нелинейных уравнениях параболического типа

Хакимова О.Х.

**(Курган-тюбинского Госуниверситет им. Н. Хусрава)**

В настоящей работе рассматриваются вопросы разрешимости начально-краевых задач для параболических уравнений второго порядка с сильно нелинейными младшими членами. Изучение проводится методом Фаэдо-Галеркина в пространствах С.Л. Соболева. Установлена теорема существования решения первой начально-краевой задачи для таких уравнений, главная пространственная часть которых является нелинейным монотонном оператором. Здесь же доказана теорема единственности.

**Постановка задачи.** Пусть $Q = \Omega * ]0, T[$ - цилиндр в $(n+1)$ - мерном евклидовом пространстве переменных $(x,t)$ Предположим, что основание

цилиндра $\Omega$ есть область, удовлетворяющая условию конуса [2]

В цилиндре $Q$ рассмотрим первую краевую задачу для параболического уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + q\left(u\right) = f\left(x,t\right),\ p > 2, \tag{1}$$

$$u = 0 \text{ на } \sum = \Gamma \times ]0, T[ \tag{2}$$

$$u\ (x,0) = u_0\left(x\right), \tag{3}$$

$u_0$ – заданная функция.

Предположим, что функция $q : R \to R$ непрерывна и

$$q\left(z\right) z > 0,\ \forall z \in R,\ z \neq 0. \tag{4}$$

Пусть

$$V = \dot{W}_p^1\left(\Omega\right)$$

где $\dot{W}_p^1\left(\Omega\right)$-пространства С.Л. Соболева.

**Определение.** Функция $u\left(x,t\right)$ называется обобщенным решением задачи (1)-(3) если $u \in V_1$,

$$\left(u', w\right) + a\left(u,w\right) + b\left(u,w\right) = \left(f,w\right),\quad \forall w \in W,$$

$$u\left(0\right) = u_0$$

**Теорема 2.** Пусть $f\left(x,t\right)$ и $u_0\left(x\right)$ удовлетворяют условиям

$$u_0\left(x\right) \in L_2\left(\Omega\right),\quad f\left(x,t\right) \in L_p\left(0,T;V^*\right),\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{5}$$

Тогда задача (1)-(3), по крайней мере, имеет одно решение.

**Доказательство.** Пусть $w_1, w_2, \ldots, w_n \ldots$ “базис” в $W$. Определим приближенное решение $u_n\left(t\right)$ нашей задачи [1]

$$u_n\left(t\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i\left(t\right) w_i\left(x\right),$$

из системы

$$\left(u_n^{'}(t), w_j\right) + a(u_n(t), w_j) + b(u_n(t), w_j) = (f, w_j)\, j = 1, 2, \dots, n, \tag{6}$$

$$u_n(0) = u_{0n} \in [w_1, \dots, w_n], \;\; u_{0n} \to u_0 \qquad L_2(\Omega).$$

Из этих уравнений $u_n(t)$ определяется на отрезке $[0, t_n], t_n > 0$ в силу условия (4) и вида оператора А. Установим априорные оценки $u_n(t)$ и $u_n^{'}(t)$, откуда будет следовать, что $t_n = T$.

**Априорные оценки**. Из (6) в силу условия (4) и неравенства

$$a(u_n, u_n) = (A(u_n(t)), u_n(t)) \geq \alpha \|u_n(t)\|_V^p,\ \alpha > 0,$$

вытекает, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \alpha\|u_n(t)\|_V^p \leq \|f(t)\|_{V^*}\|u_n(t)\|_V. \tag{7}$$

Так, как $f \in L_p(0, T; V^*)$ то из (7) имеем, что $t_m = T$, и $u_n(t)$ ограничено [2]

$$u \in L^\infty(0,\, T; L_2(\Omega)) \cap L_p\left(0, T; \dot{W}_p^1(\Omega)\right), \tag{8}$$

и, кроме того,

$$\int_0^T q(u_n(t))\, u_n(t) dt \leq K_0 = const$$

Таким образом, $q(u_n(t)) \in L_1(Q)$ Учитывая, что

$$|q(z)| = |z|^{-1} q(z)\, z, \quad z \neq 0, \quad z \in R,$$

имеем

$$q(u_n(z)) \leq k_1 q(u_n(t))\, u_n(t) + k_2,$$

откуда получаем

$$q(u_n(t)) \in L_1(Q)$$

Следовательно, для $w \in W$

$$b(u_n(t), w) = (B(u_n(t)), w)$$

где $\beta(u_n(t))$ ограничены в

$$L_1(0, T; V^*) \tag{9}$$

Пусть $P_n$ - оператор ортогонального проектирования $L_2(\Omega)$ на $[w_1, \dots, w_n]$. Из (6) вытекает, что

$$u_n^{'} + P_n(u_n) + P_n B(u_n) = P_n F$$

В силу (8) $A(u_n)$ ограничены в $L_p(0, T; V^*)$ и, следовательно, $P_n A(u_n)$ ограничены в $L_p(0, T; V^*)$. Аналогично, в силу (9) и (5) $P_n B(u_n)$ ограничены в $L_1(0, T; W^*)$ и $P_n F$ ограничены в $L_p(0, T; V^*)$. Таким образом, $u_n^{'}$ ограничены в $L_1(0, T; W^*)$, так как

$$p^{'} = \frac{p}{p-1} > 1 \;\; V^* \subset W^*$$

ЛИТЕРАТУРА


1. Ж - Л. Лионс. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. “Мир”, М.,1972.
2. С.Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во. ЛГУ, Л.,1950.

УДК 517.9

# Об одной переопределенной системы уравнений второго порядка с сильной особенностью

Шамсудинов Ф. М.

**(Курган-тюбинского Госуниверситет им. Н. Хусрава)**

Обозначим через $D$ прямоугольник $D = \{(x, y) : 0 < x < \delta_1,\, 0 < y < \delta_2\}$
Далее обозначим

$$\Gamma_1 = \{y = 0,\, 0 < x < \delta_1\},\, \Gamma_2 = \{y = 0, 0 < y < \delta_2\}$$

В области $D$ рассмотрим систему уравнение следующего вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{a_1(x,y)\partial u}{r^\alpha \ \partial y} + \dfrac{b_1(x,y)}{r^\beta}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{c_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}} u = \dfrac{f_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{a_2(x,y)}{r^\gamma} u = \dfrac{f_2(x,y)}{r^\gamma}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{b_2(x,y)}{r^\delta} u = \dfrac{f_3(x,y)}{r^\delta}, \end{cases} \tag{1}$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $a_j\,(x,\,y)$, $b_j\,(x,\,y)$, $c_j\,(x,\,y)$, $f_k\,(x,\,y)$, $j = 1,\bar{}2, k = 1,\bar{}3$ - заданные функции области $D$, $\alpha > 2$, $\beta > 2$, $\gamma > 2$ ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$ целые положительные числа).

Исследованию переопределенных систем дифференциальных уравнений с сингулярными и сверх сингулярными коэффициентами посвященны работы [1] – [5].

Целю настоящей работы, является получение представления многообразия решений системы уравнений (1) при помощи произвольные постоянные.

В настоящей заметке на основе способа разработанного в [2], [3] получено представление многообразия решений системы уравнений (1) через одну произвольную постоянную в явном виде.

В дальнейшем через $C_2$ (D) обозначим класс функции, которые имеют непрерывные производные первого порядка в D и такие, что $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \epsilon\, C$ (D).

Доказана следующая

**Теорема 1.** Пусть в системе уравнений (1) коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям

1. $b_1\,(x,\,y)\,, \in\, C^1_y\left(\bar{D}\right), \quad a_2\,(x,\,y) \in\, C^1_y\left(\bar{D}\right), b_2\,(x,y) \in C^1_x\left(\overline{D}\right)$

$$f_2\,(x,\,y) \in\, C^1_y\left(\bar{D}\right), \quad f_3\,(x,\,y) \in\, C^1_x\left(\bar{D}\right) a_1\,(x,y)\,, \quad c_1\,(x,y)\,,$$

$$f_1\,(x,\,y) \in\, C\left(\bar{D}\right);$$

2. $c_1\,(x,y) = r^{a+\beta}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{b_1\,(x,y)}{r^a}\right) + a_1\,(x,y)\,b_1\,(x,y)\,;$
3. $|a_2\,(x,y) - a_2(0,0)| \leqslant H_1 r^{a_1},\ {}_1 = const,\ \alpha_1 > \alpha - 1,$

$$|b_2\,(0,y) - b_2(0,0)| \leqslant H_2 y^{\delta_1},\ H_2 = const,\ \delta_1 \ > \delta - 1;$$

4. $\alpha_2\,(0,0) < 0,\ \ b_2\,(0,0) > 0;$

5. $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_2(x,y)}{r^\gamma}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_2\left(x,y\right)}{r^\delta}\right)$ в $D$,

$$f_2\left(x,\,y\right)=r^\gamma exp\left[-\omega_{a_1}^a\left(x,y\right)-a_1\left(0,0\right)\omega^{(1)}_{\frac{a}{2}-1}\left(x,y\right)\right]$$

$$\left(\varphi_1\left(x\right)+\int\limits_0^{\mathrm{y}}\frac{\mathrm{f}_1\left(\mathrm{x,s}\right)+c_2\left(x,s\right)u\left(x,s\right)}{\left(\mathrm{x}^2+\mathrm{s}^2\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}exp\left[\omega_{a_1}^a\left(x,s\right)+a_1\left(0,0\right)\omega^{(1)}_{\frac{a}{2}-1}\left(x,s\right)\right]\right)\mathrm{bD}$$

при $\gamma=\beta$ и $b_1\left(x,y\right)=a_2\left(x,y\right)$,

$$r^{\gamma+\delta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_3\left(x,y\right)}{r^\delta}\right)+a_2\,xy)\,f_2\left(x,\,y\right)=r^{\gamma+\delta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2\left(x,y\right)}{r^\gamma}\right)+b_2\,xy)\,f_2\left(x,\,y\right)\text{ в }(D);$$

6. $f_2\left(\mathrm{x,y}\right)=\mathrm{o}(\mathrm{r}^{\mu_1})\mu_1>\gamma-1, f_2\left(\mathrm{x,y}\right)=\mathrm{o}(\mathrm{y}^{\delta_2})\delta_2>\delta-1.$

Тогда любое решение системы уравнений (1) аз класса $_2$ (D) представимо в виде

$$U\left(x,y\right)=\exp\left[-\omega_{a_2}^\gamma\left(x,y\right)-a_2(0,0)\omega^{(3)}_{\frac{\gamma}{2}-1}\left(x,y\right)\right]$$

$$\left\{\psi_2\left(y\right)+\int\limits_0^x\frac{f_2\left(t,y\right)}{\left(t^2+y^2\right)^{\frac{\gamma}{2}}}\cdot\exp\left[\omega_{a_2}^\gamma\left(t,y\right)+a_2\left(0,0\right)\omega^{(3)}_{\frac{\gamma}{2}-1}\left(t,y\right)\right]dt\right\}\equiv\ \equiv K_1\left(\psi_2\left(y\right),\,f_2(x,y)\right),\tag{1}$$

$$\psi_2\left(y\right)=exp\left[-\omega_{b_2}^\delta\left(0,y\right)+b_2\left(0,0\right)\omega_{\delta-1}\left(y\right)\right]$$

$$\left(c_1+\int\limits_0^y\frac{f_3(0,s)}{s^\delta}\exp\left[\omega_{b_2}^\delta\left(s,0\right)-b_2\left(0,0\right)\omega_{\delta-1}\left(s\right)\right]ds\right)\equiv N_1\left(c_1,f_3\left(0,y\right)\right),\tag{2}$$

где

$$\omega_{a_2}^\alpha\left(x,y\right)=\int\limits_0^x\frac{a_2\left(t,y\right)-a_2\left(0,0\right)}{\left(t^2+y^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}}dt$$

$$\omega^{(3)}_{\frac{\gamma}{2}-1}\left(x,y\right)=\frac{x}{y^2(\gamma-2)\,r^{(\gamma-2)}}+\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\gamma-3}{\gamma-2}\cdot J^{(3)}_{\frac{\gamma}{2}-1}\left(x,y\right)$$

$$J^{(3)}_{\frac{\gamma}{2}-1}\left(x,y\right)=\int\limits_0^x\frac{dt}{\left(t^2+s^2\right)^{\frac{\gamma}{2}-1}}$$

$$\omega_{b_2}^\delta\left(y,0\right)=\int\limits_0^y\frac{b_2\left(s0\right)-b_2\left(0,0\right)}{s^\delta}ds,\ \omega_{\delta-1}\left(y\right)=\left[(\delta-1)y^{\delta-1}\right]^{-1},$$

$c_1$−произвольная постоянная.

**Замечание 1.** Система уравнений (1) исследована, когда второе уравнение системы является главным.

**Замечание 2**. Утверждение теоремы остается в силе при выполнении условий

1. $a_2$(0,0) $>$0, $\mathrm{b}_2$ (0,0)$<$0 ;

2. f$_2$(x,y)=o $\left(exp\left[-a_2\left(0,0\right)\omega^{(3)}_{\frac{\gamma}{2}-1}\left(x,y\right)\right]r^{\mu_2}\right),\ \mu_2>\gamma-1,$

$$f_3\left(0,y\right)=o\ \left(exp\left[b_2\left(0,0\right)\omega_{\delta-1}\left(y\right)y^{\delta_3}\right]\right),\ \delta_3>\delta-1.$$

Полученное решение имеет следующие свойства.

$1^0$. Если $\rightarrow 0$, то

$$\lim_{y\to 0}U\left(x,y\right)=\psi_1(x).$$

$2^0$. Если $y\to 0$ и $x\to 0$, то

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}U\left(x,y\right)\right\}=\lim_{x\to 0}\varphi_1\left(x\right)=\ \left(exp\left[b_2\left(0,0\right)\omega_{\delta-1}\left(y\right)\right]\right)$$

$$3^0.\lim_{y\to 0}\left\{exp\left[-b_2\left(0,0\right)\omega_{\delta-1}\left(y\right)\right]\lim_{x\to 0}U(x,y)\right\}=c_1.$$

$4^0$. Если $y\to 0$, и $x\neq 0$, то

$$U\left(x,y\right)=O\left(exp\left[-a_2\left(0,0\right)\omega^{(3)}_{\frac{\gamma}{2}-1}\left(x,y\right)\right]\right).$$

**Замечание 3.** При выполнении условий замечаний 2, полученное решение имеет поведение

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}U\left(x,y\right)\right\}=0$$

$$\lim_{x\to 0}U\left(x,y\right)=0.$$

**Задача $\mathbf{A_1}$** . Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса C$_2$(D) по начальному условию

$$\lim_{y\to 0}\left\{exp\left[-b_2\left(0,0\right)\omega_{\delta-1}\left(y\right)\right]\lim_{x\to 0}U\left(x,y\right)\right\}=m_1$$

где $m_1$ - известно постоянное.

О разрешимости задачи A$_1$ получено следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда единственное решение задачи A$_1$ даётся формулами (1), (2), при c$_1$ =m$_1$.

## Литература


1. Михайлов Л.Г. Некоторые переопределенные системы уравнений вчастных производных с двумя неизвестными функциями . Душанбе , Дониш,1986.-115с.
2. Раджабов Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверх сингулярными коэффицентами., Душанбе, изд. ТГУ,1992.-236 с.
3. НусратРаджабов, МохамедЭльсаед Абдель Аал. Переопределеная линейная система второго порядка с сингулярными и сверх сингулярными линями. LAPLAMBERTAcademicPubIishng , Germany, 2011. -234с.
4. Рузметов Э. Дифференциальные уравнение с параметром и их приложения к исследованию некоторых преопределенных систем уравнений в частных производных. Часть 1. Душанбе, 1994.-241с.
5. Shamsudinov F.M. About an overdetermined system second order with singIarity coefficient // Absracts 36 $^{th}$ AnnuaI Iranian Mathematics Conference 10 - 13 September 2005, Yazd, Iran. - 2005.- p. 211-212.

УДК 517.956

# Об одном классе систем уравнений в полных дифференциалах с сингулярными линиями

Шарипов Б.

**(Институт предпринимательства и сервиса)**

Ранее в работах [1]-[6] были исследованы некоторые типы линейных систем уравнений в полных дифференциалах (п.д.- систем) функций двух и многих независимых переменных с сингулярными точками и линиями. В случае тождественного выполнения условия их совместности, были найдены многообразия решений систем, и были исследованы поведения решений систем в точках линии вырождения.

В настоящей работе рассматривается один класс нелинейных п.д.- систем, с одной сингулярной линией. Будет показано, что в случае тождественного выполнения условий совместности, находятся многообразие его решений, исследуется поведение решения системы в особых точках (то есть на линии вырождения).

Рассмотрим п.д.- систему вида

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a(x,y\,;u)\;,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y\;;\;u)}{x^n}\;,\;(n\geqslant 0), \tag{1}$$

где $a,b\in C^1(\bar D),\; u(x,y)\in C^2(D_0),\; D_0=\bar D-\{\Gamma_1:x=0\}$. Условие совместности п.д.- системы (1) имеет вид:

$$D(a)=D_x\left(\frac{b}{x^n}\right)\;;\quad x^{n+1}\,a'_y+x\,(b\,a'_u-b'_x-a\,b'_u)+n\,b=0. \tag{$N_1$}$$

Пусть условие совместности п.д.- системы (1) будет выполнено, но не тождественно. Тогда, из соотношения $N_1$ найдется функция $u=p(x,y)$, такая, что она возможно может быть некоторым частным решением п.д.- системы (1).

Допустим, что необходимое условие совместности ($\mathrm{N}_1$) выполняется и существует некоторое решение системы (1). Тогда, при подстановке этой функции в каждое уравнение системы, должны получить тождества. Покажем, что тождественное выполнение условие ($\mathrm{N}_1$) является также достаточным (для существования многообразия решений системы (1). Для этого, учитывая задачу Коши, или начальное условие, в первом уравнении системы (1) в виде

$$u=u_0\quad \text{при}\quad x=x_0\;(x_0\neq 0),\qquad y=y_0 \tag{2}$$

будем интегрировать первое уравнение системы (1), как обыкновенное дифференциальное уравнение (о.д.у.) по переменной $x$, считая $y$- параметром. После применения метода последовательных приближений, будем иметь (см. [6]):

$$u(x,y)=h\;[x,y\,;V(y)]\;,\quad (h'_x=a(x,y\;;\;h))\;, \tag{3}$$

где $V(y)=u(x_0,y)\;,\;(V(y_0)=u_0)$- новая неизвестная функция, а $h\,[x,y\,;V(y)]$-известная. Дифференцируя соотношение (3) по переменной $y$, подставляя результат во второе уравнение системы (1), получим о.д.у. вида:

$$\frac{dV}{dy}=f(y;V),\quad \left(f(y;V)=\frac{1}{h'_V}\left(\frac{b}{x^n}-h'_y\right)\;,\quad (h'_V\neq 0)\right) \tag{4}$$

Покажем, что правая часть о.д.у. (4) не зависит от переменной $x$, то есть, $D_x f = 0$. Действительно:

$$D_x f = \left[\frac{b'_x}{x^n} - \frac{nb}{x^{n+1}} + a\frac{b'_u}{x^n} - h''_{x\,y}\right]\frac{1}{h'_V} - \left(\frac{b}{x^n} - h'_y\right)\frac{h''_{y\,V}}{(h'_V)^2} = 0. \qquad (5)$$

Поскольку в соотношении (5) имеет место $h''_{x\,y} = (h'_x)'_y = (a(x,y;u))'_y =$

$= a'_y + \dfrac{b}{x^n}\,a'_u$, то при подстановке значении $h''_{x\,y}$ в (5), получим тождественное выполнение условия ($N_1$). Тем самым получим, что в о.д.у. (4) функция $f(y;V) \in C^1(\bar{D})$, и она не зависит от переменного $x$ . Поэтому, интегрируя о.д.у. (4) по переменной $y$, при условии Коши (2), методом последовательных приближений (см.[6]), получим: $V = \Phi(C,\ y)$ или $V = \Phi(u_0\ ,\ y)$. Тогда многообразия всех решений системы (1), либо решение задачи Коши для п.д.- системы (1) будет представлено соответствующими формулами:

$$u(x,y) = h\left[x,y;\Phi(C,y)\right] \text{ либо } u(x,y) = h\left[x,y;\Phi(u_0,y)\right] eqno(6)$$

**Теорема 1.** *Пусть в п.д.- системе (1)* $a,b \in C^1(\bar{D}), u(x,y) \in {}^2(D_0) D_0 = \bar{D} - \{_1 : x = 0\}$. *Если условие совместности* $(N_1)$ *будет выполнено, но не тождественно, тогда возможно существует некоторая функция* $u = p(x,y)$ *являющаяся частным решением системы (1). Если условие* $(N_1)$ *для п.д.- системы (1) будет выполнено тождественно, тогда существуют многообразие всех решений системы (1), либо решение задачи Коши (2) для п.д.- системы (1), и определяется соответствующими формулами (6), непрерывными во всей области* $\bar{D}$.

**2.** Рассмотрим п.д.- систему

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a(x,y;u)}{x^n}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{b(x,y;u)}{x^{n-1}}, \quad (n \geqslant 1), \qquad (7)$$

где $a(x,y;u), b(x,y;u) \in C^1(\bar{D})$, а неизвестная функция $u\,(x,y) \in C^2\,(D_0)$, $D_0 = \bar{D} - \{\Gamma_1 : x = 0\}$. Условием совместности п.д.- системы (7) будет:

$$D_y\left(\frac{a}{x^n}\right) = D_x\left(\frac{b}{x^{n-1}}\right); \quad x^{n-1}a'_y + b\cdot a'_u = x^n b'_x + a\cdot b'_u + (1-n)\,x^{n-1}b. \qquad (N_2)$$

Допустим, что условие совместности $(N_2)$ выполняется, но не тождественно, тогда решая $(N_2)$ как функциональное уравнение, по аналогии п.1 получим некоторое частное системы (7). Для существования многообразия решений системы (7) необходимо, чтобы условие $(N_2)$ выполнялось тождественно. Покажем, что тождественное выполнение условия $(N_2)$ является также и достаточным для совместности п.д.- системы (7).

Поскольку правые части каждого уравнения системы (7), в точках линии вырождения $x = 0$ имеют особенность различного порядка, поэтому прежде всего потребуем, чтобы (см.[3-4]) в системе (7) функции $a\,(x,y,u)$, $b\,(x,y,u)$ в области $\bar{D}$ удовлетворяли условиям $(M_0)$

1. функция $a\,(x,y,u)$, $b\,(x,y,u) \in C^1\left(\bar{D}\right)$, $a'_u \neq 0$, $b'_u \neq 0$ ;
2. по аналогии [4], $u'_x, u'_y$ в особых точках линии вырождения имели нуль менее чем $n$-го порядка, тогда $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^n\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{n-1}\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$, и при этом, необходимо, чтобы $a\,(0,y,u_0) = a_0 = 0$, $b\,(0,y,u_0) = b_0 = 0$.

С учетом того, что условие совместности $(N_2)$ будет выполнено тождест-венно, поэтому в процессе интегрирования системы (7), при выполнении условии ($M_0$), в области $\bar{D}$ получим непрерывное решение задачи Коши.

Проинтегрировав второе уравнение о.д.у. по переменной $y$, (считая $x$ параметром), при условии, что $x = x_0 \neq 0$, запишем его решение (непрерывное по переменное $y$), в области $\bar{D}$ в виде:

$$u\,(x,y) = \frac{1}{x^{n-1}} h\,[x,y;Z\,(x)]\,, \quad \left(h'_y = b\,(x,y\,;h)\right). \tag{8}$$

При этом, $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}\,(x) = u\,(x,0)\,,\ \ (Z_0 = Z(x_0) = u(x_0,0))$- считаем новой неиз-весной функцией, а $h\,[x,y;Z\,(x)]$- известной ( при $0 < x_0 \leqslant x < 1$). Дифференцируя соотношение (8) по переменной $x$, подставляя полученный результат в первое уравнение системы (7), получим о.д.у. следующего вида:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{f\,(x,Z)}{x}, \text{где} f\,(x,Z) = \frac{1}{h'_{\mathrm{Z}}}\,[h + (n-1)\,h'_x - x\,h'_Z]\ , \quad (Z = Z(x), h'_Z \neq 0). \tag{9}$$

Если в о.д.у. (9) $Z'(x)$ всюду в $\bar{D}$ ограничено, либо в точках линии вырождения имеет нуль менее чем первого порядка, тогда существует и $\lim\limits_{x\to 0}(x\,Z'(x)) = 0$, (см. [4]). Тогда необходимо, получим, что $f\,(0,Z\,(0)) = f_0 = 0$. Поэтому о.д.у. (10) всюду в $\bar{D}$, при выполнении предыдущего необходимого условия, может иметь непрерывное решение.

Теперь допустим, что для о.д.у. (9) вышеуказанное условие не будет выполнено, а только лишь функция $f\,(x,Z)$ удовлетворяет условию Липшица:

$|f\,(x,V) - f\,(0,V)| \leqslant L\,|x|^{\lambda}\,,\quad 0 < \lambda \leqslant 1$ тогда интегрируя о.д.у. (9), получим:

$Z(x) = C - \int\limits_x^1 \frac{f\,(t,Z\,(t))}{t}dt$ или $\mathrm{Z}\,(x) = \mathrm{Z}_0 + \omega\,(x,Z) + f_0 \ln x$,

$\left(\omega\,(x,Z) = -\int\limits_x^1 \frac{f\,(t,Z) - f\,(0,Z_0)}{t}dt\right)$, $(Z_0 = u(x_0\,,0) = u_0)$ .

При этом, решение о.д.у. (9) в области $D_0$ будет непрерывным, а в точках линии вырождения $\Gamma_1 : x = 0$ имеет логарифмическую особенность, и многообразие всей решении системы (7), либо решении задачи Коши для исходной системы найдётся формулой:

$$u\,(x,y) = \frac{1}{x^{n-1}} h\,[x,y;\ln x\,;C]\ \text{или} u\,(x,y) = \frac{1}{x^{n-1}} h\,[x,y\,;u_0 + \omega\,(x,Z_0) + f_0 \ln x]\,. \tag{10}$$

## Литература


1. Михайлов Л.Г.- ДАН России, 1992, т.322, №4, с. 646-650.
2. Михайлов Л.Г.- ДАН России, 1997,т.354, №1, с.21-24.
3. Михайлов Л.Г.- ДАН России,2002, т.384, №6, с.731-737.
4. Михайлов Л.Г.-ДАН России, 2004,т.398, №2, с.1-4.
5. Шарипов Б.Труды Международной конференции, посвящённой 10-летию РТСУ. Душанбе, 2005, с. 64-66.
6. Шарипов Б. –Докл. АН РТ , т. 53, № 9, 2010, с.666-673.
7. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. Г.И.Ф.-М.Л., М:, 1958, 468 с.

УДК 517.954

# Формула представления решений одного гиперболического уравнения с двумя сингулярными граничными линиями

Шодиева Р.

**(Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики, Худжанд)**

В прямоугольнике $0 < x < a, \quad 0 < y < b$ рассмотрим уравнение

$$\Box u + \left(\frac{q^2}{x^2} + \frac{p^2}{y^2}\right) u = 0 \tag{1}$$

где $\Box u = \frac{\partial^2}{\partial^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ оператор гиперболического типа, $p$ и $q$ - постоянные числа. Такое уравнение назовем уравнение с двумя граничными сингулярными линиями. Ищем его частные решения в виде произведения двух функций:

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \tag{2}$$

Подставляя (2) в уравнение (1) и разделяя переменные, получим

$$\frac{X'' + \dfrac{q^2}{x^2} X}{X} + \frac{-Y'' + \dfrac{p^2}{y^2} Y}{Y} = 0$$

Так как независимая переменная $x$ входит только в первую из этих дробей, а $y$- только во вторую, то приравнивая вторую из дробей постоянной $k^2$, получим следующие два уравнения

$$X'' + \left(k^2 + \frac{q^2}{x^2}\right) X = 0 \tag{3}$$

$$Y'' + \left(k^2 - \frac{p^2}{y^2}\right) Y = 0 \tag{4}$$

Общее решение первого уравнения есть

$$X(x) = \sqrt{x} \left(C_1 J_\nu(kx) + C_2 J_{-\nu}(kx)\right),$$

второго

$$Y(y) = \sqrt{y} \ \left(C_1 J_\mu(ky) + C_2 J_{-\mu}(ky)\right) \quad ,$$

где $\nu^2 = -q^2 + 1/4, \quad \mu^2 = p^2 + 1/4, \quad J_{\pm\nu}(\circ), \quad J_{\pm\mu}(\circ)$ - функции Бесселя первого и второго рода. Если $\mu^2 = p^2 + 1/4$- целое, то в качестве второго решения берем функцию Вебера второго рода $Y_\mu(x)$ (см. [ 1], [2]).

Следовательно, построены следующие две серии частных решений уравнения (1), соответственно ограниченные и неограниченные в сингулярных линиях $x = 0$ и $y = 0$ :

$$\sqrt{xy} \ \left(C_1 J_\nu(kx) + C_2 J_{-\nu}(kx)\right) J_\mu(ky), \quad \sqrt{xy} \ \left(C_1 J_\nu(kx) + C_2 J_{-\nu}(kx)\right) J_{-\mu}(ky), \tag{5}$$

где постоянная $k > 0$ может иметь любое значение.

Если вместо постоянной $(+k^2)$ вести постоянную $(-k^2)$, то получим две другие серии ограниченных и неограниченных в сингулярных линиях $x = 0$ и $y = 0$ частных решений вида:

$$\sqrt{xy}\ \ (C_1 I_\nu(kx) + C_2 I_{-\nu}(kx))\, I_\mu(ky), \quad \sqrt{xy}\ \ (C_1 I_\nu(kx) + C_2 I_{-\nu}(kx))\, K_\mu(ky), \tag{6}$$

**Замечание 1**. При $k = 0$ *уравнения (3) и (4) принимают вид*

$$X'' + \frac{q^2}{x^2} X = 0,$$

$$Y'' - \frac{p^2}{y^2} Y = 0,$$

*решениями которых соответственно будут*

$$X(x) = \sqrt{x} \cdot x^{\pm\nu}\, Y(y) = \sqrt{y} \cdot y^{\pm\mu}, \quad \nu^2 = -q^2 + 1/4, \mu^2 = p^2 + 1/4.$$

Таким образом, для уравнения

$$\Box u + \left(\frac{q^2}{x^2} + \frac{p^2}{y^2}\right) u = 0$$

построены шест серии частных решений:

$$\begin{gathered}\sqrt{xy}\,(C_1 J_\nu(kx) + C_2 J_{-\nu}(kx))\, J_\mu(ky), \sqrt{xy}\,(C_1 J_\nu(kx) + C_2 J_{-\nu}(kx))\, J_{-\mu}(ky),\\ \sqrt{xy}\,(C_1 I_\nu(kx) + C_2 I_{-\nu}(kx))\, I_\mu(ky), \sqrt{xy}\,(C_1 I_\nu(kx) + C_2 I_{-\nu}(kx))\, K_\mu(ky),\\ \sqrt{xy} \cdot x^\nu y^\mu, d\sqrt{xy} \cdot x^{-\nu} y^{-\mu}\end{gathered} \tag{6}$$

Причем первые решения каждой серии ограниченны в сингулярных линиях $x = 0$ и $y = 0$, а вторые неограниченны, точнее ограничение решения, при $x = 0$ имеют нуль порядка $\nu + \frac{1}{2}$, при $y = 0$ нуль порядка $\mu + \frac{1}{2}$, а неограниченные имеют полюс порядка $\nu - \frac{1}{2}$ и $\mu - \frac{1}{2}$ соответственно.

Так как согласно теории функций Бесселя (см. [1]), функция $J_\lambda(x)$ имеет счетное множество положительных корней, а $\mathrm{I}_\lambda(x)$ не имеет вещественных корней, то это различие в представлении решений используется при решения смешанной задачи.

## Литература

1. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций, ч. 1- 4. -Л.; ИЛ, 1949, 798 с.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.- М.;Наука, 1976, 528 с.
3. Михайлов Л.Г. //ДАН России, 2002. т. 384. №6. с. 731- 734

УДК 517.956

# Об одном случае вырождения систем уравнений первого порядка

Шукуров Х.Р.

**(Таджикский национальный университет)**

Трёхмерным аналогом системы Коши-Римана является система Мойсила-Теодореску:

$$u_x + v_y + w_t = 0\,, \quad s_x - v_t + w_y = 0\,, \; s_y + u_t - w_x = 0\,, \quad s_t - u_y + v_x = 0 \qquad (MT)$$

Решение $\varphi = (s, u, v, w)$ системы называется голоморфным вектором [1]. Систему (MT) запишем в комплексной форме

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{\partial U}{\partial t} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial t} + 2\dfrac{\partial U}{\partial \overline{z}} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $V = w - is,\; U = u - iv,\; \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right),\; \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right).$

В настоящей работе рассмотрено следующее обобщение системы (1):

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial V}{\partial z} - \overline{z}^l\dfrac{\partial U}{\partial t} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial t} + 2\overline{z}^l\dfrac{\partial U}{\partial \overline{z}} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

где $l$ – заданное положительное число. Когда $l = 0$ система (2) превращаются в систему (MT). Характеристический определитель системы (2) имеет следующий вид:

$$Q\left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right) = \overline{z}^{2l}\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right)^2.$$

Следовательно, за исключением оси $Ot$ она эллиптическая и вдоль оси $Ot$ вырождается в переопределённую систему[2]. В работе [3] в цилиндрической области рассмотрен случай параболического вырождения системы вдоль оси $Ot$.

Для системы (2) исследуем следующие задачи:

**Задача 1.** Найти решение системы (2), удовлетворяющее условию

$$U|_{t=0} = G\left(x, y\right), \tag{3}$$

где $G\left(x, y\right)$ заданная достаточно гладкая функция.

**Задача 2.** Найти решение системы (1), удовлетворяющее условию

$$V|_{t=0} = G\left(x, y\right), \tag{4}$$

где $G\left(x, y\right)$ заданная достаточно гладкая функция.

**Теорема 1.** Существует единственное решение задачи 1, непрерывно зависящее от $F\left(x, y\right)$ и даётся формулами

$$U = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}\,,\;\; V = -2\overline{z}^l\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \overline{z}}, \tag{5}$$

где $\mathrm{H} = \mathrm{H}\left(x, y, t\right) = \varphi\left(x, y, t\right) + i\psi\left(x, y, t\right)$, а $\varphi$ и $\psi$ регулярные гармонические в полупространстве $t > 0$ функции.

**Доказательство.** Непосредственной проверкой убедимся в том что, если $\varphi$ и $\psi$ являются гармоническим функциями в полупространстве $D$: $t>0$, то функции $U$ и $V$, определяемые формулами (5), удовлетворяют систему (2), Определим функции $\varphi$ и $\psi$. Из граничного условия (3) и первого равенства (5) следует, что

$$\left.\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}\right|_{t=0}=G\left(x,y\right).$$

Таким образом, для определения гармонических функций $\varphi$ и $\psi$ получили задачу Неймана в полупространстве $D$:

$$\Delta\varphi=0,\ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{t=0}=g_1\left(x,y\right)$$

и

$$\Delta\psi=0,\quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{t=0}=g_2\left(x,y\right),$$

где $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial t^2$, $g_1\left(x,y\right)=ReG\left(x,y\right)$, $g_2\left(x,y\right)=ImG\left(x,y\right)$. Как известно [5], если $g_1,g_2\in\ (R^2)$ и $g_i=O\left(r^{-1-\delta_i}\right),\quad \delta_i=const>0,\ i=1,2$, то единственное решение этих задач выписываются явно:

$$\varphi\left(x,y,t\right)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-}^{+}\int\limits_{\infty}^{\infty}\frac{g_1\left(\xi,\eta\right)d\xi d\eta}{\sqrt{\left(x-\xi\right)^2+\left(y-\eta\right)^2+t^2}},$$

$$\psi\left(x,y,t\right)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-}^{+}\int\limits_{\infty}^{\infty}\frac{g_2\left(\xi,\eta\right)d\xi d\eta}{\sqrt{\left(x-\xi\right)^2+\left(y-\eta\right)^2+t^2}}.$$

При помощи этих функций по формулам (5) выписывается единственное в $D$ решение задачи 1 для системы (2).

**Теорема доказана.**

**Теорема 2.** Существует единственное решение задачи 2, непрерывно зависящее от $F\left(x,y\right)$ и даётся формулами (5).

**Доказательство.** В этом случае для определения значений функций $\varphi$ и $\psi$ при $t=0$ получим неоднородную систему Коши-Римана

$$\left.\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \overline{z}}\right|_{t=0}=-\frac{1}{2}\overline{z}^{-l}F\left(x,y\right)\equiv F_1\left(x,y\right),\tag{6}$$

которая рассматривается на всей комплексной плоскости $z$. Если $F_1\left(x,y\right)$ непрерывная функция и существует $p>1$ такое, что $\int\limits_{-}^{+}\int\limits_{\infty}^{\infty}\left|F_1\left(x,y\right)\right|^p dxdy<\infty$, то существует единственное непрерывно дифференцируемое стремящееся к нулю на бесконечности решение $H$ уравнения (6)[6, с.41]]. Решая задачу Дирихле в полупространстве $D$: $t>0$ при помощи найденных значений на границе, определим непрерывно дифференцируемые в замкнутом полупространстве $\overline{D}$ гармонические функции $\varphi$ и $\psi$, при помощи которых по формулам (5) выписывается единственное в $D$ решение задачи 2 для системы (2).

**Теорема доказана.**

## Литература

1. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. –М.: Наука, 1984. –320с.

2. Михайлов Л.Г.Некоторые переопределённые системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. –Душанбе, 1986. –116с.
3. Муртазоев Д. Краевая задача для эллиптической системы первого порядка вырождающейся вдоль оси. ДАН РТ. 2006.т.49.№8. С.689-695.
4. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. –М.: Наука, 1988. –512с.
5. Курант Р. Уравнения с частными производными. -М.: Мир, 1965. -830с.
6. Янушаускас А. Многомерные эллиптические системы с переменными коэффициентами. –Вильнюс: Москлас, 1990. –180с.

УДК 519.98

# Системы квадратичных дифференциальных уравнений вольтерровского типа

Эшниязов А.

**(Гулистанский государственный университет, Узбекистан)**

Система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_k(t) = x_k(t)\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i(t)\right), \quad k = \overline{1,m} \tag{1}$$

называется дифференциальным уравнением *вольтерровского типа*, где $a_{ki} \in [-1;1]$ постоянные и $a_{ki} = -a_{ik}$, а $x_i(t)$ – неизвестные непрерывные дифференцируемые функции.

Пусть $A_m = (a_{ki})_{k,i=1}^{m}$, $|a_{ki}| \le 1,\ \forall k,i = \overline{1,m}$ кососимметричная матрица, т.е. $A_m^T = -A_m$.

$T_p$ – турнир состоит из конечного множества вершин $1, 2, ..., p$, причём каждая пара различных узлов $i$ и $j$ соединяется в точности одной из дуг $\overrightarrow{ij}$ или $\overrightarrow{ji}$.

$T_p$ – турнир называется сильным, если из произвольной вершины можно перейти к произвольной вершине в соответствии с направлением стрелок.

$T_p$ – турнир называется транзитивным, если он не содержит сильных подтурниров. Если произвольный подтурнир $T_p$ – турнира (и сам $T_p$ – турнир) либо транзитивный либо сильный, то такой $T_p$ – турнир называется однородным.

**Определение 1.** Кососимметричная матрица $A_m$ называется *трансверсальной*, если все главные миноры четного порядка отличны от нуля.

Очевидно, что если $A_m$ – трансверсальный, то $a_{ki} \neq 0$ при различных $k$ и $i$.

Каждой кососимметричной матрице

$$A_m = (a_{ki})_{k,i=1}^{m}$$

сопоставим турнир $T_m$ такой, что соответствующая ему матрица смежности есть $SignA_m = (sign\,(a_{ki}))_{k,i=1}^{m}$ т.е. вершины $k$ и $i$ соединены стрелкой исходящей из $k$ в $i$, если $a_{ki} < 0$, или вершины $k$ и $i$ соединены стрелкой исходящей из $i$ в $k$, если $a_{ki} > 0$.

**Теорема 1.** $T_p$ – турнир не является сильным тогда и только тогда, когда соответствующая ему матрица смежности изоморфна следующей матрице:

$$\begin{pmatrix} A_r & 1_{r\times s} \\ -1_{s\times r} & A_s \end{pmatrix}$$

где $r + s = p$.

**Определение 2.** Кососимметрическая матрица называется *транзитивной* (сильной), если соответствующий турнир транзитивный (сильный).

Кососимметричные матрицы $A_m^{(1)}$ и $A_m^{(2)}$ называются *изоморфными*, если соответствующие турниры $T_m^{(1)}$ и $T_m^{(1)}$ изоморфны.

Используя теорему 1 мы получим следующее предложение.

**Предложение 1.** Кососимметричная матрица не является сильной тогда и только тогда, когда она с точностью до изоморфизма имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} A_r & A^+_{r\times s} \\ A^-_{s\times r} & A_s \end{pmatrix}$$

где $A_r$ и $A_s$ кососимметричная матрица, все элементы матрицы $A^+_{r\times s}$ положительные, $A^-_{s\times r} = -(A^+_{r\times s})^T$, причём $r + s = m$.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (2.2.1) с начальным условием

$$x(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0), ..., x_m(t_0)) \in S^{m-1}. \tag{2}$$

Так как симплекс $S^{m-1}$ компактен, то решение задачи Коши существует и единственно в промежутке $(-\infty; +\infty)$ [1]. Для того чтобы показать, что

$$x(t) \in S^{m-1} \text{ при } t \in (-\infty; +\infty),$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t))$ решение задачи Коши, рассмотрим следующий функционал $f : R^m \to R$, для любого $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in R^m$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} x_k \tag{3}$$

Этот функционал называется следом.

С помощью этого функционала можно изучить ряд свойств решения дифференциального уравнения (2.2.1).

$(i)$. Пусть $x(t)$ решение дифференциального уравнения (2.2.1), тогда справедливо следующее:

$$f(\dot{x}(t)) = 0.$$

Действительно,

$$f(\dot{x}(t)) = \sum_{k=1}^{m} \left( x_k(t) \left( \sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i(t) \right) \right) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_j(t) x_i(t) = 0,$$

так как $a_{ij} = -a_{ji}$.

$(ii)$. Пусть $x(t)$ решение дифференциального уравнения (1) с начальным условием (2), тогда

$$f(x(t)) = 1 \ \text{ для любого } t \in (-\infty; +\infty).$$

Действительно, согласно $(i)$, получим

$$\dot{f}(x(t)) = \sum_{k=1}^{m} \dot{x}_k(t) = f(\dot{x}(t)) = 0.$$

Отсюда $f(x(t)) = f(x(t_0)) = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k(t_0) = 1$ для любого $t \in (-\infty; +\infty)$.

$(iii)$. Пусть $x(t)$ решение дифференциального уравнения (1) с начальным условием

$$x(t_0) = (0, x_2(t_0), ..., x_m(t_0)). \tag{4}$$

Тогда $x(t) = (0, x_2(t), ..., x_m(t))$ для любого $t \in (-\infty; +\infty)$.

Действительно, можно рассмотреть задачу Коши только относительно неизвестной функции $x_1(t)$, полагая $x_i(t)$ – заданными функциями, где $i = \overline{2, m}$:

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t)\left(\sum_{i=1}^{m} a_{1i}x_i(t)\right), \tag{5}$$

с начальным условием

$$x_1(t_0) = 0 \tag{6}$$

Так как правая часть дифференциального уравнения (5) удовлетворяет условию Липшица, то $x_1(t)$ решение задачи Коши для дифференциального уравнения (5) с начальным условием (6) существует и единственно, т.е. $x_1(t) = 0$ для любого $t \in (-\infty; +\infty)$.

**Следствие 1.** Пусть $x(t)$ решение дифференциального уравнения (1) с начальным условием (2), тогда

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t)) \in S^{m-1}$$

для любого $t \in (-\infty; +\infty)$.

**Следствие 2.** Пусть $x(t)$ решение дифференциального уравнения (1) с начальным условием

$$x_0 = x(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0), ..., x_m(t_0)) \in intS^{m-1} \tag{7}$$

Тогда $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t)) \in intS^{m-1}$ для любого $t \in (-\infty; +\infty)$.

Так как $A_m$ – кососимметричная матрица, тогда любая вершина симплекса $S^{m-1}$ является $x(t) = e_k$ *особым (стационарным)* решением дифференциального уравнения (1).

Пусть матрица $A_m = (a_{ki})_{k,i=1}^{m}$ не является сильной и пусть $T_m$ – турнир, соответствующий матрице $A_m$.

Согласно предложению 1., предположим, что матрица $A_m$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_r & A^{+}_{r\times s} \\ A^{-}_{s\times r} & A_s \end{pmatrix}$$

где $A_r$ и $A_s$ – кососимметричние матрицы, все элементы матрицы $A^{+}_{r\times s}$ положительны и $A^{-}_{s\times r} = -(A^{+}_{r\times s})^T$, здесь $r + s = m$. Кроме того, предположим, что $T_r$ – подтурнир и $T_s$ – подтурнир $T_m$ – турнира являются турнирами соответствующими кососимметричным матрицам $A_r$ и $A_s$.

**Теорема 2.** Пусть $x(t)$ решение дифференциального уравнения (1) с начальным условием (7). Тогда для произвольной вершины $i$ турнира $T_s$ выполняется равенство $\lim\limits_{t\to+\infty} x_i(t) = 0$ и для произвольной вершины $j$ турнира $T_r$ выполняется $\lim\limits_{t\to-\infty} x_j(t) = 0$.

Биологический смысл теоремы 2.

*Если турнир эволюции не является сильным, то все биологические виды можно разбить на два класса таким образом, что виды из первого класса в процессе эволюции постепенно (монотонно) исчезают (совокупность которых в теореме 2 обозначено через $T_s$), а предыстория эволюции начинается в окрестности некоторого равновесного состояния в котором присутствуют только лишь виды из первого класса.*

**Предложение 2.** Если матрица $A_m$ транзитивна, то существуют $i$ и $j$ такие, что $P = \{x \in S^{m-1};\ A_m x \succ 0\} = e_i$ и $Q = \{x \in S^{m-1};\ A_m x \prec 0\} = e_j$

Точки $e_i$ и $e_j$, в предложении 2., называются соответственно и динамической системы (1) в случае, когда матрица $A_m$ транзитивна.

Пусть $A_m = (a_{ki})_{k,i=1}^m$ – транзитивная матрица. Предположим, что точки $e_i$ и $e_j$ являются, соответственно, истоком и стоком динамической системы (1).

Следующее утверждение непосредственно получается из теоремы 1. и из предложения 2.

**Следствие 3.** Пусть $x(t)$ решение дифференциального уравнения (1) с начальным условием (7). Тогда $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = e_j$ и $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = e_i$.

Таким образом, как и следовали, ожидать *в случае биологической системы с транзитивным турниром траектория сходится к неподвижной точке $e_j$, т.е. в процессе эволюции выживает только лишь один сильнейшей вид.*

**Литература**

1. Палис Ж., ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. – М.: Мир, 1986. – 304 с.

УДК 519.98

# Квадратичные стохастические операторы вольтерровского типа

Эшниязов А., Норбоев Ф.Ш.

**(Гулистанский государственный университет, Узбекистан)**

Ряд задач прикладного характера приводят к необходимости изучения асимптотического поведения траекторий квадратичных отображений симплекса $S^{m-1} \to S^{m-1}$ в себя.

В пространстве $R^m$ множество

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in R^m, \quad x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}), \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\} \tag{0.1}$$

называется $(m-1)-$мерном стандартном симплексом.

Оператор $V$, отображающий симплекс в себя, т.е. $V: \quad S^{m-1} \to S^{m-1}$, называется стохастическим.

Оператор $V: \quad R^m \to R^m$ называется квадратичным, если существует симметричный, билинейный оператор

$$B(\circ, \circ): \quad R^m \times R^m \to R^m \tag{0.2}$$

для которого

$$V(x) = B(x, x), \text{ в частности } V(\lambda x) = \lambda^2 V(x) \tag{0.3}$$

Любой квадратичный оператор задается в $R^m$ в виде пространственной матрицы

$$(P_{ij,k})_{ij,k=\overline{1,m}} \tag{0.4}$$

Нетрудно заметить, что квадратичный оператор

$$(Vx)_k = \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,k} x_i x_j \tag{0.5}$$

является стохастическим, если выполнены следующие условия:

$$P_{ij,k} \geq 0, \quad P_{ij,k} = P_{ji,k}, \quad \sum_{k=1}^{m} P_{ij,k} = 1 \tag{0.6}$$

Условия (0.6) обеспечивают сохранение основного симплекса, т.е. оператор отображает симплекс в себя. Изучение квадратичных стохастических операторов восходит к работам С.Н.Бернштейна [1]. Далее теория была развита в работах [2–6]. Основные результаты в двумерном симплексе получены С.С.Валландером [4]. В работах Р.Н.Ганиходжаева [7] обобщен результат Валландера на случай любой конечной размерности.

Далее оператор (0.5) с условиями (0.6) назовем квадратичным стохастическим оператором (к.с.о.).

## 1. Общий вид квадратичных стохастических операторов вольтеровского вида.

***Определение.*** Оператор $V: \quad S^{m-1} \to S^{m-1}$ называется *вольтерровым*, если коэффициенты наследственности $p_{ij,k}$ удовлетворяют условию

$$p_{ij,k} = 0, \textit{для любых } k \notin \{i,j\}\,. \tag{1.1}$$

*Вольтерровость к.с.о. имеет простой биологический смысл: в каждом поколении индивид может унаследовать только лишь тот признак (разновидность), которым обладает один из его родителей.*

**Теорема 1.** Если $V: \quad S^{m-1} \to S^{m-1}$ вольтерров оператор, то $x' = Vx$ можно записать в виде:

$$x'_k = x_k \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i\right), k = \overline{1, m} \tag{1.2}$$

где $a_{ki} = 2p_{ij,k} - 1$ при $i \neq k$ и $a_{ki} = -a_{ik}$, $|a_{ki}| \leq 1$.

## 2. Предельного поведения траекторий вольтеровского оператора.

Одна из основных задач состоит в изучении предельного поведения траекторий $x^{(0)}, Vx^{(0)}, V^2x^{(0)}, \ldots$, т.е. итераций отображения $V$.

Последовательность состояний $\{V^n x^{(0)}\}_{n=0}^{\infty}$ называется *траекторией вольтерровского оператора* $V: \quad S^{m-1} \to S^{m-1}$.

Если траектория сходится, то ее предел есть неподвижная точка $\overline{x} = V\overline{x}$.

В несколько более общем случае траектория имеет конечное предельное множество и может быть бесконечным

Через $\omega(x^0)$ обозначим множество предельных точек этой траектории.

В 1959 г. Менцель, Смит и Улам при помощи ЭВМ детально изучили поведение траекторий всех возможных эволюционных операторов для популяции с тремя биологическими видами [5].

Приведем один из результатов, полученных ими.

$$\text{Пусть } S^2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3: \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0, \;\; x_1 + x_2 + x_3 = 1\right\}. \tag{2.1}$$

Рассмотрим динамическую систему:

$$V: \quad \begin{cases} x'_1 = x_1^2 + 2x_1x_2 \\ x'_2 = x_2^2 + 2x_2x_3 \\ x'_3 = x_3^2 + 2x_1x_3 \end{cases} \tag{2.2}$$

Очевидно, $V: \quad S^2 \to S^2$, так как $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ и

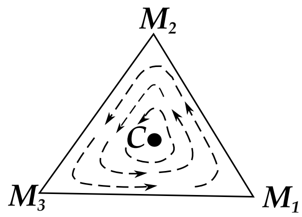
$$x'_1 + x'_2 + x'_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = 1. \tag{2.3}$$

Геометрически двумерный симплекс $S^2$ представляет собой треугольник с вершинами $M_1(1;0;0)$; $M_2(0;1;0)$; $M_3(0;0;1)$ и с центром $C\left(\frac{1}{3}; \quad \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{3}\right)$. Легко заметить, что точки $M_1$,

$M_2$, $M_3$, $C$ являются неподвижными точками (равновесными состояниями) эволюционного оператора $V$.

Оказалась, что траектория любой другой (неравновесной) точки, развертываясь по спирали, приближается к границе симплекса $S^2$, причем никакая траектория не сходится (см. рис. справа).

**3. Неподвижные точки операторов вольтеровского типа.** Пусть $V: \quad S^{m-1} \to S^{m-1}$ – оператор вольтеровского типа




$$x'_k = x_k \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i\right), k = \overline{1,m}, a_{ki} = -a_{ik}, |a_{ki}| \leq 1, \qquad (3.1)$$

и $X-$ множество его неподвижных точек. Из (3.1) ясно, что $x \in X$ равносильно равенству $x_k \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki} x_i = 0, k = \overline{1,m}$, т.е.

$$suppx \cap suppAx = \varnothing \qquad (3.2)$$

где supp $x = \{i : x_i \neq 0\}$.

**Лемма 1.** Если $A = (a_{ki})-$кососимметрическая матрица, то

$$P = \left\{ x \in S^{m-1} : \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i \geq 0, \qquad k = \overline{1,m} \right\} \neq \varnothing.$$

**Следствие 1.** Имеет место равенство

$$Q = \left\{ x \in S^{m-1} : \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i \leq 0, \qquad k = \overline{1,m} \right\} \neq \varnothing.$$

**4. Функции Ляпунова.** Пусть $V: \quad S^{m-1} \to S^{m-1}$ оператор вольтеровского типа и $x^0 \in S^{m-1}$. Последовательность $\{x^{(n)}\}$, где $x^{(n)} = V^n x^0$, называется траекторией при $n \in Z$, положительной (отрицательной) траекторией при $n \in N(-n \in N)$. Через $\omega^+(x^0)$ и $\omega^-(x^0)$ обозначаются множества предельных точек, соответственно, положительной и отрицательной траекторий. Непрерывный функционал $\phi : S^{m-1} \to R$ называется функцией Ляпунова для дискретной динамической системы

$$x_k^{(n+1)} = \left(x_k^{(n)} 1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i^{(n)}\right), \quad k = \overline{1,m}, \quad n \in N, \qquad (4.1)$$

если для любой начальной точки $x^0 \in S^{m-1}$ существуют пределы

$$\lim_{n \to +\infty} \phi(x^{(n)}), \quad \lim_{n \to +\infty} \phi(x^{(n)}).$$

Лемма 2 [7]. Если $r \in intP$, то $Arg \max \psi_r(x) = [M]-$замыкание множества $M = \{x \in X : \text{supp}x = \text{supp}r\}$.

**Теорема 3** [7]. Если $p = (p_1, p_2, ..., p_m) \in P$, то $\phi(x) = x_1^{p_1} \cdot ... \cdot x_m^{p_m}$ функция Ляпунова для (4.1).

**Теорема 4.** Если $x^0 \notin X$, то $\omega^+(x^0) \subset \partial S^{m-1}$.

**Теорема 5.** Если положительная траектория не сходится, то $\omega^+(x^0)$ бесконечно.

**Теорема 6.** Отрицательные траектории сходятся, причем $\omega^-(x^0) \in P$, если $x^0 \in intS^{m-1}$.

Земечание. Если положительная траектория сходится и $x^0 \in intS^{m-1}$, то $\omega^+(x^0) \in Q$.

Пример 1. Пусть $V : S^3 \to S^3$ имеет вид:

$$V : \begin{cases} x_1' = x_1(1 + x_2 - x_3 + x_4) \\ x_2' = x_2(1 - x_1 + x_3 + x_4) \\ x_3' = x_3(1 + x_1 - x_2) \\ x_4' = x_4(1 - x_1 - x_2) \end{cases}$$

Решив необходимые неравенства находим

$$P = \left\{x \in S^3 : \quad Ax \geq 0\right\} = \left\{(0, \quad 0, \quad \lambda, \quad 1 - \lambda) : \quad 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}\right\},$$

$$Q = \left\{x \in S^3 : \quad Ax \leq 0\right\} = \left\{\left(\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}, \ 0\right)\right\},$$

$$M = \{(0, \quad 0, \quad \lambda, \quad 1 - \lambda) : \quad 0 < \lambda < 1\}.$$

Любая отрицательная траектория сходится к некоторой точки из $P$. Положительная траектории не сходятся.


**Литература**

1. Бернштейн С.Н. Решение одной математической проблемы связанной с теорией наследственности //Уч.зап.Н.–И.Укр.отд.мат. –1924. № 1. –С.83–115.
2. Улам С. Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964.
3. Kesten H. Quadratic Transformations: a model for population qrownth. I // Adv. Appl. Probab.–1970.–V.2, № 1.–P.1–82.
4. Валландер С.С. О предельном поведении последовательности итераций некоторых квадратичных преобразований //Докл. АН СССР. –1972.– Т. 202, № 3. –С. 515–517.
5. Menzel M.T., Stein P.R., Ulam S.M. Quadratic Transformations. 1.–Los Alamos, 1959.–P.158 (Rep. T. A 2305)
6. Любич Ю.И. Математические структуры в популяционной генетике. Киев: Наук. Думка, –1983.
7. Ганиходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторы, функции Ляпунова и турниры // Ма.сб.1992.Т.183, № 8. С. 119–140.
8. Ганиходжаев Р.Н. Исследования по теории квадратичных стохастических операторов: Дисс. . . .д.ф–м.н.Ташкент.–1993.
9. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ.–М.: Наука, 1984.–752 с.


УДК 517.952

## Гузориши масъалаҳои канорӣ барои як намуди системаҳои навъашон таназзулёфта


Халилов Ш.Б.[†], Рушанов Б.Н.[‡]

**([†]Донишгоҳи русӣ-тоҷикии(славянии) Тоҷикистон)**
**([‡]Донишгоҳи миллии Тоҷикистон)**


Одатан барои системаи муодилаҳои ба ақидаи Петровский эллипсӣ гуориши масъалаҳои канорӣ (сарҳадӣ) хос мебошанд. Масъалаи Коши (масъала бо шартҳои аввала) бошад хоси системаи гиперболӣ муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусӣ аст. Агар муайянкунандаи характеристикии системаи муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусӣ ба сифр баробар шавад, навъи онро муайян кардан ғаири имкон аст , яъне навъи система таназзул меёбад. Аз ин лиҳоз маълум нест, ки кадом намуди масъалаҳои канорӣ барои чунин системаи муодилаҳо коррект ӣ аст.

Дар ин гузориш як навъи махсуси чунин системаҳо дида баромада шудааст ва нишон дода шудааст, ки дар мавриди ширкат надоштани аъзои хурд дар муодилаҳои система барои он ягон намуди коррективии масъалаҳои канорӣ ё омехта вуҷуд надорад ва барои мавҷуд будани масъалаҳои каррективии гузошта шуда ширкати аъзои хурд таъсири мусбат мерасонанд.

Бигузор $(x, y, z)$ нуқтаи фазои евклидии $R^3$ бошад ва бигузор $D$ ягон соҳаи ихтиёрӣ аз ин фазо бошад. Дар соҳаи $D$ системаи муодилаҳои зеринро дида мебароем

$$\vec{a} \times rot\vec{U} + \lambda U = \vec{f}. \tag{1}$$

Дар ин ҷо $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)\,,\ a_i = a_i\,(x, y, z)\,,\ \vec{f} = (f_1, f_2, f_3)\, f_i = f_i\,(x, y, z)\,, (i = 1,2,3)$ вектор-функсияҳои дар соҳаи $D$ муайян, $\vec{U} = (u, v, w)$ - вектор - функсияест, ки муайян карданаш дар соҳаи $D$ талаб карда шудааст. Бигузор дар сарҳади соҳаи $D\partial D = S$ вектор-функсияи $\vec{U}$ шарти зеринро қаноат мекунонад:

$$\alpha_i u + \beta_i v + \gamma_i w = g_i \ (i = 1, 2)\,. \tag{2}$$

Дар ин ҷо $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$, $g_i$ – функсияҳои дар сарҳади соҳаи $D$ сатҳи $S$ бефосила мебошанд.

Муайян мекунем, ки барои кадом қиматҳои вектор-функсияҳои $\vec{a}, \vec{f}$ ва функсияҳои $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$, $g_i$, $(i = 1, 2)$ ҳали ягонаи уствори системаи муодилаҳои (1), ки шартҳои канории (2) - ро қаноат мекунад, вуҷуд дорад.

Агар системаи (1) дар координатаҳо чунин ифода ёбад:

$$\begin{cases} a_2\,(v_x - u_y) - a_3\,(u_z - w_x) + \lambda u = 0 \\ a_3\,(w_y - v_z) - a_1\,(v_x - u_y) + \lambda v = 0 \\ a_1\,(u_z - w_x) - a_2\,(w_y - v_z) + \lambda w = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Муодилаи якуми системаи муодилаҳои (2) - ро ба $a_1$, муодилаи 2 - юмро ба $a_2$ ва муодилаи сеюмро ба $a_3$ зарб намуда натиҷаҳои ҳосилшударо ҷамъ мекунем, онгоҳ ҳосил мекунем :

$$\lambda(a_1 u + a_2 v + a_3 w) = 0 \tag{4}$$

Аз ин баробарӣ бармеояд, ки агар $\lambda = 0$ бошад, муодилаҳои система байни ҳам хаттӣ вобаста мешаванд, якеи онҳо чун комбинатсияи хаттии боқимондааш ифода меёбад. Аз ин рӯ барои муайян кардани се функсияи номаълум танҳо ду муодила пайдо мекунем, ки барои яккимата ёфтани онҳо нокифоя аст. Аз ин рӯ дар оянда фарз менамоем,ки дар соҳаи муоинашаванда ҳамеша $\lambda \neq 0$ аст. Дар ин маврид аз баробарии (4) бармеояд, ки

$$a_1 u + a_2 v + a_3 w = 0 \tag{5}$$

Аз баробарии (5) истифода бурда яке аз функсияҳои номаълумро бо дуи дигари боқимондааш ифода менамоем. Ифодаи ҳосилшударо ба муодилаҳои системаи (3) мегузорем. Масалан, агар $a_3 \neq 0$ бошад, аз ифодаи (4) $w$ меёбем:

$$w = -\frac{1}{a_3}\,(a_1 u + a_2 v) \tag{6}$$

Онро ба ду муодилаи системаи (3) гузошта ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} a_1\,u_x + a_2\,u_y + a_3\,u_z - [\lambda - A_1]u + B_1\,v = 0 \\ a_1\,v_x + a_2\,v_y + a_3\,v_z - [\lambda - A_2]v + B_2\,u = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Дар ин ҷо $A_1 = a_3 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1}{a_3}\right)$, $A_2 = a_3 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)$, $B_1 = a_3 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)$, $B_2 = a_3 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_1}{a_3}\right)$. Агар $B_1 = 0$, $B_2 = 0$ бошад ин системаи муодилаҳо ба ду муодилаи алоҳида ҷудо мешавад ва ҳар яки онро дар алоҳидагӣ ҳал намуда функсияҳои $u$ ва $v$ – ро меёбем. Дар ин маврид ҳосил мекунем: $a_1 = a_3(x, y, z)\beta(x, z)$, $a_2 = a_3(x, y, z)\alpha(y, z)$, $\mathrm{A_1{=}a_3(x, y, z)}\beta_{\mathrm{x}}\mathrm{(x, z)}$, $\mathrm{A_2{=}a_3\,(x, y, z)}\,\alpha_{\mathrm{y}}\,\mathrm{(y, z)}$ ва

$$\begin{cases} \mathrm{u_z}{+}\beta\,\mathrm{(x, z)\,u_x}{+}\alpha\,\mathrm{(y, z)\,u_y}{-}\left(\frac{\lambda}{\mathrm{a_3}}{-}\beta_{\mathrm{x}}\,\mathrm{(x, z)}\right)\mathrm{u} = 0 \\ \mathrm{v_z}{+}\beta\,\mathrm{(x, z)\,v_x}{+}\alpha\,\mathrm{(y, z)\,v_y}{-}\left(\frac{\lambda}{\mathrm{a_3}}{-}\alpha_{\mathrm{y}}\mathrm{(y, z)}\right)\mathrm{v} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Системаи муодилаҳои характеристикӣ барои мудилаи

$$\mathrm{u_z}{+}\beta\,\mathrm{(x, z)\,u_x}{+}\alpha\,\mathrm{(y, z)\,u_y} = 0$$

намуди зерин дорад:

$$\frac{dx}{\beta\,\mathrm{(x, z)}} = \frac{dy}{\alpha\,\mathrm{(y, z)}} = \frac{dz}{1}$$

ва агар функсияҳои $\alpha\,\mathrm{(y, z)}$ ва $\beta\,\mathrm{(x, z)}$ функсияҳои бефосила бошанд, функцияҳои $x - \varphi_1\,(z) = C_{1,}\ y - \varphi_2\,(z) = C_{2,}$ интеграли умумии системаи характеристикӣ, яъне характеристикаҳои муодилаи зикршуда мебошанд. Аз ин рӯ дар муодилаҳои системаи (8) ба тағйирёбандаҳои нави $\xi = x - \varphi_1\,(z)\,,\quad \eta = y - \varphi_2\,(z)\,,\ \zeta = z$ гузашта меёбем

$$\tilde{u}_{\zeta} = \left(\frac{\lambda}{\mathrm{a_3}(\xi{+}\varphi_1\,(\zeta)\,, \eta{+}\varphi_2\,(\zeta)\,, \zeta)} - \beta_{\xi}\,(\xi{+}\varphi_1\,(\zeta)\,, \zeta)\right)\,\tilde{u},$$

$$\tilde{v}_{\zeta} = \left(\frac{\lambda}{\mathrm{a_3}(\xi{+}\varphi_1\,(\zeta)\,, \eta{+}\varphi_2\,(\zeta)\,, \zeta)} - \alpha_{\eta}\,(\eta{+}\varphi_2\,(\zeta)\,, \zeta)\right)\,\tilde{v}.$$

Аз ин ҷо меёбем:

$$u\,(x, y, z) = \tilde{u}\,(\mathrm{x}{-}\varphi_1\,\mathrm{(z)}\,, \mathrm{y}{-}\varphi_2\,\mathrm{(z)}\,, \mathrm{z}) =$$

$$= \Phi_1(\mathrm{x}{-}\varphi_1\,\mathrm{(z)}\,\mathrm{y}{-}\varphi_2\,\mathrm{(z)})exp\left[\int\limits_0^z \left(\frac{\lambda}{\mathrm{a_3(x, y, \zeta)}} - \beta_{\mathrm{x}}\,(\mathrm{x}, \zeta)\right)d\zeta\right],$$

$$v\,(x, y, z) = \tilde{v}\,(\mathrm{x}{-}\varphi_1\,\mathrm{(z)}\,, \mathrm{y}{-}\varphi_2\,\mathrm{(z)}\,, \mathrm{z}) =$$

$$= \Phi_2(\mathrm{x}{-}\varphi_1\,\mathrm{(z)}\,\mathrm{y}{-}\varphi_2\,\mathrm{(z)})exp\left[\int\limits_0^z \left(\frac{\lambda}{\mathrm{a_3(x, y, \zeta)}} - \alpha_{\mathrm{y}}\,(\mathrm{y}, \zeta)\right)d\zeta\right].$$

Бигузор соҳаи $D = \{(x, y, z) \in R^3 : -\infty < x, y < +\infty,\ 0 < z < +\infty\}$ - нимфазо ва $\partial D = \{z = 0\}$ – сарҳади он бошад. Бигузор инчунин функсияҳои $\alpha_{i,}\ \beta_{i,}\gamma_{i,}\ g_{i,}\ i = 1, 2$ дар ҳамвории $\{z = 0\}$ бефосила ва дар нуқтаҳои беохирӣ маҳдуд бошанд. Онгоҳ агар

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{9}$$

бошад, ки дар ин ҷо $\bar{a}_1 = a_1\,(x, y, 0)\,,\ \ \bar{a}_2 = a_2\,(x, y, 0)\,, \bar{a}_3 = a_3\,(x, y, 0)$ аст.

$$(\alpha_1\,\bar{a}_3 - \gamma_1\bar{a}_1)\,\bar{u} + (\beta_1\,\bar{a}_3 - \gamma_1\bar{a}_2\,)\,\bar{v} = \bar{a}_3 g_1\,(x, y)$$

$$(\alpha_2\,\bar{a}_3 - \gamma_2\bar{a}_1)\,\bar{u} + (\beta_2\,\bar{a}_3 - \gamma_2\bar{a}_2\,)\,\bar{v} = \bar{a}_3 g_2\,(x, y)$$

Мешавад, ки $\bar{u} = u\,(x, y, 0)\,,\, \bar{v} = v(xy, 0)$ аст. Ҳамин тавр, ҳалли масъалаи тадқиқшаванда дарин ҳолат дар намуди ошкор чунин навишта мешавад:

$$u\,(x, y, z) = \frac{1}{\Delta(t,\tau)}\left\{\left[\beta_2(t,\tau)a_3(t,\tau,z) - \gamma_2(t,\tau)a_2(t,\tau,z)\right]g_1(t,\tau) - \right.$$
$$\left. - \left[\beta_1(t,\tau)a_3(t,\tau,z) - \gamma_1(t,\tau)a_2(t,\tau,z)\right]g_2(t,\tau)\right\} \times exp\left[\int\limits_0^z\left(\frac{\lambda}{a_3(x,y,\zeta)} - \beta_x(x,\zeta)\right)d\zeta\right],$$

$$v\,(x, y, z) = \frac{1}{\Delta(t,\tau)}\left\{-\left[\alpha_2\,(t,\tau)\,\mathrm{a}_3\,(t,\tau,\,z) - \gamma_2\,(t,\tau)\,\mathrm{a}_1\,(t,\tau,\,z)\right]g_1\,(t,\tau) + \right.$$
$$\left. + \left[\alpha_1\,(t,\tau)\,\mathrm{a}_3\,(t,\tau,\,z) - \gamma_1\,(t,\tau)\,\mathrm{a}_1\,(t,\tau,\,z)\right]g_2\,(t,\tau)\right\} \times exp\left[\int\limits_0^z\left(\frac{\lambda}{\mathrm{a}_3(\mathrm{x},\mathrm{y},\zeta)} - -\alpha_{\mathrm{y}}\,(\mathrm{y},\zeta)\right)d\zeta\right],$$

$$W\,(x, y, z) = -\frac{1}{\Delta\,(t,\tau)}\left\{\left[\beta_2\,(t,\tau)\,\mathrm{a}_1\,(t,\tau,\,z) - \alpha_2\,(t,\tau)\,\mathrm{a}_2\,(t,\tau,\,z)\right]g_1\,(t,\tau) + \right.$$
$$\left. + \left[\beta_1\,(t,\tau)\,\mathrm{a}_1\,(t,\tau,\,z) - \alpha_1\,(t,\tau)\,\mathrm{a}_2\,(t,\tau,\,z)\right]g_2\,(t,\tau)\right\} \times exp\left[\lambda\int\limits_0^z\frac{d\zeta}{\mathrm{a}_3\,(\mathrm{x},\mathrm{y},\zeta)}\right] -$$
$$- \frac{\mathrm{a}_1\,(t,\tau,\,z)}{\mathrm{a}_3\,(t,\tau,\,z)\,\Delta\,(t,\tau)}\left\{\left[\beta_2\,(t,\tau)\,\mathrm{a}_3\,(t,\tau,\,z) - \gamma_2\,(t,\tau)\,\mathrm{a}_2\,(t,\tau,\,z)\right]g_1\,(t,\tau) - \right.$$
$$\left. - \left[\beta_1\,(t,\tau)\,\mathrm{a}_3\,(t,\tau,\,z) - \gamma_1\,(t,\tau)\,\mathrm{a}_2\,(t,\tau,\,z)\right]g_2\,(t,\tau)\right\} \times exp\left[-\int\limits_0^z\beta_{\mathrm{x}}\,(\mathrm{x},\zeta)d\zeta\right] -$$

$$- \frac{\mathrm{a}_1\,(t,\tau,\,z)}{\mathrm{a}_3\,(t,\tau,\,z)\,\Delta\,(t,\tau)}\left\{-\left[\alpha_2\,(t,\tau)\,\mathrm{a}_3\,(t,\tau,\,z) - \gamma_2\,(t,\tau)\,\mathrm{a}_1\,(t,\tau,\,z)\right]g_1\,(t,\tau) + \right.$$
$$\left. + \left[\alpha_1\,(t,\tau)\,\mathrm{a}_3\,(t,\tau,\,z) - \gamma_1\,(t,\tau)\,\mathrm{a}_1\,(t,\tau,\,z)\right]g_2\,(t,\tau)\right\} \times \left[-\int\limits_0^z\alpha_{\mathrm{y}}\,(\mathrm{y},\zeta)d\zeta\right].$$

Дар ин ҷо $t = x - \varphi_1\,(z) + \varphi_1\,(0)\,,\ \tau = y - \varphi_2\,(z) + \varphi_2\,(0)$ аст, ки $\varphi_1\,(z)\,,\,\varphi_2\,(z)$ мувофиқан, ҳалли муодилаҳои дифференсиалии

$$\frac{dx}{dz} = \beta\,(\mathrm{x},\mathrm{z})\,,\ \frac{dy}{dz} = \alpha\,(\mathrm{y},\mathrm{z})$$

мебошанд.

**Теорема.** *Агар коэффитсиентҳои системаи муодилаҳои (1) дар нимфазои $D = \{(x, y, z) \in R^3 :\ -\infty < x, y < +\infty,\, 0 < z < +\infty\}$ бефосила дифференсиронидашаванда буда шартҳои $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{a_2}{a_3}\right) = 0,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_1}{a_3}\right) = 0$ қаноат кунонад ва $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,g_i, i = 1, 2$ дар ҳамвории $\{z = 0\}$ бефосила бошанд, он гоҳ ҳалли ягонаи устувори масъалаи гузошташуда вуҷуд дорад, ки онро дар намуди ошкор навиштан мумкин аст.*

## Алгебра, теория чисел и вычислительная математика

УДК 519.624.3

# Notes on estimation of an interpolation inequality for piecewise linear finite element approximations

Èrgash Muhamadiev[†], Murtazo Nazarov[‡]

**([†]Vologda State Technical University, Vologda, Russia)**
**([‡]Texas A& M University 3368 TAMU, USA)**

**Introduction.** The stabilized finite element methods is one of the most investigated numerical methods for over three decades and it goes back to early work of [1] and [4]. The finite element discretization is stabilized by adding residual based nonlinear terms: the so-called streamline diffusion, and discontinuous or shock- capturing terms see e.g. [3, 5]. However, no theoretical justification of showing improvements of solutions from these shock-capturing methods was available until [6]. [6] proposed to construct the shock-capturing term as a certain artificial viscosity with a residual-based viscosity coefficient. The convergence of the streamline diffusion method augmented with a residual-based shock-capturing mechanism has been known since the groundbreaking work of [9, 8, 6, 10]. Szepessy's proof is based on the theory of measure-valued solutions introduced by [2]. The three ingredients of the proof are as follows: (1) uniform boundedness in $L^\infty$; (2) weak consistency with all entropy inequalities; (3) strong consistency with the initial data. One should remark that the nonlinear shock-capturing term is the main term that is needed to achive the convergence. Recently, it has been shown in [7], that by disregarding the streamline diffusion term entirely and by having only residual based shock-capturing or artificial diffusion one can prove the convergence to the unique entropy solution.

The first condition of DiPerna, the uniform boundedness in $L^\infty$, or the so-called maximum principle, is one of the key points for the convergence of numerical methods and analysis of nonlinear hyperbolic equations. In the above references, the $L^\infty$-bound is proved using interpolation estimates of [8, Lemmas 3.4, 4.2]. The main contribution of this paper is to improve Lemma 4.2 of [8] and derive the optimal estimate in terms of polynomial degree, $p$. The original estimate gives the lower bound proportional to the negative square of $p$, $(p^{-2})$, which obviously goes to zero as $p$ increases. We prove that the lower bound proportional to square of logarithm of $p$, $(\log^2 p)$, which is increasing function, moreover we show that this lower bound is sharp.

The main results of this paper are presented in the following section.

**Main results.** Let $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ be a shape-regular mesh family of $\mathbb{R}^2$, $K \in \mathcal{T}_h$ be an element of this mesh. We introduce the following finite element space

$$V = v \in H^1(\mathbb{R}^2) : v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2), v|_K \in \mathcal{P}_1(K),$$

where $\mathcal{P}_1(K)$ is the set of two-variate polynomials over $K$ of total degree at most 1. The standard Lagrange interpolation operator in $V$ is denoted by $\pi$.

The following lemma is an essential ingredient for the $L^\infty$-bound that is used in the above literature:

**Lemma 1** There is a uniform constant $C > 0$ such that the following inequality holds for all $p = 2m$, $m = 1, 2, 3, \dots$ and all $U \in V$:

$$\int_{\tau_h} \nabla U \cdot \nabla\pi(U^{p-1})dx \geq CM(p) \sum_{K\in\tau_h} \int_K |\nabla U|^2 U^{p-2}dx \tag{1}$$

where $M(p)$ is a constant depending only on $p$.

In [8, Lemma 4.2], [6, Lemma 4.2], and [10, Lemma 3.3], the function $M(p)$ is defined to be $M(p) = 1/p^2$, which gives a very weak estimate, since $1/p^2$ goes fast to zero as $p \to \infty$. The main contribution of this paper is to improve the estimate (1) significantly. It is stated as the following theorem:

**Theorem 1** There is a uniform constant $C > 0$ such that the inequality (1) holds for $M(p) = \ln^2 p$, $p = 2m$, $m = 1, 2, 3, \dots$ and all $U \in V$.

The function $M(p) = \ln^2 p$ is an increasing function. Here we formulate the second contribution of this paper that shows that this constant is optimal:

**Theorem 2** Assume $\tau_0$ is a triangulation which consist of only one right triangle $K_0$. Then there exist a function $U \in V$ such that

$$\int_{K_0} \nabla U{\cdot}\nabla\pi(U^{p-1})dx < C_0M(p) \int_{K_0} |\nabla U|^2U^{p-2}dx, \tag{2}$$

for all $p = 2m$, $m = 1, 2, 3, \dots$, where $C_0 > 0$ is a constant independent of $p$.

In other words Theorem (2) proves that the inequality (1) is sharp, i.e there is no another function $M(p) \neq \ln^2 p$ such that satisfies the inequality (1) and $\lim_{p\to\infty} M(p)/\ln^2 p = \infty$.

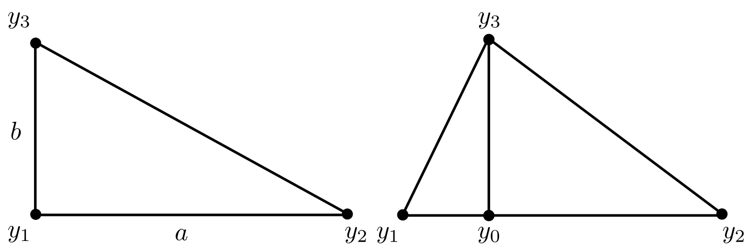



Figure 1: The local element of the triangulation in 2D

Let us consider a right triangle $K \in \tau_h$ given as in Fig Fig 1(a), with sides with length $a$ and $b$. The function $U$ in this triangle defined as

$$U = y_1 + \frac{x_1}{a}(y_2 - y_1) + \frac{x_2}{b}(y_3 - y_1),$$

where $y_i, i = 1, 2, 3$ are the nodal values of the function, $x_1$ and $x_2$ are the coordinate directions, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Since, $\nabla U{\cdot}\nabla\pi(U^{p-1})$ and $|\nabla U|^2$ are constant on $K$, therefore it is sufficient to prove the inequality for one triangle. For this purpose, let us define two functions $F_{K,p}$ and $S_p$ such as

$$F_{K,p}(y_1, y_2, y_3) = \frac{\int_K \nabla U{\cdot}\nabla\pi(U^{p-1})dx}{|\nabla U|^2} textand S_p(y_1, y_2, y_3) = \int_K U^{p-2}dx$$

A simple algebra gives that $\nabla U = \left(\frac{1}{a}(y_2 - y_1), \frac{1}{b}(y_3 - y_1)\right)$, and $\nabla\pi(U^{p-1}) = \left(\frac{1}{a}(y_2^{p-1} - y_1^{p-1}), \frac{1}{b}(y_3^{p-1} - y_1^{p-1})\right)$,

$$F_{K,p}(y_1, y_2, y_3) = \frac{\frac{1}{a^2}(y_2 - y_1)(y_2^{p-1} - y_1^{p-1}) + \frac{1}{b^2}(y_3 - y_1)(y_3^{p-1} - y_1^{p-1})}{\frac{1}{a^2}(y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{b^2}(y_3 - y_1)^2} \cdot \frac{ab}{2}$$

By defining constants $C_{a,b}$, $C'_{a,b}$ and function $F_p(y_1, y_2, y_3)$ such as

$$C_{a,b} := \frac{ab}{2}\min\left(\frac{a^2}{b^2}, \frac{b^2}{a^2}\right) \quad C'_{a,b} := \frac{ab}{2}\max\left(\frac{a^2}{b^2}, \frac{b^2}{a^2}\right).$$

$$F_p(y_1, y_2, y_3) := \frac{(y_2 - y_1)(y_2^{p-1} - y_1^{p-1}) + (y_3 - y_1)(y_3^{p-1} - y_1^{p-1})}{(y_2 - y_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}, \tag{3}$$

we get the following relation:

$$C_{a,b} \cdot F_p(y_1, y_2, y_3) \le F_{K,p}(y_1, y_2, y_3) \le C'_{a,b} \cdot F_p(y_1, y_2, y_3). \tag{4}$$

The proof of Theorem 1 consist of minimizing relation

$$\frac{F_p(y_1, y_2, y_3)}{S_p(y_1, y_2, y_3)}, \tag{5}$$

where $|y_i| \le 1$, $i = 1, 2, 3$, $\max_{i=1,2,3}|y_i| = 1$ and $S_p$ is computed by integration over the triangle $K$:

$$\begin{aligned} S_p(y_1, y_2, y_3) &= \int_K U^{p-2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^b \int_0^{a(1-\frac{x_2}{b})} \left(y_1 + \frac{x_1}{a}(y_2 - y_1) + \frac{x_2}{b}(y_3 - y_1)\right)^{p-2} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\ &= \frac{ab}{p(p-1)}\frac{1}{y_2 - y_1}\left[\frac{y_3^p - y_2^p}{y_3 - y_2} - \frac{y_3^p - y_1^p}{y_3 - y_1}\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

The main idea of the proof of Theorem 2 consist of constructing a triangle and a constant such that the inequality in Theorem 1 is reversed. In other words it shows that the inequality (1) is optimal or sharp.

**Remark 1** *The proof is valid to any triangle: consider the element in Fig Fig 1(b). We can easily construct two right triangles by setting an inner altitude and apply the above theorems.*

## References


1. A.N. Brooks and T.J.R. Hughes.Streamline Upwind / Petrov–Galerkin formulations for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier–Stokes equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 32:199–259, 1982.
2. R. J. DiPerna. Measure - valued solutions to conservation laws. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 88:223–270, 1985. 10.1007/BF00752112.
3. T. J. R. Hughes, M. Mallet, and A. Mizukami. A new finite element formulation for computational fluid dynamics. II. Beyond SUPG. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 54(3):341–355, 1986.
4. C Johnson, U Nävert, and J Pitkäranta. Finite element methods for linear hyperbolic equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 45:285–312, 1984.

5. C. Johnson and A. Szepessy. On the convergence of a finite element method for a nonlinear hyperbolic conservation law. *Math. Comp.*, 49(180):427–444, 1987.
6. C. Johnson, A. Szepessy, and P. Hansbo. On the convergence of shock-capturing streamline diffusion finite element methods for hyperbolic conservation laws. *Mathematics of Computation*, 54(189):107–129, 1990.
7. M. Nazarov. Convergence of a residual based artificial viscosity finite element method. *Computers & Mathematics with Applications*, 64(4):616–626, 2013.
8. A. Szepessy. Convergence of a shock-capturing streamline diffusion finite element method for a scalar conservation law in two space dimensions. *Mathematics of Computation*, 53:527–545, 1989.
9. A. Szepessy. An existence result for scalar conservation laws using measure valued solutions. *Communications in Partial Differential Equations*, 14(10):1329–1350, 1989.
10. A. Szepessy. Convergence of a streamline diffusion finite element method for scalar conservation laws with boundary conditions. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 25:749–782, 1991.

УДК 511. 524

## Проблема Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми

Азамов А.З.

**(Институт математики им. А.Джураева АН РТ)**

В 1770 г. Варинг [1] выдвинул гипотезу, что при каждом целом $n > 1$ существует число $r = r(n)$, что всякое натуральное число $N$ может быть представлено в виде

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_r^n = N \qquad (1)$$

с целыми неотрицательными $x_1, \ldots, x_r$. Эта гипотеза получила название проблемы Варинга, и в 1909 г. она была решена Гильбертом [2]. Харди и Литтлвуд [3] дали новое доказательство этой теоремы. Они ввели функцию $G(n)$ – наименьшее $k$ такое, что (1) разрешимо при $N \geq N_0(n)$ и доказали, что

$$n < G(N) \leq n2^{n-1}h;\ \lim_{n\to\infty} h = 1$$

Самым же важным было то, что Харди и Литтлвуд при $r > (n-2)2^{n-1} + 5$ для числа $J(N)$ представлений числа $N$ в виде (1) нашли асимптотическую формулу вида

$$J(N) = \frac{(\Gamma(1+1/n))^r}{\Gamma(r/n)} N^{\frac{r}{n}-1}\mathfrak{S} + O(N^{\frac{r}{n}-1-c(n,r)}), \qquad (2)$$

где $\mathfrak{S}$– некоторый *особый ряд*, сумма которого, как они показали, превосходит некоторое число $c_1(n,r)$ и $c_1(n,r) > 0$.

В 1924 г. И.М.Виноградов [4,5] применил к проблеме Варинга свой метод тригонометрических сумм и доказал, что асимптотическая формула Харди и Литтлвуда имеет место при $r \geq 2[n^2(2\ln n + \ln\ln n + 3)]$. В 1934 г. он доказывает [6] также, что $G(n) < n(6\ln n + 10)$, затем несколько раз уточняет эту оценку и, наконец, в 1959 г. доказывает [7], что

$$G(n) < n(2\ln n + 4\ln\ln n + 2\ln\ln\ln n + 13).$$

А.А.Карацуба [8] применил к оценке $G(n)$ свой $p-$адический метод и получил более точный результат

$$G(n) < n(2\ln n + 2\ln\ln n + 12).$$

Trevor D. Wooley [9] доказал, что

$$G(n) < n\ln n + n\ln\ln n + O(1).$$

Величина $G(n)$ известна только для $k = 2$ и $k = 4$, именно $G(2) = 4$, $G(4) = 16$, что соответственно доказали Лагранж и Davenport [10]. Ю.В.Линник [11] доказал, что $G(3) \leq 7$. Vaughan [12] доказал, что асимптотическая формула Харди и Литтлвуда (2) имеет место при $r = 8$ и $n = 3$. В работе [13] доказана асимптотическая формула для числа представлений $N$ в виде (1) при $r = 9$ и $n = 3$ с почти равными слагаемыми $x_i$, $|x_i - (N/9)^{1/3}| \leq H$, $H \geq N^{3/10+\varepsilon}$.

Основным объектом настоящего доклада является уравнение Варинга для четвертых степеней:

$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_r^4 = N \qquad (3)$$

Известно, что $G(4) = 16$, так как существуют сколь угодно большие числа, не представимые в виде суммы 15 четвертых степеней. Кроме этого из (3) для переменных $x_i$ получаем следующий интервал изменения

$$0 \leq x_i \leq N^{1/4}, \qquad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Будем исследовать разрешимость уравнения (3) со следующими более жесткими условиями: для всех достаточно больших натуральных $N$ найти наименьшее натуральное $r$, $r \geq 16$ и наименьшее $\theta$, $\theta < 1/4$, что диофантова уравнение имеет решение если натуральные числа $x_1, x_2, \ldots x_r$ почти равны с точностью слагаемое равным $N^\theta$, т.е.

$$\left(\frac{N}{r}\right)^{1/4} - N^\theta \leq x_i \leq \left(\frac{N}{r}\right)^{1/4} + N^\theta$$

Теорема. *Пусть $N$ – достаточно большое натуральное число, $\varepsilon$ – произвольное положительное число, не превосходящее* 0.0001, *тогда для числа $J(N,H)$ представлений $N$ суммою 17 четвертых степеней чисел $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, 17$ с условиями $|x_i - N_1| \leq H$, при $H \geq N^{13/54+\varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула:*

$$J(N,H) = \frac{\sqrt[4]{17} B H^{16}}{N^{3/4}} \mathfrak{S}(N) + O\left(\frac{H^{16}}{N^{3/4}\ln^8 N}\right), \qquad B = \frac{455518671766086477}{83691159552000} \cdot \sqrt[4]{17^3},$$

*где $\mathfrak{S}(N)$ – особый ряд, сумма которого превосходить некоторое положительное постоянное.*

Последнее утверждение теоремы о том, что сумма особого ряда $\mathfrak{S}(N)$ больше некоторого положительного постоянного непосредственно следует из теоремы 4.6 монографии [14].

**Литература**

1. Waring E. Метод тригонометрических сумм в теории чисел — Труды МИАН СССР. 1984. Т. 168. С. 4 – 30.
2. Hilbert D. Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl nter Potenzen (Waringsche Problem). Nachrichten von der Königlichen Gesellchaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch- physikalische Klasse aus den Jahren 1909, s.17-36; Math. Annalen, 67, s.281-300.
3. Hardy G.H., Littlwood J.E. — Nachr. Acad. Wiss. Gettingen Math.–Phys. Kl. 1920. S 33–54. Math. Z.1922. Bd. 12. S.161-168.

4. Виноградов И.М. Об одной общей теореме Варинга// Матем.сб., 1924, Т.31, №3-4, с.490-507.
5. Виноградов И.М. — Метод тригонометрических сумм в теории чисел. –М.: Наука, 1980. 160 с.
6. Виноградов И.М. О верхней границе $G(k)$ в проблеме Варинга//Известия АН СССР, ОФМН, 1934, с.1455-1469.
7. Виноградов И.М. К вопросу о верхней границе для $G(n)$// Изв. АН СССР, Сер. мат., 1959, Т.23, №5, с.637-642.
8. Карацуба А.А. О функции $G(n)$ в проблеме Варинга// Изв. АН СССР, Сер. мат., 1985, Т.49, №5, с.935-947.
9. Wooley T.D. Large improvements in Waring's problem // Ann of Math., 1992, (2)135, №1, pp.131–164.
10. Davenport H. Ann of Math., 1939, 40, pp.731-747.
11. Линник Ю В. О разложении больших чисел на семь кубов// ДАН СССР, 1942, №35, с.179-180.
12. Vaughan R.C. On Waring's problem for cubes // J. Reine Angew. Math.,1986, 365, pp.122-170.
13. Рахмонов З.Х., Мирзоабдугафуров К.И. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми// ДАН РТ, 2008, Т.51,№2, с.83–86.
14. Р. Вон — Метод Харди–Литтлвуда. –М.: Мир, 1985, 184 с.
15. Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Теория кратных тригонометрических сумм. –М.: Наука, 1987, –368с.
16. Хуа Ло-ген — Метод тригонометрических сумм. –М.: Мир, 1964, 190с.
17. Азамов А.З., Мирзоабдугафуров К.И., Рахмонов З.Х. Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля четвертой степени // ДАН РТ, 2010, т.53, №10, с.737-744.
18. Азамов А.З. Среднее значение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля четвертой степени// ДАН РТ, 2011, т.54, №1, с.13-17.
19. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. — Курс современного анализа. ч. 1. Основные операции анализа. –М.: Физматгиз, 1963, 342 с.

УДК 519.624.3

## Математическое моделирование фазовых переходов в аморфных сплавах облучаемых тяжелыми ионами

Амирханов И.В., Сархадов И., Тухлиев З.К., Шарипов З.А.

**(Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия)**

**Введение.** В настоящее время одной из важных задач физики конденсированных сред является получение аморфных металлических сплавов (или металлического стекла, как часто их называют) и исследование их свойств с дальнейшими применениями в различных отраслях науки и техники. Аморфные сплавы металлов по своим физико-химическим характеристикам сильно отличаются от кристаллических сплавов. Существенным недостаткам аморфных сплавов является их кристаллизация при высоких температурах ($T = 200-1000C$) с дальнейшим изменением физико-химических свойств. Одной из актуальных задач является исследование различных процессов (образование треков, дефектов, кристаллизация) в аморфных сплавах при облучении тяжелыми ионами высоких энергий, т.к. при облучении вблизи области траектории иона температура материала может достигать высоких температур, превышающих температуру плавления и испарения.

Значительное количество работ посвящено исследованию образования треков в аморфных металлах и сплавах (например, [1, 3] и цитированная там литература). Треком тяжелой заряженной частицы принято называть сильно деструктурированную область вблизи траектории тяжелой частицы в материале, вызванных ионизационными потерями энергии приводящих к возможному расплавлению и последующей частичной (или полной) рекристаллизации этой области (в случае аморфных мишеней – к кристаллизации). В [1] были измерены диаметры треков в ряде аморфных сплавов на основе железа и бора для различных комбинаций мишень-ион с использованием метода малоуглового рассеяния синхротронного излучения. В настоящей работе в рамках модели термического пика(МТП) [2] была исследована образование треков в аморфных сплавах железа и бора в разных комбинациях мишень-ион. Моделирование динамики фазовых переходов(ФП) типа плавления или затвердевания осуществляется на основе задачи Стефана. В настоящей работе фазовый переход моделируется в рамках энтальпийного подхода [4].

**Постановка задачи.** В основе МТП лежит система двух связанных уравнений теплопроводности для электронного газа и кристаллической решетки. Эта система уравнений в аксиально цилиндрической системе координат имеет следующий вид [2]:

$$C_e(T_e)\frac{\partial T_e}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_e(T_e)\frac{\partial T_e}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_e(T_e)\frac{\partial T_e}{\partial z}\right) - g(T_e)(T_e - T_i) + A_e(r,z,t), \tag{1}$$

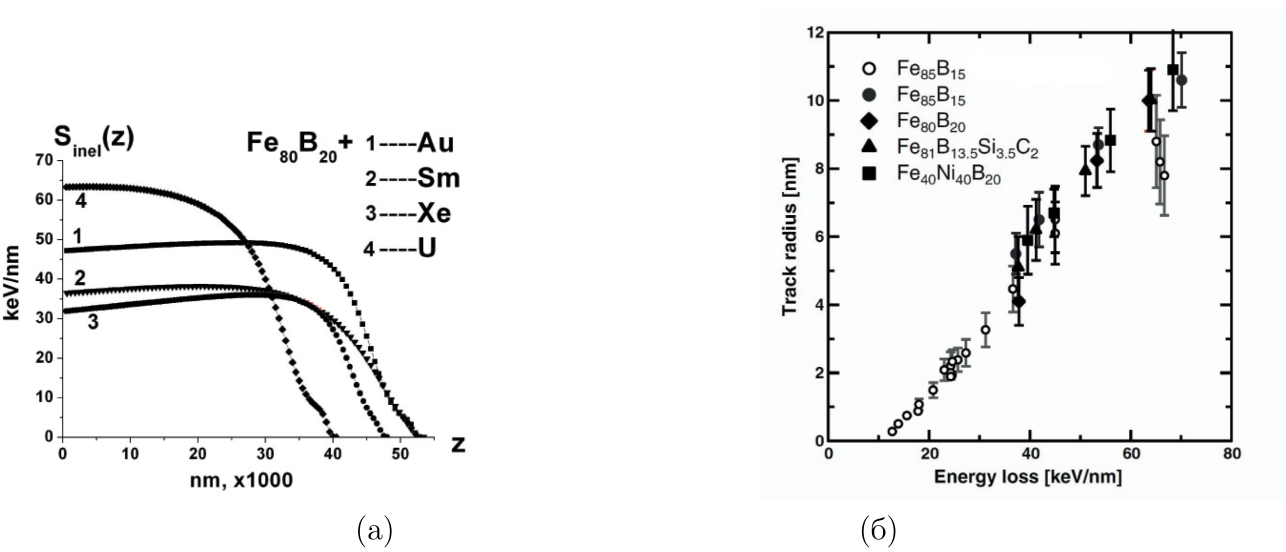
$$C_i(T_i)\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_i(T_i)\frac{\partial T_i}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_i(T_i)\frac{\partial T_i}{\partial z}\right) + g(T_i)(T_e - T_i) + A_i(r,z,t). \tag{2}$$

Функция источника представляется в виде:

$$A_{e,i}(r,z,t) = \frac{1}{r_0^2}\exp(-r/r_0)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_t}\exp\left(-\frac{(t-5t_0)^2}{2\delta_t^2}\right)S_{inel,ph}(z). \tag{3}$$

Описание физических параметров, входящих в систему (1)–(2), приведено в [2].

На Рис. 1. представлены потери энергии ионов Au, Sm, Xe (11.1 МэВ/нуклон, ), U (8.2 МэВ/нуклон)на ионизацию в аморфном сплаве $Fe_{80}B_{20}$ (а) и экспериментальные данные радиусов треков (б), приведенные в [1].




(а) (б)

Рис. 1: Потери энергии ионов $Au, Sm, Xe, U$ на ионизацию (а) в аморфном сплаве $Fe_{80}B_{20}$ и экспериментальные данные [1].

Система (1)–(3) решается со следующими начальными и граничными условиями:

$$T_{e,i}(r,z,t)|_{t=0} = T_0, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial T_{e,i}(r,z,t)}{\partial r}\right|_{r=0} = 0,\ T_{e,i}(r,z,t)|_{r=R_{max}} = 0, \tag{5}$$
$$\left.\frac{\partial T_{e,i}(r,z,t)}{\partial z}\right|_{z=0} = 0,\ T_{e,i}(r,z,t)|_{z=Z_{max}} = 0.$$

Для численного решения системы уравнений (1)–(5) была использована конечно - разностная схема метода переменных направлений [5].

**Полученные результаты.** В таблице 1 представлены результаты расчетов для различных аморфных сплавов, демонстрирующие изменения размеров области плавления с учетом и без учета фазовых переходов. В целом расчеты подтверждают, что полученные нами оценки размеров областей, где происходят процессы плавления, с учетом фазовых переходов значительно лучше согласуются с приведенными в [1] экспериментальными оценками характерных размеров треков по сравнению с моделью без учета фазовых переходов. При учете фазовых переходов значительное количество энергии поглощается в точке плавления материала(на скрытую теплоту плавления), что приводит к снижению температуры мишени относительно модели без учета фазового перехода и, вследствие этого, к уменьшению размера области плавления.

Таблица 1: Расчетные и экспериментальные радиусы треков.

| Мишень+ион | | Радиус расплавленной области без учета ФП, нм | Радиус расплавленной области с учетом ФП, нм | Экспериментальные оценки |
|---|---|---|---|---|
| $Fe_{80}B_{20}$ | $+^{238}U$ 8.2МэВ/нуклон | $\approx 11.5$ | $\approx 9.0$ | $9.8 \pm 0.3$ |
| $Fe_{81}B_{13.5}Si_{3.5}C_2$ | $+^{238}U$ 8.2МэВ/нуклон | $\approx 11.5$ | $\approx 9.0$ | $9.8 \pm 0.3$ |
| $Fe_{40}Ni_{40}B_{20}$ | $+^{238}U$ 8.2МэВ/нуклон | $\approx 12.3$ | $\approx 9.5$ | $10.2 \pm 0.3$ |
| $Fe_{80}B_{20}$ | $+^{152}Sm$ 11.1МэВ/нуклон | $\approx 6.5$ | $\approx 5.1$ | $4.0 \pm 0.3$ |
| $Fe_{81}B_{13.5}Si_{3.5}C_2$ | $+^{152}Sm$ 11.1МэВ/нуклон | $\approx 6.5$ | $\approx 5.1$ | $4.8 \pm 0.3$ |
| $Fe_{40}Ni_{40}B_{20}$ | $+^{152}Sm$ 11.1МэВ/нуклон | $\approx 7.8$ | $\approx 6.2$ | $5.2 \pm 0.3$ |
| $Fe_{80}B_{20}$ | $+^{197}Au$ 11.1МэВ/нуклон | $\approx 8.5$ | $\approx 7.3$ | $7.0 \pm 0.3$ |
| $Fe_{81}B_{13.5}Si_{3.5}C_2$ | $+^{197}Au$ 11.1МэВ/нуклон | $\approx 8.5$ | $\approx 7.3$ | $7.0 \pm 0.3$ |
| $Fe_{40}Ni_{40}B_{20}$ | $+^{197}Au$ 11.1МэВ/нуклон | $\approx 9.0$ | $\approx 7.6$ | $7.3 \pm 0.3$ |

**Заключение.** В данной работе по результатам вычислительных экспериментов можно сделать следующие выводы:

1. При учете фазовых переходов значительное количество энергии поглощается в точке плавления, соответственно уменьшаются температура мишени и размер расплавленной области.

2. Полученные результаты достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными [1], причем это согласие улучшается при учете фазовых переходов.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ No13-01-00595-a, 12-01-00396-a, 14-01-00628-a.

## Литература

1. M.D. Rodriguez, B. Afra, C. Trautmann, et. al. Morphology of swift heavy ion tracks in metallic glasses. Journal of Non-Crystalline Solids. 358 (2012) 571–576.
2. И.В. Амирханов, А.Ю. Дидык, И.В. Пузынин и др. Распыление твердых тел под действием тяжелых ионов и температурные эффекты в электронной и решеточной подсистемах. Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2006. Т. 37. № 6. С.1592-1644.

3. Yu. Yavlinskii. Track formation in amorphous metals under swift heavy ion bombardment. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B 146 (1998) 142-146.
4. М.П. Галанин, И.С. Ерхов, Е.Ю. Локтионов, Ю.Ю. Протасов. Численное моделирование динамики температурных полей на плоских мишенях при нестационарном интенсивном лазерном воздействии. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН № 61, Москва, 2008.
5. А.А. Самарский, А.В. Гулин. Численные методы.М.: Наука,1989. - 432 с.

УДК 511.32

## Короткие квадратичные тригонометрические суммы с простыми числами

Бобоёров Ш.К.

**(Таджикский национальный университет)**

И.М. Виноградов [1] создал метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, с помощью которого впервые получил нетривиальную оценку линейной тригонометрической суммы и решил проблему Гольдбаха.

А.А. Карацуба [2] разработал метод решения тернарных мультипликативных задач и в соединении с методом И.М.Виноградова оценил самый простой случай средних значений функций Чебышева по всем характерам Дирихле данного модуля, то есть величину

$$t(x;q) \ll \sum_{\chi} \max_{y\le x} |\psi(y,\chi)|.$$

Следствием этой оценки является распределение чисел вида $p(p_1+a)$ в коротких арифметических прогрессиях.

В работе [3], опираясь на метод А.А.Карацубы элементарно доказано, что

$$t(x;q) \ll (x + x^{5/6}q^{1/2} + x^{1/2}q)x^{\delta}.$$

Этим же методом Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо [4] доказали, что

$$T(x;q) \ll \sum_{q\le Q}\sum_{\chi} \max_{y\le x} |\psi(y,\chi)| \ll (x + x^{5/6}Q + x^{1/2}Q^2)(\ln xQ)^4.$$

Следствием последней оценки является теорема Бомбьери-Виноградова о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях в “среднем”, на возможность получения которой этим методом было указано А. А. Карацубой в [2].

Г. Монтгомери [5], пользуясь своей плотностной теоремой о нулях $L$ - рядов Дирихле, показал, что

$$t(x;q)\left(x + x^{5/7}q^{5/7} + x^{1/2}q\right) l^{16}, \mathscr{L} = \ln xq.$$

Этот результат уточнил Р. Вон [6]. Он доказал, что

$$t(x;q)x\mathscr{L}^3 + x^{3/4}q^{5/8}\mathscr{L}^{23/8} + x^{1/2}q\mathscr{L}^{7/2}.$$

В работе [7] доказано, что

$$t(x;q)x\mathscr{L}^3 + x^{4/5}q^{1/2}\mathscr{L}^{34} + x^{1/2}q\mathscr{L}^{34}.$$

Эта оценка точнее, чем оценка Р. Вона, и ее доказательство проводится методом А.А. Карацубы в сочетании с аналитическим вариантом метода И. М. Виноградова оценок тригонометрических сумм с простыми числами с последующим применением четвертого момента $L$ - рядов Дирихле.

Примененный в [6] подход в сочетании с работой М.Ютилы [8] о четвертом моменте $L$ - рядов Дирихле в коротких интервалах критической прямой позволили исследовать средние значения функций

$$\psi_2(u,\chi,\lambda)=\sum_{n\le u}\Lambda(n)\chi(n)e(\lambda n^2),$$

по всем характерам Дирихле данного модуля в коротких интервалах.

**Теорема 1.** *Пусть $x\ge x_0$, $x^{1/2}\le y\le x$, $|\lambda|\le 1/y^2$, $1\le q\le x/y$, $\varepsilon$ – любое фиксированное положительное число, $\varepsilon\le 10^{-6}$,*

$$t_2(x;q,y,\lambda)=\sum_{\chi}|\psi_2(x,\chi,\lambda)-\psi_2(x-y,\chi,\lambda)|,$$

*Тогда справедлива оценка*

$$t_2(x;q,y,\lambda)\ll(y+x^{3/10}y^{1/2}q^{1/2})\mathscr{L}^{35}+(qx^{1/2}+x^{2/3}y^{1/2}|\lambda|^{1/3}q)x^{\varepsilon}.$$

Одним из приложений этой теоремы является оценка квадратичных тригонометрических сумм с простыми числами в коротких интервалах, т.е. сумм вида:

$$S_2(\alpha,x,y)=\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)e(\alpha n^2),$$

$$\alpha=a/q+\lambda,\quad (a,q)=1,\quad |\lambda|\le 1/q\tau,\quad 1\le q\le\tau.$$

**Теорема 2.** *Пусть $x\ge x_0$, $x^{1/2}\le y\le x$, $|\lambda|\le 1/q\tau\le 1/y^2$, $\varepsilon$ – любое фиксированное положительное число, $\varepsilon<10^{-6}$. Тогда справедлива оценка:*

$$S_2(\alpha,x,y)\left(yq^{-1/2}+x^{3/10}y^{1/2}\right)\mathscr{L}^{36}+(q^{1/2}x^{1/2}+x^{2/3}y^{1/2}\tau^{-1/3}q^{1/6})x^{\varepsilon}.$$

Эта оценка становится нетривиальной при

$$\mathscr{L}^{70}<q<\tau,\quad y\ge x^{4/5+\varepsilon}.$$

## Литература


1. Виноградов И.М. Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
2. Карацуба А.А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // ДАН СССР, 1970, т. 192, №4, с. 724-727.
3. Рахмонов З.Х. – Изв. АН СССР, сер. мат., 1989, т. 53, № 1, 211–224.
4. Пан Чен-дон, Пан Чен-бьяо Основы аналитической теории чисел. Пекин, 1991(на китайском языке).
5. Монтгомери Г. Мультипликативная теория чисел. М.: Мир, 1974.
6. Vaughan R.C. Mean value theoremns in prime number theory // J. London Math. Soc. (2), 10(1975), 153-162.
7. Рахмонов З.Х.Распределение чисел Харди Литтвлуда в арифметических прогрессиях // Изв. АН СССР, сер. матем., 1989, т.53, №1. 211-224.
8. Jutila M. Mean value etstimates for exponential sums with applications to L-functions // Acta Arith., 57(1991), no.2, 93-114.

УДК 517.91

# Компьютерное моделирование предельных циклов кусочно-линейных систем второго порядка

Гулов А.М., Нуров И.Д., Собиров Х.И.

**(Таджикский Национальный Университет )**

Модели с негладкими эффектами имеют важное значение в различных областях науки: в физике и механике (теория фазовых переходов, электричество, магнетизм), в инженерных задачах, в задачах теории управления, в экономике, биологии и др. Модели негладких систем включают в себя дифференциальные уравнения с негладкими, релейными, гистерезисными нелинейности. Примерами являются динамические модели с сухим трением, модели с перескоками, модели с релейными нелинейностями, возникающие при изучении систем автоматического регулирования температур, напряжения и др. Многочисленные приложения стимулировали развитие теории дифференциальных уравнений с негладкими и разрывными правыми частями. Широкое использование различных переключателей в системах автоматического управления привело к необходимости построения теории уравнений с релейными нелинейности. Различным вопросам этой теории посвящены отдельные параграфы в работах многих авторов.

Предельные циклы кусочно-линейных уравнений, зависящих от параметра.

Теперь исследуем уравнения,

$$y'' + ay' + by + c|d \cdot y' + e \cdot y - \lambda| = 0, \tag{1}$$

Отметим что уравнение (1) состоит из двух линейных уравнений.

$$y'' + (a + c \cdot d)y' + (b + e \cdot c)y - \lambda c = 0, \quad d \cdot y' + e \cdot y > \lambda \tag{2}$$

или

$$y'' + (a - c \cdot d)y' + (b - e \cdot c)y - \lambda c = 0, \quad d \cdot y' + e \cdot y < \lambda \tag{3}$$

Стационарный решения (2) и (3) обозначим в графике

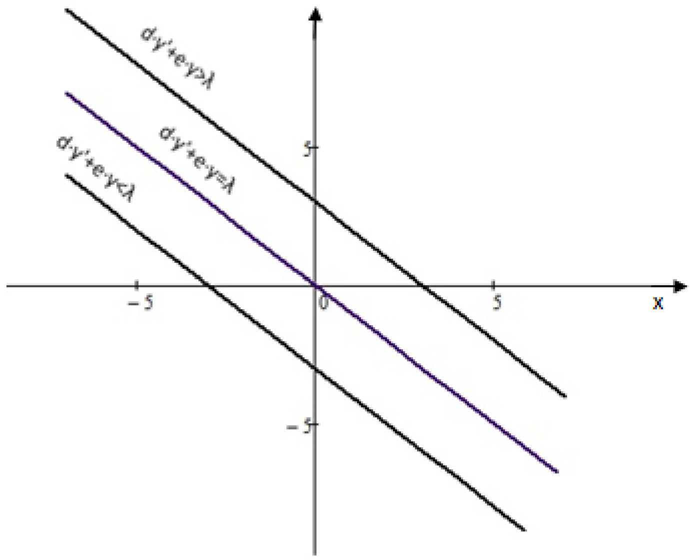



Рис. 1.

$$\begin{cases} x' = u, \\ u' = -(a + c \cdot d)u - (b + e \cdot c)y + \lambda c \end{cases} \tag{4}$$

Находим стационарное решение (2), $u = 0$ и $(b + e \cdot c)y_0 = \lambda c$ ,следовательно

$$y_0^+ = \frac{\lambda c}{b + e \cdot c} \tag{5}$$

Аналогично стационарное решение для уравнение (3) будет,

$$y_0^- = -\frac{\lambda c}{b - e \cdot c} \tag{6}$$

Обе стороны умножим на e,

$$e \cdot y_0^+ = -\frac{e \cdot \lambda c}{b + e \cdot c} \geq \lambda$$

Отсюда получим,

$$\frac{e \cdot c}{b + e \cdot c} \geq 1$$

И следовательно для равенство (4) получим,

$$\frac{e \cdot c}{b - e \cdot c} < 1$$

Делим дробь на e и получим

$$\frac{1}{1 - \frac{b}{e \cdot c}} < 1$$

или

$$\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{e \cdot c}} < \mathbf{0}$$

Рассмотрим первое случае стационарного решения. Предположим что $b + e \cdot c \neq 0$ тогда,

$$\frac{1}{\frac{b}{e \cdot c} + 1} \geq 1$$

Следовательно получим,

$$\mathbf{-1} < \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{e \cdot c}} \leq \mathbf{0}$$

Теперь найдем стационарную точку уравнения (2).Последное неравенство эквивалентно следующему

$$\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c \cdot e}} \in \{(-\infty; \mathbf{0}) \cup (\mathbf{1}; \infty)\}$$

После определение интервалов можно взять частное случае данного уравнение и построит график для вышеуказанных условиях. Пусть e>0, d>0. В частности имеем: $\lambda = 1, e = 1, a = 1, b = 1, c = 2, d = 1$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$y'' + y' + y + 2|y' + y - 1| = 0$$

Найдем стационарное решение,

$$y + 2|y - 1| = 0$$

$$y_1 = 2/3, y_2 = 2.$$

Следует отметит, что стационарные точки ($y_1$ и $y_2$) соответствуют при $y > 1$ и $y < 1$.

**Теорема 1.** Пусть $\lambda > 0$ и $\frac{b}{e \cdot c} \leq -1$ кроме того пусть выполнено условие

$$\min\left\{(a + c \cdot d)^2, (a - c \cdot d)^2\right\} < 4(b \pm c \cdot e) \leq \max\left\{(a + c \cdot d)^2, (a - c \cdot d)^2\right\}.$$

тогда в левой полуплоскости существует единственная стационарная точка.

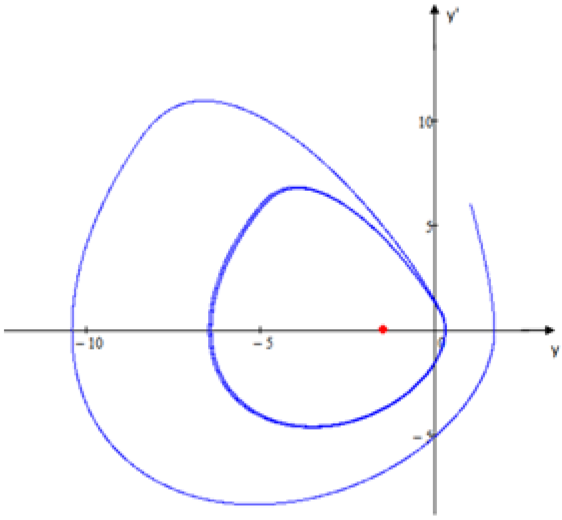



Рис. 2.

**Литература**

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. - Матем. сборник,1966,51,РЖМат, 960,317 с.
2. Баутин Н.Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Наука, М., 1976, 496 с.
3. di Bernardo M.,Budd C., Champneys A.R., Kowalezyk P.Piece – wise smooth dynamical system Appl. Math. Sci., vol. 103. London: Springer. 2008. 183 pp.
4. Иванов А.П. Исследование разрывных бифуркаций в негладких динамических системах. Нелинейная динам., 2012, Т8, №2, с. 231–247.
5. Leine R.I.,Van Campen D.H.- European Journal of Mechanigs A/Solids 2006 25,pp.595-616.
6. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в теорию динамических систем. – М.: МЦНМОб 2005.-454 с.
7. Синай Я.Г. Теория фазовых переходов. М.: Наука, с. 207, 1980г.
8. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. УРСС, М.,2004, 239 с.
9. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Мир, 1970, 720с.
10. Нуров И.Д. Халилова М.Ш. Арабов М.К. Метод Рунге-Кутта в задаче исследования бифуркациии негладких динамических систем. Доклад АН РТ Том 55, № 12, 960-964, 2012г.

УДК 517.956

# Минимальные классы аппроксимации некоторых упорядоченных алгебраических систем

Исроилов С.

**(Российско-таджикский (славянский) университет, Душанбе)**

Аппроксимация по существу являясь приближением, есть один из эффективных методов изучения наиболее сложных объектов. Если дан некоторый математический объект А и ему сопоставляется по определенным правилам объект $T(A)$, нужно изучит, как те или иные свойства объекта А отражаются на свойствах объекта $T(A)$ и наоборот.

В алгебре такие вспомогательные объекты обычно строятся с помощью гомоморфизмов исходной структуры $A$. В связи с этим широко развиваются исследования в круг вопросов, связанных с аппроксимируемостью алгебраических систем.

**Определение 1 .** Говорят, что упорядоченная полугруппа $A$ аппроксимируема в классе полугрупп $K$ относительно предиката $P$ (равенства), если для любых элементов $a, b \in A$, где $(a, b)$ ложно $(a \neq b)$, существует полугруппа $\in K$ и гомоморфизм $\varphi : A \to B$ такие, что $P\left(\varphi\left(a\right), phi\left(b\right)\right)$ ложно $\left(\phi\left(a\right) \neq \phi\left(b\right)\right)$. Если $K$ – класс конечных полугрупп, то А называется финитно аппроксимируемой полугруппой.

**Определение 2.** Пусть $K_1$ – некоторый класс полугрупп. Класс $K_2$ называется классом аппроксимации для $_1$ если каждая полугруппа из класса $K_1$ аппроксимируема относительно предиката $P$ с помощью гомоморфизмов в полугруппы из класса $K_2$.

Класс полугрупп $K_3$ называется минимальным классом аппроксимации для класса $K$ если:

1) $K_3$ – класс аппроксимации для класса $K$;

2) Если $^1$ – класс аппроксимации для $K$ то $K_3$ $K^1$.

Рассмотрим класс $I$ вполне регулярных инверсных полугрупп, с естественным порядком ([1], стр. 435).

**Теорема 1.** Пусть $I$ – класс вполне регулярных упорядоченных полугрупп. Тогда для того, чтобы класс $I_1$ был минимальным классом аппроксимации для класса $I$, необходимо и достаточно, чтобы каждая подпрямо неразложимая упорядоченная группа с внешне присоединенным нулём может быть вложена в некоторую полугруппу из класса $I$.

**Следствие.** Пусть $I$ – класс коммутативных вполне регулярных упорядоченных полугрупп с естественным порядком. Для того чтобы класс $I_1$ полугрупп был минимальным классом аппроксимации для $I$, необходимо и достаточна, чтобы все максимальные примерные подгруппы типа $p$ могла быть вложена в некоторую полугруппу из $I_1$.

**Теорема.** Пусть $I$ – класс всех упорядоченных инверсных вполне регулярных полугрупп. Тогда класс $I_2$ – всех упорядоченных подпрямо неразложимых групп с присоединенным нулём является минимальным (универсально) минимальным классом аппроксимации для класса $I$.

**Следствие.** Пусть $I$ – класс всех упорядоченных полугрупп максимальные подгруппы которых совпадает с единичными элементами. Тогда, класс полугрупп $I_3$ состоящий их всех полугрупп, изоморфных полугруппе $e = \left\{e_1, e_2 \middle| \, e_1 \cdot e_2 = e_i \quad \text{или} \quad e_i \cdot e_2 = e_2\right\}$ с естественным порядком является минимальным (универсально минимальным) классом аппроксимации для класса $I$.

**Следствие.** Пусть $I$ – класс упорядоченных коммутативных идемпотентных полугрупп. Тогда для того чтобы класс $I_5$ был классом минимальной аппроксимации для $I$, необходимо и достаточно, чтобы все полугруппы из $I_5$, были изоморфны мультипликативной полугруппе $\{0, 1\}$ с естественным порядком.

### Литература

1. Ляпин Е.С. Полугруппы, Физматгиз, М. 1960
2. Мальцев А.И. О гомоморфизмах на конечные группы, Уч. зап. Ивановского пед-та, т. 18, 1958, стр. 49-60
3. Лесахин М.М. Об аппроксимации полугрупп относительно предикатов, Уч. зап. ЛГПИ, т. 404, 1970
4. Исроилов С. Минимальные классы аппроксимации алгебраических систем, Материалы международной конференции, посвященной 70-летию Джураева М.Д., Душанбе, 2009


УДК 511.325

## О распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала

Исматов С.Н.

**(Институт математики им. А.Джураева)**

В докладе рассматривается задача о распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины $(x-y,\, x)$, сведётся к оценке тригонометрических сумм вида

$$U_K(x,y)=\sum_{k\le K}\left|\sum_{x-y<p\le x}e(\alpha kp)\right|.$$

Доказательство проводится методом, основу которого составляют изложенные в [1] теорема 1 (с. 440) о приближении $\rho(u)$ тригонометрическим полиномом и лемма 1 (с. 601) о разложении модуля их разности в ряд Фурье в сочетании с теоремой о правильном порядке числа простых чисел в интервале малой длины [2].

Теорема. Пусть $y\ge x^{0.534}$, $\mathscr{L}=\ln x$, $A>1$ – абсолютная постоянная, $M\ge\mathscr{L}^A$ и $M_1=M\ \ln\mathscr{L}^A$, тогда для $F_\alpha(x,y,\sigma)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y<p\le x$ и $\{\alpha p\}<\sigma$, справедлива следующая асимптотическая формула

$$F_\alpha(x,y,\sigma)-\sigma(\pi(x)-\pi(x-y))\ll\frac{y\ln M}{\mathscr{L}^{A+1}}+\max_{K\le M_1}\left(\frac{U_K(x,y)}{K}\mathscr{L}\right),$$

где $\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих числа $x$.

Из теоремы для $F_\alpha(x,y,\mu,\nu)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y<p\le x$ и $\mu\le\{\alpha p\}<\nu$, причём $0\le\mu<\nu\le1$, получим:

Следствие 1. При выполнении условий теоремы справедлива следующая асимптотическая формула

$$F_\alpha(x,y,\mu,\nu)-(\nu-\mu)(\pi(x)-\pi(x-y))\ll\frac{y\ln M}{\mathscr{L}^{A+1}}+\max_{K\le M_1}\left(\frac{U_K(x,y)}{K}\mathscr{L}\right).$$

Из следствия 1 для отклонения

$$D(x,y)=\sup_{0\le\mu<\nu\le1}\left|\frac{F(x,y,\mu,\nu)}{\pi(x-y)-\pi(x)}-(\nu-\mu)\right|$$

членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y<p\le x$, находим:

Следствие 2. При выполнении условий теоремы справедлива следующая асимптотическая формула

$$D_\alpha(x,y) \ll \frac{\ln M}{\mathscr{L}^A} + \max_{K\le M_1}\left(\frac{U_K(x,y)}{Ky\mathscr{L}^{-2}}\right).$$

Понятие равномерного распределения значений числовых последовательностей на отрезке ввёл в математику Г.Вейль [3]. Он заложил основы теории равномерного распределения, которая получила дальнейшее развитие в теории чисел, в теории функций, классической механике. В [4,5] было введено понятие равномерной распределённости для дробных частей $\{\alpha m^n\}$ при условии, что $x-y<m\le x$ и доказано, что *если $\alpha$ — иррациональное число, тогда последовательность $\{\alpha m^2\}$, $x-y<m\le x$ при $y\ge \ln^3 x$, $y\to\infty$ является равномерно распределённой по модулю единица.*

Мы вводим критерии Г.Вейля о равномерном распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины.

Из следствия 1 получаем следующий критерий равномерной распределённости по модулю единица для последовательности $\{\alpha p\}$ при условии, что аргумент $p$ принимает значения из интервала малой длины $(x-y,x]$.

Следствие 3. Последовательность $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y<p\le x$, является равномерно распределённой по модулю единица, если при $y\to\infty$ справедлива оценка

$$U_K(x,y) = o\left(\frac{Ky}{\mathscr{L}^2}\right).$$

**Литература**


1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Дрофа, 2003.
2. Baker R., Harman G. The difference between consecutive primes // Proc. London Math. Soc., 1996, v. 72, pp. 261 – 280.
3. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins // Math. Ann, 1916, v.77, s.313 – 352.
4. Рахмонов З.Х. Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля // Ученые записки Орловского университета, серия естественные, технические и медицинские науки, 2012, №6, ч.2, с. 194-203.
5. Рахмонов З.Х., Озодбекова Н.Б., Шокамолова Дж.А. О равномерном распределении по модулю единица значений квадратичного многочлена, аргумент которого принимает значения из короткого интервала // ДАН РТ, 2013, т.56, №4, с. 261 – 264.


УДК 517.957

## О собственных функциях и собственных значениях одного класса вырождающихся эллиптических операторов высшего порядка

Исхоков С. А., НематуллоевО. А.

**(Институт математики им. А.Джураева)**

Работа Л.Д.Кудрявцева [1] положила начало исследованиям разрешимости обобщенных краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений методами функционального анализа и теории вложения весовых функциональных пространств. Использованная в этой работе идея позже обобщалась и развивалась многими авторами (С.М.Ни-кольский, П.И.Лизоркин, Н.В.Мирошин и др., см. [2-3] и имеющиеся там библиографию). Данная работа посвящена распространению этого метода на случай вырождающихся эллиптических операторов с измеримыми коэффициентами.

Пусть $\Omega$ – ограниченная область в $n$ - мерном евклидовом пространстве $R_n$ с $(n-1)$ - мерной гладкой границей $\partial\Omega$; $\rho(x)$ – регуляризованное расстояние точки $x \in \Omega$ до $\partial\Omega$; $r$ – натуральное, $\alpha$ – вещественные числа. Символом $W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ обозначим пространство функций $u(x)$, определённых в области $\Omega$, со следующей нормой

$$\left\|u; W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| = \left\{\sum_{|k|=r}\int_\Omega \rho^{2\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|^2dx + \int_\Omega |u(x)|^2dx\right\}^{1/2}. \tag{1}$$

Замыкание класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (1) обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$. Пространство антилинейных непрерывных функционалов определенных на $\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ наделенное нормой сопряженного пространства, обозначим через $\left(\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$.

Символом $L_{p;\alpha}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, обозначим весовое лебегово пространство с нормой

$$\|u; L_{p;\,\alpha}(\Omega)\| = \left\{\int_\Omega \rho^{p\alpha}(x)|u(x)|^pdx\right\}^{1/p}.$$

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L(u) = \sum_{|k|,|l|\le r} (-1)^{|l|}\left(\rho^{2\alpha-2r+|k|+|l|}(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\right)^{(l)} \tag{2}$$

и связанную с ним полуторалинейную форму

$$B[u,v] = \sum_{|k|,|l|\le r}\int_\Omega \rho^{2\alpha-2r+|k|+|l|}(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx, \tag{3}$$

первоначально определенную на функциях $u,\, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Коэффициенты $a_{kl}(x)$ являются комплекснозначными функциями.

Символом $(\cdot,\,\cdot)$ обозначим скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Число $\lambda$ называется собственным значением оператора $L$, если уравнение $B[u,v] = \lambda(u,v)$, $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$, имеет ненулевое решение $u(x)$. Это решение называется обобщенной собственной функцией оператора $L$.

Наша работа посвящена изучению некоторых свойств собственных значений и обобщенных собственных функций дифференциального оператора (2). Эти вопросы ранее изучались в работах С.М.Никольского, П.И.Лизоркина, Н.В.Мирошина (см. [2-3]) в предположении, что коэффициенты $a_{kl}(x)$ ограничены и удовлетворяют следующему условию эллиптичности

$$\mathrm{Re}\sum_{|k|,|l|\le r}\rho^{2\alpha-2r+|k|+|l|}(x)a_{kl}(x)\zeta_k\overline{\zeta_l} \ge c_0\rho^{2\alpha}(x)\sum_{|k|=r}|\zeta_k|^2 \tag{4}$$

для всех $x \in \Omega$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\le r}$. В отличие от этого, здесь мы предполагаем, что младшие коэффициенты $a_{kl}(x)$, $|k|+|l| \le 2r-1$, принадлежат некоторым весовым пространствам вида $L_{q_{kl};\delta_{kl}}(\Omega)$, старшие коэффициенты $a_{kl}(x)$, $|k| = |l| = r$, непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$ и удовлетворяют следующему условию эллиптичности

$$\mathrm{Re}\sum_{|k|=|l|=r}a_{kl}(x)\xi^k\xi^l \ge c_0|\xi|^{2r} \tag{5}$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R_n$ ($_0$ - положительная постоянная независящая от $x$, $\xi$). Отметим, что в отличие от условии (4) в (5) участвуют только старшие коэффициенты, и даже в случае нулевых младших коэффициентов, условие (5) слабее, чем условие (4). В случае выполнении условия эллиптичности (5), однозначная разрешимость вариационной задачи Дирихле с однородными и неоднородными условиями на границе, связанной с формой (3), ранее исследовалась в работах авторов [4-5].

Сформулируем основную задачу, связанную с формой (3):

Задача 1. *Для заданного функционала* $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$ *требуется найти решение* $U(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha}(\Omega)$ *уравнения*

$$B[U,\, v] + \lambda(U, v) = \langle F,\, v\rangle$$

*для всех* $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Здесь и далее $\lambda$ - комплекснозначный параметр.

Наряду с этой задачей рассмотрим отвечающей ей однородную и формально сопряженные задачи:

Задача 2. *Для заданного функционала* $G \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$ *требуется найти решение* $U(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha}(\Omega)$ *уравнения*

$$\overline{B[v,\, U]} + \overline{\lambda}(U, v) = \langle G,\, v\rangle$$

*для всех* $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Задача 3. *Требуется найти решение* $U(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha}(\Omega)$ *уравнения*

$$B[U,\, v] + \lambda(U, v) = 0$$

*для всех* $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Задача 4. *Требуется найти решение* $U(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha}(\Omega)$ *уравнения*

$$\overline{B[v,\, U]} + \overline{\lambda}(U, v) = 0$$

*для всех* $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть* $0 \le \alpha < r$ *и старшие коэффициенты* $a_{kl}(x)$, $|k| = |l| = r$, *непрерывны в замкнутой области* $\overline{\Omega}$ *и удовлетворяют условию (4). Пусть также младшие коэффициенты* $a_{kl}(x)$, $|k|$, $|l| \le r$, $|k| + |l| \le 2r - 1$, *принадлежат пространству* $L_{p_{kl};\,-n/p_{kl}}(\Omega)$, *где*

$$p_{kl} = \begin{cases} q_{kl} \text{ при } |k| \le r-1,\ |l| \le r, \\ q_{lk} \text{ при } |k| = r-1,\ |l| \le r-1, \end{cases}$$

*а числа* $q_{kl}$ *определяются соотношениями:*

$$\frac{n}{2r - |k| - |l|} < q_{kl} \le \frac{n}{r - |l|} \text{ если } n > 2(r - |k|),\ n > 2(r - |l|);$$

$$\frac{n}{r - |k| + \varepsilon_1 n} < q_{kl},\ 0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2} \text{ если } n > 2(r - |k|),\ n \le 2(r - |l|);$$

$$q_{kl} = \begin{cases} \frac{n}{r-|l|+\varepsilon_2 n} < q_{kl},\ 0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2} \text{ если } n \le 2(r-|k|),\ n > 2(r-|l|), \\ \text{любое конечное число} > 1, \text{ если } n \le 2(r-|k|),\ n \le 2(r-|l|). \end{cases}$$

*Тогда:*

*а) задача 1 разрешима для тех и только тех* $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$, *для которых* $\langle F, U\rangle \equiv 0$ *на всех* $U(x)$, *являющихся решениями задачи 4;*

*б) размерности пространств решений задач 3 и 4 равны;*

*в) задача 3 имеет отличные от нуля решения только для счетного числа значений параметра* $\lambda = \lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots$, *причем* $|\lambda_j| \to \infty$ *при* $j \to \infty$*;*

*г) задача 4 разрешима для тех и только тех значений параметра* $\lambda$, *что и задача 3.*

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда собственные значения* $\lambda_j$ *оператора* $L$ *таковы, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^{-\gamma/2} < \infty,$$

*где* $\gamma$ *– любое число, удовлетворяющее неравенство* $\gamma > n/(r-\alpha)$.

**Литература**


1. Кудрявцев Л.Д. Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений // Труды МИАН СССР. 1959. Т. 55. С. 1 – 182.
2. Мирошин Н.В. Обобщенная задача Дирихле для одного класса эллиптических дифференциальных операторов, вырождающихся на границе области. Некоторые спектральные свойства // Диффернц. уравнения. 1976. Т. 12. №6. С. 1099 – 1111.
3. Мирошин Н.В. Гладкость решения краевой задачи и задачи на собственные значения для эллиптических операторов вырождающихся на границе // Доклады АН СССР. 1988. Т. 299. №6. С. 1310 – 1312.
4. Никольский С.М., Лизоркин П.И., Мирошин Н.В. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений // Известия вузов. Математика. 1988, №8. С.4 – 30.
5. Исхоков С.А., Нематуллоев О.А. О разрешимости однородной вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области// Доклады АН РТ. 2012. Т. 55. №8. С. 617 – 621.
6. Исхоков С.А., Нематуллоев О.А. О разрешимости вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области // Доклады АН РТ. 2013. Т. 56. №5. С. 352 – 358 .


УДК 517.925

## Коэрцитивные оценки и разделимость для нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричным потенциалом

Каримов О.Х.

**(Институт математики им. А.Джураева)**

В пространстве $L_2(R^n)^l$ рассмотрим нелинейный дифференциальный оператор второго порядка с переменными старшими коэффициентами

$$L[u] = L_0[u] + V(x,u)u, \quad L_0[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \quad x \in R^n,$$

Коэффициенты $a_{ij}(x)$ оператора $L_0$ являются квадратными матрицами-функциями порядка $l$ с элементами из класса $C^1(R^n)$ и удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} &I. \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad Im a_{ij}(x) = 0; \\ &II. \quad |a_{ij}(x)| \le \sigma_1, \quad |\nabla a_{ij}(x)| \le \sigma_2, \quad (\forall x \in R^n; \quad i,j = 1,2,...,n); \\ &III. \quad \sum_{i=1}^{n} |s_i|^2_{C^l} \le \chi_1 \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij} s_i, s_j \rangle_{C^l}, \quad (\forall x \in R^n; \quad \forall s = \{s_i\}_{j=1}^n, \quad s_i \in C^l). \end{aligned}$$

константы $\sigma_1, \sigma_2, \chi_1$ в этих условиях не зависят от $x$ и $s$ .

Следуя работам [1,3] назовем, оператор $L[u]$ разделимым в пространстве $L_2(R^n)^l$ , если для каждого вектор-функций $u(x) = L_2(R^n)^l \cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$ таких, что $L[u] \in L_2(R^n)^l$ выполняются включения

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \in L_2(R^n)^l, \quad V(x, u(x))u(x) \in L_2(R^n)^l.$$

Предположим, что значения матрица-функций $V(x, \omega)$, $\quad x \in R^n$, $\quad \omega \in C^l$ , являются квадратными положительно определенными эрмитовыми матрицами порядка $l$ . Прежде чем сформулировать основной результат, вводим следующее обозначение

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, ..., x_n, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_l, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_l) = V^{\frac{1}{2}}(x, \omega), \\ Q(x_1, x_2, ..., x_n, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_l, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_l) = F^2(x, \omega). \end{aligned}$$

где $\xi_k = Re\omega_k, \quad \omega_k = Im\eta_k$ и $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_l$ координаты точки $\omega \in C^l$ .

Здесь $V^{\frac{1}{2}}(x, \omega)$ однозначно определяется, как квадратный корень положительно определенной эрмитовой матрицы.

Определение. *Будем говорит, что матрица-функция* $V(x, \omega)$, $\quad (x \in R^n, \quad \omega \in C^l)$, *принадлежит классу* $T^{n,l}_{\chi,\sigma,\delta,\gamma}$ *если выполняются следующие условии:*

$$1. \sum_{j=1}^{n} \left\| F^{-\frac{1}{2}}(x, \omega) \frac{\partial}{\partial x_j} (F(x, \omega)) F^{-\frac{3}{2}}(x, \omega) \right\|^2 \le \chi$$

*для всех* $x \in R^n, \quad \omega \in C^l$,

$$2. \sum_{k=1}^{l} \left\| \left( \mu_k \cdot F^{-\frac{1}{2}}(x, \omega) \frac{\partial}{\partial \xi_k} (F(x, \omega))\omega + \eta_k \cdot F^{-\frac{1}{2}}(x, \omega) \frac{\partial}{\partial \eta_k} (F(x, \omega))\omega \right) \right\|_{C_l} \le \sigma \left\| F^{\frac{1}{2}}(\Omega) \right\|_{C^l}$$

*для всех* $x \in R^n, \quad \omega \in C^l$ *и всех* $\Omega = (\mu_1 + \nu_1, \mu_2 + \nu_2, ..., \mu_l + \nu_l) \in C^l$,

$$3. \sum_{k=1}^{l} \left\| \mu_k \cdot F^{-1}(x, \omega) \frac{\partial}{\partial \xi_k} (Q(x, \omega))\omega + \eta_k \cdot F^{-\frac{1}{2}}(x, \omega) \frac{\partial}{\partial \eta_k} (Q(x, \omega))\omega \right\|_{C_l} \le \delta \left\| F(\Omega) \right\|_{C^l}$$

*для всех* $x \in R^n, \quad \omega \in C^l$ *и всех* $\Omega = (\mu_1 + \nu_1, \mu_2 + \nu_2, ..., \mu_l + \nu_l) \in C^l$,

$$4. \sum_{j=1}^{n} \left\| Q^{-\frac{1}{2}}(x, \omega) \frac{\partial}{\partial x_j} (Q(x, \omega)) Q^{-1}(x, \omega) \right\|^2 \le \gamma$$

*для всех* $x \in R^n, \quad \omega \in C^l$.

Теорема. *Пусть матрица-функция* $V(x,\omega) \in T^{n,l}_{\chi,\sigma,\delta,\gamma}$, $\quad (x \in R^n, \quad \omega \in C^l)$ *, коэффициенты* $a_{ij}(x)$ *удовлетворяют условиям I, II, III. Тогда при выполнение условий* $0 < \chi < \frac{4}{\chi_1 n^2 \sigma_1}$, $\quad 0 < \sigma < \frac{1}{\chi_1 n \sigma_1} - \frac{\chi n}{4}$, $\quad 0 < \gamma < \frac{4}{\chi_1 n^2 \sigma_1}$, $\quad 0 < \delta < \frac{4}{\chi_1 n \sigma_1} - \frac{\gamma n}{4}$ *нелинейный оператор* $L[u]$ *разделяется в пространстве* $L_2(R^n)^l$ *и для каждого решения* $u(x) = L_2(R^n)^l \cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$ *уравнения* $L_0[u] + V(x,u(x))u(x) = f(x)$ *, где* $f(x) \in L_2(R^n)^l$ *выполняется следующее коэрцитивное неравенство*

$$\|V(x,u(x))u(x)\|_{L_2(R^n)^l} + \sum_{j=1}^{n} \left\| V^{\frac{1}{2}}(x,u(x)) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right\|_{L_2(R^n)^l} + \|L_0[u]\|_{L_2(R^n)^l} \leq M \|f(x)\|_{L_2(R^n)^l},$$

*где положительное число* $M$ *не зависит от* $u(x), f(x)$.

**Литература**


1. Everitt W.N., Giertz M. — Proc.Roy.Soc.Edindurgh,1977,v.79A,p.257 – 265.
2. Бойматов К.Х. — Труды МИАН СССР, 1984,т.170, с.37 – 76.
3. Бойматов К.Х. — Математические заметки, 1989, т.46, №6, стр. 110 – 112.
4. Каримов О.Х. Коэрцитивные свойства и разделимость нелинейного оператора Шредингера с матричным потенциалом // Материалы международной научной конференции, посвященной 60-летию академика Бойматова К.Х. Душанбе 2010г. стр. 54 – 55.


УДК 517.9

## О построении инвариантных многообразий системы разностных уравнений

Курбаншоев С.З.[†], Нусайриев М.А.[‡]

**([†]Российско-Таджикский(Славянский) университет)**
**([‡]Таджикский технический университет им. акад. М. Осими)**

В заметке излагается способ выделения асимптотического семейства решений, когда строятся не сами решения, а описывающее их разностное уравнение. Речь идет о выделении из решений операторного разностного уравнения интегрального многообразия решений [1], [2], свойства которого можно описать с помощью вспомогательного операторного разностного уравнения.

Рассматривается операторное разностное уравнение

$$X_{n+1} = X_n + hF(nh, X_{n-1}), \quad F(nh,0) \equiv 0 \tag{1}$$

$$n = 0, \pm 1 \pm 2, ...; \quad (h > 0),$$

где $F(nh,X)$-нелинейный оператор отображающий некоторое нормированное пространство $\mathbb{B}$ в себя.

Предположим,что вектор-функция $F(nh,X)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|F(nh,X) - F(nh,Y\| \leq L\|X - Y\|, \quad X, Y \in \mathbb{B}, \tag{2}$$

и условия ограниченности

$$\|F(nh,0\| \leq M \quad (M > 0). \tag{3}$$

Ищется инвариантное многообразие решений, описываемое операторным разностным уравнением

$$X_{n+1} = X_n + hQ(nh, X_n, h), \tag{4}$$

где $Q(nh, X, h)-$нелинейный оператор, отображающий некоторое нормированное пространство $\mathbb{B}$ в себя.

Пологаем,что любое решение уравнения (4) является решением уравнения (1). Сдвиг вдоль решения уравнения (4) обозначим через $T$, пологая $detT \neq 0$, т.е.

$$TX_n = X_{n+1}, \quad T^2 X_n = X_{n+2}, ..., \tag{5}$$

$$T^{-1}X_n = X_{n-1}, \quad T^{-2}X_n = X_{n-2}, ....$$

Решение уравнение (4) записывается в виде

$$TX_n \equiv X_n + hQ(nh, X_n, h).$$

Находим оценку для решений операторных разностных уравнений (4). Полагаем, что оператор $Q(nh, X, h)$ удовлетворяет условиям Липшица и ограниченности

$$\|Q(nh, X, h) - Q(nh, Y, h)\| \leq L(h)\|X - Y\|, \tag{6}$$

$$\|Q(nh, 0, h)\| \leq M_1 \quad (M_1 > 0), \quad X, Y \in \mathbb{B}.$$

**Лемма.** Пусть $X_n, Y_n-$ два различных решения операторного уравнения (4). Тогда справедлива оценка

$$(1 - hL(h))^k \cdot \|X_n - Y_n\| \leq \|X_{n+k} - Y_{n+k}\| \leq (1 + hL(h))^k \cdot \|X_n - Y_n\| \quad (k = 1, 2, ...).$$

Найдем явное выражение для обратного оператора $T^{-1}$. Из равенств (5) получим, что $X_n = T^{-1}X_{n+1}$. Чтобы найти оператор $T^{-1}$ разрешим уравнение (4) относительно $X_n$, т.е.

$$X_n = X_{n+1} - hQ(nh, X_n, h). \tag{7}$$

Решение уравнения (7) находится методом последовательных приближений. Для этого исследуем сходимость уравнения (7). Сходимость можно получить из теоремы Банаха [3]. Из условия (6) следует, что

$$\|hQ(nh, X, h) - hQ(nh, Y, h)\| \leq hL(h)\|X - Y\|.$$

Если $hL(h) < 1$, то можно получить разностное уравнение, эквивалентное уравнению (7), т.е.

$$X_n = X_{n+1} - hS(nh, X_{n+1}, h). \tag{8}$$

Связь между операторами $Q$ и $S$ определяется из уравнения (4) и (8), т.е.

$$Q(nh, X_n, h) = S(nh, X_n + hQ(nh, X_n, h), h). \tag{9}$$

Аналогично,

$$S(nh, X_{n+1}, h) = Q(nh, X_{n+1} - hS(nh, X_{n+1}, h), h). \tag{10}$$

Таким образом, операторы $Q(nh, X, h), S(nh, X, h$ связаны функциональными уравнениями (9) и (10), решений которых находится методом последовательных приближений и сходятся при условии $hL(h) < 1$. обозначим это решение через

$$S(nh, X, h) = H(Q(nh, X, h)), \tag{11}$$

где $H-$ некоторый нелинейный оператор, действующий в пространстве $\mathbb{B}$.

Поскольку по нашим предположением явное решение уравнения (4) является решением уравнения (1), то

$$Q(nh, X_n, h) = F(nh, X_{n-1}).$$

Принимая во внимание уравнение (8), приходим к равенству

$$Q(nh, X_n, h) = F(nh, X_n - hS(nh - h, X_n, h)) \tag{12}$$

$$(n = 0, \pm 1 \pm 2, ...),$$

которое с учётам обозначения (11) можно записать в виде уравнения относительно оператора $H$, т.е.

$$Q(nh, X, h) = F(nh, X - hH(Q(nh - h, X, h)). \tag{13}$$

Уравнение (13) будем решать методом последовательных приближений.

$$S_0(nh, X, h) \equiv 0, \; Q_{k+1}(nh, X - hH(Q_k(nh - h, X, h), h), \tag{14}$$

$$Q_0(nh, X, h) \equiv 0, Q(nh, X, h = \lim_{k\to\infty} Q_k(nh, X, h) \;\; (k = 0, 1, 2, ...).$$

**Теорема 1.** Пусть для операторного разностного уравнения (1) выполнены условие (2) (3). Если выполнено условие $h \le (4L)^{-1}$ ($L$-констант Липшица), то при всех значениях $n, X \;\; (n = 0, \pm 2, ...)$ последовательные приближения $Q_k(nh, X, h) \;\; (k = 0, 1, 2, ...)$ сходятся к оператору $Q(nh, X, h)$ удовлетворяющему условию (7), где

$$L(h) = 2L\left(1 + \sqrt{1 - 4hL}\right)^{-1}.$$

Из теоремы 1 следует,что при $|h| \le h_0$ все члены последовательности оператора $Q_k(nh, X, h)$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ удовлетворяют условию Липшица

$$\|Q_k(nh, X, h) - Q_k(nh, Y, h)\| \le L_k(h)\|X - Y\|,$$

где

$$L_k(h) \le L(h) \le L^*.$$

**Теорема 2.** Пусть $L^*-$ наименьший положительный корень уравнения

$$\varphi(L) = L.$$

Если $0 < h < h_0$, то последовательность $Q_k(nh, X, h)$ $(k = 0, 1, 2, ..)$ определенная формулами (12), (14) для любого $X \in \mathbb{B}$, сходится равномерно по $n, X, h$, в области $\|X\| < \rho$ $(\rho > 0)$ к оператору $Q(nh, X, h)$ удовлетворяющему условию Липшица с постоянной $L(h)$, определяемой выражением (6). При этом операторное разностное уравнение (4) определяет инвариантное многообразие решения уравнения (1).

**Теорема 3.** Пусть для разностного уравнения (1) выполнены условия (2),(3) и $0 < h < h_0$.

*Если $X_n, X_n-$ два различных решения уравнения* (1), *совпадающих при $n = N$, то для разности этих решений справедлива оценка*

$$\|X_n - \bar{X_n}\| \le (1 - hL_0)^n \cdot hLL_0\left(1 - \frac{L}{L_0(1 - hL_0)}\right)^{-1} \cdot \|X_{-1} - \bar{X_{-1}}\|$$

$$(-1 \le n \le N - 1, )$$

где $L_0-$ любое решение неравенства

$$L_0 - \frac{L}{1 - hL_0} \;\; (0 < 1 - hL_0 < 1).$$

**Литература**

1. Валеев К.Г., Финин Г.С. Построение функций Ляпунова.- Киев: Наукова думка, 1981,- 412 с.
2. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. - М.: Наука, 1973-512 с.
3. Рисс ф.,Секефальви Надь Б. Лекции по функциональному анализу.-М.:Изд-во иностр. лит.,1954.-500с.

УДК 511.524

# Среднее Рисса функции делителей, распространенной на значения тернарной кубической формы

Камарадинова З.Н.

**(Институт математики им. А.Джураева)**

Обозначение: $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана, $L(s,\chi)$ – $L$-ряд Дирихле, $\chi$ – неглавный характер по модулю 3, $B(s,\alpha)$ – бетта-функция Эйлера.

Теорема 1. Пусть $\alpha \geq 0$ – произвольное вещественное число, $\varphi$ – тернарная кубическая форма вида

$$\varphi = \varphi(z_1,z_2,z_3) = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3, \quad z_1,z_2,z_3 \in Z.$$

Тогда при $k > 3k_1(1+\alpha)$, $k_1 = 79.95$ справедлива следующая асимптотическая формула

$$T_{\alpha,k}(x) = xQ_{2k-1}(\ln x) + R_{\alpha,k}(x),$$

где $Q_{2k-1}(y)$ — многочлен степени $2k-1$, определяемый равенством

$$xQ_{2k-1}(\ln x) = \operatorname*{Res}_{s=1} \zeta^{2k}(s)L^k(s,\chi)g_k(s)x^sB(s,\alpha+1),$$

кроме того, для остаточного члена $R_{\alpha,k}(x)$ справедлива оценка вида

$$R_{\alpha,k}(x) \ll_\varepsilon x^{1-\delta_{k,\alpha}+\varepsilon}, \quad \delta_{k,\alpha,a} = \left(\frac{2+3\alpha}{6a(k-k_1)}\right)^{2/3},$$

где $a \leq 4.45$.

Теорема 1 является обобщением теоремы Е.Е.Баядилова [1, 2] и теоремы О.В.Колпаковой [3,4] по следующей причине: Е.Е.Баядилов доказал теорему 1 в случае $\alpha = 1$, О.В.Колпакова доказала асимптотическую формулу для среднего Рисса веса $\alpha$ для функции делителей.

Доказательство. Функция $\varphi(n)$ означает количество представлений натурального $n$ в виде $n = \varphi(z_1,z_2,z_3)$. Арифметическая функция $t(n) = \frac{1}{3}\varphi(n)$ является мультипликативной и для всякого простого числа $p$ и всякого натурального числа $\lambda$ имеют место равенства [5]

$$t(p^\lambda) = \begin{cases} 2(\lambda-1), & \text{если } p=3,\ \lambda \geq 1; \\ \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2}, & \text{если } p \equiv 1 \pmod 3; \\ \left[\frac{\lambda}{2}\right]+1, & \text{если } p \equiv -1 \pmod 3). \end{cases} \tag{1}$$

Отсюда и из определения $\tau_3(p^\lambda)$ следует неравенство $t(p^\lambda) \leq \tau_3(p^\lambda)$. Вместе с функцией $t(n)$ мультипликативной является и функция $t_k(n) = \tau_k(n)t(n)$, для которой имеет место утверждение :

Лемма 1 ([1]). *Для производящего ряда Дирихле функции $t_k(n)$ справедливо равенство*

$$f_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_k(n)}{n^s} = \zeta^{2k}(s) L^k(s,\chi) g_k(s), \quad g_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_k(n)}{n^s}, \tag{2}$$

*где $\chi$ — неглавный характер по модулю 3, $|b_k(n)| \ll_\varepsilon n^\varepsilon$ и ряд $g_k(s)$ сходится абсолютно при всех $s$ с условием $Re\, s > 1/2$. В случае $k = 1$ имеем также $g(s) = g_1(s) = 1 - \frac{2}{3^s} + \frac{3}{9^s}$.*

Согласно определению, $t_k(n) = \frac{1}{3}\varphi_k(n)$, где $\varphi_k(n)$ равна числу решений системы диофантовых уравнений вида

$$\begin{cases} x_1 \dots x_k = n, \\ z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3 = n. \end{cases}$$

Для $\varphi_k(n)$ имеет место равенство $\varphi_k(n) = \tau_k(n)\varphi(n)$, где $\tau_k(n)$ равно числу решений первого уравнения системы уравнений, а $\varphi(n) = \varphi_1(n)$ — число решений второго уравнения. Поэтому сумма

$$T_{\alpha,k}(x) = \sum_{\varphi(z_1,z_2,z_3)\le x} \tau_k(\varphi(z_1,z_2,z_3)) \left(1 - \frac{x}{\varphi(z_1,z_2,z_3)}\right)^\alpha,$$

принимает вид

$$T_{\alpha,k}(x) = \sum_{n\le x} \varphi_k(n) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^\alpha = 3\sum_{n\le x} t_k(n) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^\alpha. \tag{3}$$

Далее всюду, не ограничивая общности будем, считать, что $x$ полуцелое число, то есть $x = N + \frac{1}{2}$. Воспользуемся для правой части (3) следующей леммой об аналоге формулы Перрона для средних Рисса порядка $\alpha$.

Лемма 2 ([3]). *Пусть функция $h(s)$ комплексного переменного $s = \sigma + it$ представляется рядом Дирихле вида*

$$h(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

*который сходится абсолютно при $Re(s) = \sigma > 1$. Далее, пусть $A(n)$– монотонно возрастающая функция от $n$ и $|a_n| \le A(n)$ при всех $n$. Пусть, также, $\beta > 0$, $\delta > 0$ и при $\sigma \to 1 + 0$ выполняется асимптотическая оценка*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} \ll (\sigma - 1)^{-\beta}.$$

*Тогда при всех $b \ge 1 + \delta$, любом $x$ вида $x = N + \frac{1}{2}$, где $N$ – натуральное число, и $T \ge 2$ справедливо равенство*

$$\sum_{n\le x} a_n \left(1 - \frac{n}{x}\right)^\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} h(s) x^s B(s, \alpha+1) ds + O\left(\frac{x^b}{T^{\alpha+1}(b-1)^\beta}\right) + O\left(\frac{xA(2x)\ln x}{T^{\alpha+1}}\right).$$

Предположим $a_n = t_k(n)$, $A(n) = n^\varepsilon$, $\delta = \mathscr{L}^{-1}$. Выбирая $b = 1 + \delta = 1 + \mathscr{L}^{-1}$, при $T \ge 2$ получим

$$T_{\alpha,k}(x) - \frac{3}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F_k(s) ds \ll \frac{x^b}{T^{\alpha+1}(b-1)^\beta} + \frac{xA(2x)\ln x}{T^{\alpha+1}} \ll \frac{x^{1+\varepsilon}}{T^{\alpha+1}},$$

где $F_k(s) = f_k(s) x^s B(s, \alpha+1)$. Контур интегрирования $E_0 = [b - iT, b + iT]$, заменим на другой, состоящий из следующих частей $E_1, \dots, E_5$:

1. $E_1$ — горизонтальный отрезок $[b-iT,\ \beta-iT]$, где $\beta$ — некоторое число из промежутка $3/4<\beta<1$;

2. $E_2$ — вертикальный отрезок $[\beta-iT,\ \beta-iT_0]$, причем точка $\beta-iT_0$ лежит на окружности $K$ радиуса $0,49$ с центром в точке $z_0=1$ и $T_0>0,3$;

3. $E_3$ — часть указанной выше окружности $K$ от точки $\beta-iT_0$ до точки $\beta+iT_0$ в отрицательном направлении, т.е. по "часовой стрелке";

4. $E_4$ — вертикальный отрезок с началом в точке $\beta+iT_0$ и концом $\beta+iT$;

5. $E_5$ — горизонтальный отрезок $[\beta+iT,\ b+iT]$.

На основании теоремы о вычетах заключаем, что интеграл по старому контуру равен сумме интеграла по новому контуру и вычету подынтегральной функции $F_k(s)$ в точке $s=1$. Порядок полюса в точке $s=1$ у функции $F_k(s)$ равен $2k$, поэтому вычет функции $F_k(s)$ в точке $s=1$ равен $\operatorname*{Res}_{s=1}\{F_k(s)\}=xQ_{2k-1}(\ln x)$, где $Q_{2k-1}(\ln x)$ представляет собой многочлен степени $2k-1$ с вещественными коэффициентами от переменной $y=\ln x$. Таким образом

$$T_{\alpha,k}(x)=3xQ_{2k-1}(\ln x)+R_{\alpha,k}(x),$$

$$R_{\alpha,k}(x)=J_1+J_2+J_3+J_4+J_5+O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T^{\alpha+1}}\right), \tag{4}$$

$$J_j=\frac{3}{2\pi i}\int\limits_{E_j}F_k(s)ds,\qquad j=1,2,3,4,5,$$

то есть $J_1,\dots,J_5$ интегралы по каждому из промежутков интегрирования $E_1,\dots,E_5$ соответственно. Оценим каждый из этих интегралов отдельно.

**Оценка $J_1$ и $J_5$.** Модули интегралов $J_1$ и $J_5$ совпадают. Оценим $J_1$:

$$J_1=\frac{3}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{\beta-iT}F_k(s)ds=\frac{3}{2\pi i}\int\limits_{b}^{1}F_k(\sigma-iT)d\sigma+\frac{3}{2\pi i}\int\limits_{1}^{\beta}F_k(\sigma-iT)d\sigma.$$

Для оценки подынтегральной функции $F_k(\sigma-iT)$ при $\beta\le\sigma\le b$ воспользуемся:

- оценками: $|\zeta(s)|\ll t^{a(1-\sigma)^{3/2}}$, при $\beta\le\sigma\le1$, и $|\zeta(s)|\ll\ln t$, при $\sigma\ge1$;
- оценкой модуля функции $L(s,\chi)$ при $Re\,s>0.5$ вида $|L(s,\chi)|\ll1$;
- оценкой модуля функции $g(s)$ при $Re\,s>0.5$, которая следует из леммы 1 и имеет вид $g_k(s)\ll1$, $\beta\le\sigma\le b$.
- оценкой модуля функции $B(s,\alpha+1)$ при $s\ne-m$, где $m$ – неотрицательные целые числа:
$$|B(s,\alpha+1)|\ll|s|^{-\alpha-1}\ll t^{-\alpha-1}.$$

Отсюда при $\beta\le\sigma\le1$ найдём

$$|F_k(\sigma-iT)|=|\zeta^{2k}(\sigma-iT)||L^k(\sigma-iT,\chi)||g_k(\sigma-iT)|x^\sigma|B(\sigma-iT,\alpha+1)|\ll$$
$$\ll T^{2ka(1-\sigma)^{3/2}}\cdot x^\sigma\cdot T^{-\alpha-1}=x^\sigma\,T^{2ka(1-\sigma)^{3/2}-\alpha-1}.$$

Аналогично при $1 \le \sigma \le b$ находим

$$|F_k(\sigma - iT)| = |\zeta^{2k}(\sigma - iT)||L^k(\sigma - iT, \chi)||g_k(\sigma - iT)|x^\sigma|B(\sigma - iT, \alpha+1)| \ll \\ \ll (\ln T)^{2k} \cdot x^b \cdot T^{-\alpha-1} = exT^{-\alpha-1}(\ln T)^{2k}.$$

Переходя к оценкам и воспользовавшись полученными оценками функции $F_k(s)$, имеем

$$|J_1| \ll \frac{x}{T^{\alpha+1}}\left(\int\limits_\beta^1 \exp(f(\sigma))d\sigma + \frac{(\ln T)^{2k}}{\mathscr{L}}\right),$$

где $f(\sigma) = (\sigma-1)\mathscr{L} + 2ka(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}\ln T$ и $f'(\sigma) = \mathscr{L} + 3ka(1-\sigma)^{\frac{1}{2}}\ln T$ положительна при $\beta \le \sigma < 1$, поэтому $f(\sigma)$ выпукла вниз и, следовательно, справедливо неравенство

$$f(\sigma) \le \max(f(\beta),\ f(1)) = \max\left((\beta-1)\mathscr{L} + 2ka(1-\beta)^{3/2}\ln T,\ 0\right).$$

Поэтому правая часть последнего неравенства для $J_1$ принимает вид

$$|J_1| \ll \frac{x}{T^{\alpha+1}}\left(\int\limits_\beta^1 \left(\exp(f(\beta)) + \exp(f(1))\right)d\sigma + \frac{(\ln T)^{2k}}{\mathscr{L}}\right) = \\ = xT^{-\alpha-1}\left(\left(x^{\beta-1}T^{2ka(1-\beta)^{3/2}} + 1\right)(1-\beta) + \frac{(\ln T)^{2k}}{\mathscr{L}}\right) \ll \\ \ll x^\beta T^{2ka(1-\beta)^{3/2}-\alpha-1} + xT^{-\alpha-1}\frac{(\ln T)^{2k}}{\mathscr{L}}.$$

**Оценка $J_2$ и $J_4$.** Модули интегралов $J_2$ и $J_4$ также совпадают. Оценим $J_4$:

$$J_4 = \frac{3}{2\pi i}\int\limits_{\beta+iT_0}^{\beta+iT} F_k(s)ds = \frac{3}{2\pi}\int\limits_{T_0}^{T} F_k(\beta+it)dt.$$

Разбивая в $J_4$ промежуток интегрирования $[T_0, T]$ на $n_1$, $n_1 \ll \ln T$ промежутков вида $[T_n,\ T_{n+1}]$, где $T_0 < T_n < T_{n+1} \le 2T_n < T$, получим

$$J_4 = \sum_{n=1}^{n_1} J_4(n), \qquad J_4(n) = \frac{3}{2\pi}\int\limits_{T_n}^{T_{n+1}} F_k(\beta+it)dt.$$

Для оценки интеграла $J_4(n)$ при $T_n \le t \le T_{n+1}$ воспользуемся:

- оценкой модуля функции $L(s,\chi)$ при $Re\, s > 0.5$ вида $|L(s,\chi)| \ll 1$;
- оценкой модуля функции $g(s)$ при $Re\, s > 0.5$ имеет вид $g_k(s) \ll 1$;
- оценкой $|B(s, \alpha+1)| \ll |s|^{-\alpha-1} \ll t^{-\alpha-1}$ при $s \ne -m$, где $m$ – неотрицательные целые числа.

Следовательно, для модуля интеграла $J_4(n)$ имеем:

$$|J_4(n)| \ll x^\beta \int\limits_{T_n}^{T_{n+1}} \left|\zeta^{2k}(\beta+it)\right| t^{-\alpha-1}dt \le x^\beta T_n^{-\alpha-1}\int\limits_{T_n}^{T_{n+1}} \left|\zeta^{2k}(\beta+it)\right|\, dt.$$

Далее для оценки последнего интеграла воспользуемся экспонентой Карлсона, то есть величиной $m(\beta) = \sup m$, где $m > 0$ таково, что при произвольном фиксированном $\varepsilon > 0$ выполняется оценка

$$\int_{T_n}^{T_{n+1}} |\zeta(\beta+it)|^{2m} dt \leq \int_{1}^{T_n+1} |\zeta(\beta+it)|^{2m} dt \ll_\varepsilon T_n^{1+\varepsilon}.$$

Для оценки экспоненты Карлсона воспользуемся утверждением (см. [3] и [4].):

Лемма 3. *При $\beta > 1 - \frac{1}{31.2}$ и $k_1 = 79.95$ справедлива следующая оценка для экспоненты Карлсона*

$$m(\beta) \geq \frac{1}{3a(1-\beta)^{\frac{3}{2}}} + k_1.$$

Имеем

$$|J_4(n)| \ll x^\beta T_n^{-\alpha-1} \cdot \max_{T_n\leq t\leq T_{n+1}} |\zeta(\beta+it)|^{2k-2m(\beta)} \int_{T_n}^{T_{n+1}} |\zeta(\beta+it)|^{2m(\beta)} dt \leq$$

$$\leq x^\beta T_n^{-\alpha+\varepsilon} \cdot \max_{T_n\leq t\leq 2T_n} |\zeta(\beta+it)|^{2k-2m(\beta)}. \tag{5}$$

Далее воспользуемся оценкой дзета-функции Римана вида

$$\zeta(\beta+it) \ll t^{a(1-\beta)^{\frac{3}{2}}}, \qquad t\in R, \quad \beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \tag{6}$$

где $a > 0$ – некоторая постоянная, значение которой последовательно улучшается. История оценок параметра $a$ начинается с работы Рихерта [6], где было указано значение $a = 100$, а в дальнейшем были получены следующие результаты: $a = 39$ (Туран, 1971), $a = 86$ (Рибенбойм, 1986), $a = 26$ и $a = 21$ (Пантелеева, 1987, 1988), $a = 17$ (Хис – Браун, 1990), $a = 18.4974$ (Кулас, 1999 [7]. Последние оценки для параметра $a$ дают значения $a \leq 15.21$, полученные Е.Е.Баядиловым [2] и $a = 4.45$, полученном К.Фордом [8].

Подставляя оценку (6) в правую часть (5), найдем

$$|J_4(n)| \ll x^\beta T_n^{-\alpha+\varepsilon} \cdot \left(T_n^{a(1-\beta)^{\frac{3}{2}}}\right)^{2k-2m(\beta)} = x^\beta T_n^{-\alpha+a(2k-2m(\beta))(1-\beta)^{\frac{3}{2}}+\varepsilon}.$$

Суммируя по всем $1 \leq n \leq n_1$, $n_1 \ll \ln T$, будем иметь

$$J_4 \ll \sum_{n=1}^{n_1} x^\beta T_n^{-\alpha+a(2k-2m(\beta))(1-\beta)^{\frac{3}{2}}+\varepsilon} \ll$$

$$\ll x^\beta \left(T_{n_1}^{-\alpha+a(2k-2m(\beta))(1-\beta)^{\frac{3}{2}}+\varepsilon} + T_1^{-\alpha+a(2k-2m(\beta))(1-\beta)^{\frac{3}{2}}+\varepsilon}\right) \ln T \ll$$

$$\ll x^\beta \left(T^{-\alpha+a(2k-2m(\beta))(1-\beta)^{\frac{3}{2}}+\varepsilon} + 1\right) \ln T.$$

**Оценка интеграла $J_3$.** Контур $E_3$ — часть окружности радиуса 0.49 с центром в точке $z_0 = 1$ от точки $\beta - iT_0$ до точки $\beta + iT_0$ в отрицательном направлении, то есть $E_3 = \{s: \ s = 1 + 0.49e^{i\varphi}, \ \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}$ и $\varphi_1$ и $\varphi_2$ однозначно определяются из соотношений

$$0.49e^{i\varphi_1} = \beta - 1 - iT_0, \qquad 0.49e^{i\varphi_2} = \beta - 1 + iT_0.$$

Таким образом,

$$J_3 = \frac{3}{2\pi i}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_k(1+0,49\,e^{i\varphi})0,49\,e^{i\varphi}d\varphi \ll \int\limits_{\varphi_2}^{\varphi_1} |F_k(1+0,49\,e^{i\varphi})|d\varphi.$$

Оценим сверху модуль подынтегральной функции $|F_k(1+0,49\,e^{i\varphi})|$. Функции $\zeta^{2k}(s)$, $L^k(s,\chi)$, $g_k(s)$ и $B(s,\alpha+1)$ являются голоморфными в $\varepsilon$ – окрестности $E_3$, поэтому модули всех этих функций сверху ограничены постоянной. Следовательно,

$$|F_k(1+0.49\,e^{i\varphi})| = |\zeta^{2k}(1+0.49\,e^{i\varphi})|\,|L^k(1+0.49\,e^{i\varphi},\chi)|\,|g_k(1+0.49\,e^{i\varphi})|\cdot$$

$$\cdot|B(1+0.49\,e^{i\varphi},\alpha+1)|\,x^{1+0.49\cos\varphi} \ll x^{1+0.49\cos\varphi} \ll x^{1+0.49\cos\varphi_1} = x^{\beta}$$

Поэтому

$$J_3 \ll \int\limits_{\varphi_2}^{\varphi_1} |F_k(1+0.49\,e^{i\varphi})|d\varphi \ll x^{\beta}.$$

Подставляя найденные оценки для интегралов $J_j$, $j=1,2,3,4,5$ в формулу (4), найдем

$$R_{\alpha,k}(x) \ll \frac{x^{1+\varepsilon}}{T^{\alpha+1}} + x^{\beta}T^{2a(k-m(\beta))(1-\beta)^{\frac{3}{2}}-\alpha}\Delta(T) + x^{\beta}\ln T, \tag{7}$$

$$\Delta(T) = \left(T^{2am(\beta)(1-\beta)^{3/2}-1} + T^{\varepsilon}\right)\ln T.$$

В (7) для заданного $x$ выберем значения параметров $T$ и $\beta$ так, чтобы его правая часть была как можно меньшей. Для этого потребуем, чтобы выполнялось

$$\frac{x}{T^{1+\alpha}} = x^{\beta}T^{2a(k-m(\beta))(1-\beta)^{\frac{3}{2}}-\alpha} = x^{\beta}, \tag{8}$$

что равносильно

$$x^{1-\beta} = T^{2a(k-m(\beta))(1-\beta)^{\frac{3}{2}}+1} = T^{1+\alpha}. \tag{9}$$

Воспользовавшись леммой 3, будем считать, что

$$2m(\beta) = \frac{2}{3a(1-\beta)^{\frac{3}{2}}} + 2k_1, \quad \beta > 1 - \frac{1}{31.2}. \tag{10}$$

Подставляя это значение $m(\beta)$ в первый показатель параметра $T$ в (9), имеем

$$a(2k-2m(\beta))(1-\beta)^{\frac{3}{2}} + 1 = 1 + a\left(2k - \frac{2}{3a(1-\beta)^{\frac{3}{2}}} - 2k_1\right)(1-\beta)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= 1 + a(2k-2k_1)(1-\beta)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} = a(2k-2k_1)(1-\beta)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}.$$

Сравнивая этот показатель с вторым показателем параметра $T$ в (9), то есть

$$a(2k-2k_1)(1-\beta)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} = 1 + \alpha,$$

находим значение параметра $\beta$:

$$(1-\beta)^{\frac{3}{2}} = \frac{2+3\alpha}{a(6k-6k_1)}, \qquad \beta = 1 - \left(\frac{2+3\alpha}{a(6k-6k_1)}\right)^{\frac{2}{3}}, \tag{11}$$

для которого условие $\beta > 1 - \frac{1}{31.2}$ леммы 3 выполняется при

$$k > \frac{(31.2)^{\frac{3}{2}}(2+3\alpha)}{6a} + k_1.$$

Таким образом, при

$$\beta = 1 - \left(\frac{2+3\alpha}{a(6k-6k_1)}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad k > \frac{(31.2)^{\frac{3}{2}}(2+3\alpha)}{6a} + k_1 \tag{12}$$

первый и второй показатель параметра $T$ в (9) равны. А при выборе $T = x^{\frac{1-\beta}{1+\alpha}}$ выполняется соотношение (9) и равносильное ему соотношение (8), из которого и (7) получим

$$R_{\alpha,k}(x) \ll x^{\beta+\varepsilon} + x^{\beta}\Delta(T) + x^{\beta}\ln T,$$

где $\beta$ определяется соотношением (12).

Выясним теперь при каких условиях выполняется оценка

$$\Delta(T) \ll x^{\varepsilon},$$

которая следует, если показатель $2am(\beta)(1-\beta)^{3/2} - 1$ параметра $T$ в выражении для $\Delta(t)$ не будет положительным. Воспользовавшись значениями параметров $m(\beta)$ и $\beta$, то есть соотношениями (10) и (11) , последовательно найдем

$$2am(\beta)(1-\beta)^{\frac{3}{2}} - 1 = 2ak_1(1-\beta)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} = 2ak_1 \cdot \frac{2+3\alpha}{a(6k-6k_1)} - \frac{1}{3} =$$

$$= -\frac{k-3k_1(1+\alpha)}{3(k-k_1)} \leq 0, \qquad k \geq 3k_1(1+\alpha).$$

Из соотношения

$$k \geq \max\left(\frac{(31,2)^{\frac{3}{2}}(2+3\alpha)}{6a} + k_1, 3k_1(1+\alpha)\right) = 3k_1(1+\alpha)$$

следует утверждение теоремы.

**Литература**

1. Баядилов Е. Е., О среднем значении функции делителей от тернарной кубической формы. Кандидатская диссертация, М, МГУ, 2009, 70с.
2. Баядилов Е. Е., О проблеме делителей для значений тернарной кубической формы // Вестник МГУ, сер.1, матем.мех., 5(2001), 29-32.
3. Колпакова О.В. О средних значениях арифметических функций. Кандидатская диссертация, М., МГУ, 2006, 68с.
4. Колпакова О.В. О средних Рисса в многомерной проблеме делтителей // Вестник МГУ сер.1 матем.мех. 6(2007), 53 – 55.
5. Нгуен Хак Тхань, О кубической форме $x^3+y^3+z^3-3xyz$, Вестн. Моск. ун-та, Матем., Механ., №3, 1990, 7 – 10.
6. Richert H.-E. Einfuhrung in die Theorie der starken Rieszchen Summierbarkeit von Dirichletreihen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen (Math. Physik), (1960), 17 – 75.
7. Kulas M. Refinement of an estimate for the Hurwitz zeta-function a neighbourhood of the line $\sigma = 1$, Acta arithm. 89, №4(1999), 301 – 309.
8. Ford K., Vinogradov's integral and bounds for the Riemann zeta-function // Proc. London Math. Soc. (3) 85 (2002), 565-633.

УДК 517.927.13

# О дифференциальных играх преследования и убегания

Мухсинов Ё.М.

**(Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики, Худжанд)**

Теория дифференциальных игр возникла в результате математической идеализации технических задач. Некоторые постановки задач в теории дифференциальных игр можно проиллюстрировать на примере движения двух управляемых объектов, один из которых – преследующий, а второй - убегающий. Вообразим, что один самолёт преследует другой. Цель первого самолёта – догнать второй, цель второго уйти от преследования. Каждый пилот управляет своим самолётом, имея в виду свою цель и пользуюсь информацией о ситуации. Слово игра указывает на то обстоятельство, что каждый из двух пилотов не знает будущего поведения другого пилота. Дифференциальной эта игра называется потому, что закон движения самолетов описывается дифференциальными уравнениями. В процессе движения объекты ведут беспрерывное наблюдение друг за другом и каждый момент времени с помощью управляющих параметров корректируют свое движение в зависимости от полученной информации о поведении противника. В соответствии с целью преследующего объекта ставится задача преследования, а в соответствии с целью убегающего объекта ставится задача убегания.

Большинство исследований посвященно случаю, когда поведение управляемого объекта изображается моделью с сосредоточенными параметрами [1, 2].

Очень часто на практике возникают важные задачи об оптимальном управлении в условиях конфликта или неопределенности, управляемые распределенными системами, движение которых описывается интегро-дифференциальными уравнениями, дифференциальными уравнениями с частными производными. Многие из этих задач могут быть сформулированы и изучены как дифференциальные игры в подходящих банаховых пространствах. Именно такой подход к изучению дифференциальных игр для систем с распределенными параметрами и принят в предлагаемой работе. Причем задачи преследования и убегания понимаются в смысле Л.С. Понтрягин [1, 2].

В дальнейшем – банахово пространство, $Y, Z-$ отделимые топологические пространства, $u(TY)$ – множество всех измеримых отображений, действующих из $T = [0, \infty)$ в $Y$ причем на рассматривается мера Лебега.

Пусть М – замкнутое подмножество , а отображение $f : D \times Y \times Z \times T \to X$, где $D \subset X$ такое, что для любых

$$u(\cdot) \in u(T, Y), \quad \nu(\cdot) \in u(T, Z), \quad 0 < t_0 < \tau < \infty, \quad x_0 \in X \backslash M.$$

Задача

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), v(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0 \tag{1}$$

имеет единственное решение $x(\cdot)$ в некоторых классе отображений, действующих из $[t_0, \tau]$ в $X$.

В дальнейшем рассматривается дифференциальная игра, описываемая уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x, u, v, t) \tag{2}$$

и замкнутым терминальным множеством $\subset X$, где $\in$ , $u \in Y$, $v \in Z$, $t \in T$.

Задача преследования. Найти множество начальных точек, из которых в игре (2) возможно завершение преследования.

Задача убегания. Найти множество начальных точек, из которых в игре (2) возможно уклонение от встречи с терминальным множеством в смысле определения (2).

Приведем некоторые результаты.

1. Фундаментальные результаты в теории дифференциальных игр преследования для систем с сосредоточенными параметрами получены академиком Л.С. Понтрягиным и его учениками [1,2].

Рассматривается линейная дифференциальная игра, задаваемая уравнением

$$\dot{x} = Ax - u + \vartheta, \qquad x(0) = x_0 \tag{3}$$

где $\in R^n$, A- матрица $n$-го порядка, $u \in P\vartheta \in Q$, $P$ и $Q$- компактные выпуклые подмножества $R^n$, а терминальное подмножество M представляет собой векторное подпространство пространства $R^n$. Через L обозначим ортогональное дополнение подпространство M в $R^n$, а через $\pi$ортогональное проектирование $R^n$ на L. Рассмотрим множества $P\,(t) = \pi^{tA}P$, $Q\,(t) = \pi e^{tA}Q$, $S\,(t) = P\,(t)^* - Q\,(t) = \{s\,(t) : s\,(t) + Q(t) \subset P\,(t)\}$.

Теорема. Если $\pi e^{\tau A}x_0 \in \int\limits_0^\tau S\,(t)\,dt$, то в задаче (3) из точки $_0$ возможно преследование за время $\tau$.

2. В работах [3, 4] результаты академика Л.С. Понтрягина обобщены для случая, когда правая часть (3) квазилинейна или нелинейно.

3. В работах [5, 6, 7] соответствующие результаты обобщёны для систем с распределенными параметрами.

4. В работах [8 − 12] академиком Л.С. Понтрягиным и его учениками получены достаточные условия о возможности убегания.

**Литература:**

1. Понтрягин Л.С., Мищенко Б.Ф. Линейные дифференциальные игры. – ДАН СССР, 1967, т.174, №1, с.27-29.
2. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования. – Мат. сборник, 1980,т.112,(154), №3(7), с. 307-331.
3. Сатимов Н.Ю. Об оптимальности времени преследования для одного класса нелинейных дифференциальных игр. – Изв. АН УЗ. ССР, 1973, №6, с. 32-33.
4. Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б. К полному исследованию обобщенного контрольного примера Л. С. Понтрягина. – Дифференц. уравн., 1979, т.15, №3,с.436-443.
5. Мухсинов Ё.М. О дифференциальных играх преследования в банаховом пространстве. – ДАН Тадж ССР, 1981, т 24, № 3, с. 151-154.
6. Мухсинов Ё.М. Об оптимальности времени преследования в дифференциальных играх – Управляемые системы, ИМ СО АН СССР,1982, вып. 22 с.80-87.
7. Мухсинов Ё.М. Шарти ҳалшавандагии масъалаи таъқибкунӣ дар фазои Банах – Конфренсияи илмӣ-назариявии ДДҲБСТ,2013, с.511-512.
8. Понтрягин Л.С. Линейная дифференциальная игра убегания. – Труды Математического института АН СССР, 1971, т 112, с.30-63.
9. Мищенко Е.Ф., Никольский М.С., Сатимов Н.Ю. Задача укланения от встречи в дифференциальных играх многих лиц. - Труды Математического института АН СССР,
10. Мухсинов Ё.М. О линейных дифференциальных играх убегания в гильбертовом пространстве. – ДАН Тадж. ССР, 1987, т. 30, № 5, с. 272-274.
11. Мухсинов Ё.М. Мухсинова С.М. Задача убегания при инвариантности терминального множества, - Материалы международной конференции “Дифференциальные уравнения и их приложения”, Душанбе, 2000, с. 59.
12. Сатимов Н.Ю, Тухтасинов Н. Об игровых задачах для эволюционных уравнений второго порядка, -Изв. ВУЗ, Математика, 2007, №1, (536) с.54-62.

УДК 511.325

# О равномерном распределении по модулю единица значений квадратичного многочлена, аргумент которого принимает значения из короткого интервала

Озодбекова Н.Б., Шокамолова Дж.А.

**(Институт математики им. А.Джураева)**

В работах [1 – 3] изучены поведения тригонометрических сумм Г.Вейля, переменное суммирование которых принимает значения из интервала малой длины, вида

$$T(\alpha, x, y) = \sum_{x-y<m\leq x} e(\alpha m^n),\ \alpha = \frac{a}{q} + \lambda,\ (a,q)=1,\ q\leq \tau,\ |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

Изложенные в учебнике Г.И.Архипова, В.А.Садовничиго, В.Н.Чубарикова “Лекции по математическому анализу” [4], теорема 1 (с. 440) о приближении $\rho(u)$ тригонометрическим полиномом и лемма 1 (с. 601) о разложении их разности в ряд Фурье позволяют свести задачу о распределении дробных частей значений многочлена, аргумент которого принимает значения из коротких интервалов, к оценкам сумм $T(\alpha, x, y)$:

Теорема 1. Пусть $M \geq \ln^3 x$, тогда для $F_\alpha(x, y, \sigma)$ – количество членов последовательности $\{\alpha m^n\}$, таких, что $x-y < m \leq x$ и $\{\alpha m^n\} < \sigma$, справедлива асимптотическая формула

$$F_\alpha(x, y, \sigma) = \sigma y + O\left(\left(\frac{y}{M} + \max_{1\leq|h|\leq M\ln x} |T(\alpha h; x, y)|\right)\ln^2 x\right).$$

Поведение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T(\alpha; x, y)$ (леммы 1 и 2 ) в сочетании с теоремой Гурвица (лемма 3) о приближении иррациональных чисел рациональными числами и теоремой 1 применимо к выводу асимптотической формулы для функции $F_\alpha(x, y, \sigma)$ при $n = 2$:

Теорема 2. Пусть $\alpha$ — иррациональное число, тогда для $F_\alpha(x, y, \sigma)$ справедлива асимптотическая формула

$$F_\alpha(x, y, \sigma) = \sigma y + O\left(\sqrt{y}\ln y\ \ln^2 x\right).$$

Из этой теоремы для отклонения

$$D(x, y) = \sup_{0\leq\mu<\nu\leq 1}\left|\frac{F_\alpha(x, y, \nu) - F_\alpha(x, y, \mu)}{y} - (\mu - \nu)\right|,$$

членов последовательности $\{\alpha m^2\}$ при $x - y < m \leq x$ получим оценку

$$D(x, y) \ll y^{-\frac{1}{2}}\ln y\ \ln^2 x.$$

Отсюда вытекает следующий критерий равномерной распределённости по модулю единица для последовательности $\{\alpha m^2\}$ при условии, что аргумент $m$ принимает значения из короткого интервала $(x - y, x]$.

Следствие 2.1. Пусть $\alpha$ — иррациональное число, тогда последовательность $\{\alpha m^2\}$ таких, что $x - y < m \leq x$ при $y \geq \ln^3 x$, $y \to \infty$, является равномерно распределённой по модулю единица.

В процессе доказательства воспользуемся следующими леммами.

Лемма 1. Пусть $\tau \geq 4y$, $|\lambda| \leq \frac{1}{4qx}$, тогда имеет место соотношение

$$T(\alpha, x, y) = \frac{y}{q} S(a, q)\gamma(\lambda; x, y) + O(\sqrt{q}\ln q),$$
$$\gamma(\lambda; x, y) = \int_{-0,5}^{0,5} e\left(\lambda\left(x - \frac{y}{2} + yt\right)^2\right) dt.$$

Доказательство см. [1, следствие 1].

Лемма 2. Пусть $\tau \geq 4y$, $\frac{1}{4qx} < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}$, тогда имеет место оценка

$$T(\alpha, x, y) \ll \sqrt{q}\ln q + \min\left(yq^{-\frac{1}{2}}, \sqrt{x}\right).$$

Доказательство см. [2,следствие 1.2].

Лемма 3. Если $\alpha$ — иррациональное число и $c \leq \sqrt{5}$ — любое положительное действительное число, то существует бесконечно много рациональных чисел $a/q$ таких, что

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{cq^2}.$$

Если же $c > \sqrt{5}$, то существуют иррациональные числа $\alpha$, для которых указанное неравенство выполняется только для конечного множества рациональных чисел $a/q$.

Доказательство см. [4, с. 37].

Доказательство теоремы. Пусть $\alpha$ – иррациональное число, $h$ – целое число и $1 \leq |h| \leq M$, тогда из теоремы Гурвица о приближении иррациональных чисел рациональными числами (леммы 3) следует, что число $h\alpha$, представляется в форме

$$h\alpha = \frac{a_h}{q_h} + \lambda_h, \quad (a_h, q_h) = 1, \quad |\lambda_h| < \frac{1}{\sqrt{5}q_h^2} = \frac{1}{q_h\tau}, \quad \tau = \sqrt{5}q_h,$$

где $q_h$ может быть выбрано сколь угодно большим. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что $q_h = q = [4y/\sqrt{5}] + 1$, тогда

$$\tau = \sqrt{5}q = \sqrt{5}\cdot\left(\left[\frac{4y}{\sqrt{5}}\right] + 1\right) > \sqrt{5}\cdot\frac{4y}{\sqrt{5}} = 4y,$$

то есть в леммах 1 и 2 выполняется условие $\tau \geq 4y$. Согласно леммы 2 при $\{2\lambda x\} > \frac{1}{2q}$ для суммы $T(\alpha h; x, y)$, имеем

$$|T(\alpha h, x, y)| \ll q^{\frac{1}{2}}\ln q + \min(yq^{-\frac{1}{2}}, \lambda^{-\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}) \ll \sqrt{y}\ln y.$$

При $\{2\lambda x\} \leq \frac{1}{2q}$, воспользовавшись леммой 1, получим

$$T(\alpha h, x, y) = \frac{S(a, q)}{q} T(\lambda_h; x, y) + O\left(\sqrt{q}\ln q\right) \ll |S(a, q)| + \sqrt{q}\ln q \ll \sqrt{y}\ln y.$$

Согласно теореме 1 для $F_\alpha(x, y, \sigma)$ при $M = y^{1/2}$, имеем

$$F_\alpha(x, y, \sigma) - \sigma y \ll \left(\frac{y}{M} + \max_{1\leq|h|\leq M\ln x}|T(\alpha h; x, y)|\right)\ln^2 x \ll \sqrt{y}\ln y\,\ln^2 x.$$

**Литература**

1. Рахмонов З.Х., Шокамолова Дж.А. – Изв. АН РТ. Отд. физ-мат., хим., геол. и техн. н., 2009, №2(135), с. 7 – 18.
2. Рахмонов З.Х., Озодбекова Н.Б. – ДАН РТ, 2011, т. 54, №4, с. 257 – 264.
3. Рахмонов З.Х. – Ученые записки Орловского университета, сер. естест., техн. и медиц. науки, 2012, №6, ч. 2, с. 194 – 203.
4. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу — М.: Дрофа, 2003.
5. Чанрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. – М.: Мир, 1974, 188 с.


УДК 511.325

## Сумма коротких тригонометрических сумм с простыми числами


Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З.

**(Институт математики им. А.Джураева)**


Метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М.Виноградова позволил ему решить ряд арифметических проблем с простыми числами. Одной из проблем является распределение дробных частей $\{\alpha p\}$, в которой он получил намного более точную оценку тригонометрической суммы, чем в общем случае распределения дробных частей $\{\alpha_n p^n + \ldots + \alpha_1 p\}$:

Теорема. ([1,2]). Пусть $K$ — целое, $K \le N$, $\alpha$–вещественное,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad 1 \le q \le N,$$

тогда, будем иметь

$$V_K(N) = \sum_{k=1}^{K} \left| \sum_{p \le N} e(\alpha k p) \right| \ll K N^{1+\varepsilon} \left( \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-0,2} \right).$$

Основу этой оценки составляют «решето Виноградова» и нетривиальные оценки тригонометрических сумм вида

$$W = \sum_{k \le K} \left| \sum_{F_1 < m \le F_2} a(m) \sum_{\substack{G_1 < n \le G_2 \\ mn \le x}} b(n) e(\alpha k m n) \right|,$$

где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, $K$, $F$, $G$ – натуральные, $F \le F_1 < F_2 \le 2F$, $G \le G_1 < G_2 \le 2G$.

Доклад посвящен теоремам 1 и 2 об оценке тригонометрических сумм вида

$$W(x,y) = \sum_{k \le K} \left| \sum_{F_1 < m \le F_2} a(m) \sum_{\substack{G_1 < n \le G_2 \\ x-y < mn \le x}} b(n) e(\alpha k m n) \right|,$$

получающиеся из $W(x)$ заменой условия $mn \le x$ на условие $x - y < mn \le x$, где $\sqrt{x} < y \le x\mathscr{L}_x^{-1}$, $\mathscr{L}_x = \ln xq$, а также их приложение — теорема 3 к оценке сумм коротких тригонометрических сумм с простыми числами вида

$$V_K(N,H) = \sum_{k=1}^{K} \left| \sum_{N-H < n \le N} \Lambda(n) e(\alpha k n) \right|, \quad H \le \frac{N}{\ln N},$$

которые возникают при изучении закона распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, при условии, что простое $p$ принимает значение из короткого интервала $N-H<p\le N$.

Перейдем к формулировке результатов. Теорема 1 посвящена оценке сумм $W(x,y)$, в которых имеется «длинная» сплошная сумма:

Теорема 1. *Пусть в сумме $W(x,y)$ выполняются условия: $F\le y$, $K\le y$, $1<q\le Ky$,*

$$\sum_{t\le 2KF}\left(\sum_{\substack{t=mk,\,1\le k\le K\\ F<m\le 2F}}|a(m)|\right)^2\ll KF\mathscr{L}_x^{c_a}, \tag{1}$$

*$c_a$ – абсолютная постоянная. Тогда при $b(n)=1$ справедлива оценка*

$$W(x;y)\ll\begin{cases} Ky\left(\dfrac{1}{q}+\dfrac{F}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}_x^{\frac{c_a+1}{2}}, & \text{если } q<4KF;\\[2ex] Ky\cdot\sqrt{\dfrac{q}{Ky}}\,\mathscr{L}_x^{\frac{c_a+1}{2}}, & \text{если } q\ge 4KF.\end{cases}$$

Следствие 1.1. *Пусть $A$ – абсолютная постоянная, тогда при $y\ge F\mathscr{L}_x^{2A+c_a+1}$ и $\mathscr{L}_x^{2A+c_a+1}\le q\le Ky\mathscr{L}_x^{-2A-c_a-1}$ справедлива оценка*

$$W(x,y)=\sum_{k\le K}\left|\sum_{F_1<m\le F_2}a_m\sum_{\substack{G_1<n\le G_2\\ x-y<mn\le x}}e(\alpha kmn)\right|\ll\frac{Ky}{\mathscr{L}_x^{A}}.$$

В теореме 2 рассматриваются $W(x,y)$, в которых суммы, составляющие двойную сумму «близки» по порядку.

Теорема 2.*Пусть в сумме $W(x,y)$ выполняются условия: $F\le y$, $G\le y$, $K\le y$, $1<q\le Ky^2x^{-1}$,*

$$\sum_{F_1<m\le F_2}|a(m+m_1^*)|^2\ll F\mathscr{L}_x^{c_a},\qquad \sum_{G_1<n\le G_2}|b(n)|^2\ll G\mathscr{L}_x^{c_b}, \tag{2}$$

*$c_a$ и $c_b$ – абсолютные постоянные, $m_1^*=0$ или $F<m_1^*\le 2F$. Тогда справедлива оценка*

$$W(x,y)\ll\begin{cases} Ky\left(\dfrac{1}{q}+\dfrac{F}{y}+\dfrac{x^2F^{-2}\mathscr{L}_x^{-4}}{y^2}\right)^{\frac{1}{4}}\mathscr{L}_x^{\frac{c_a+c_b}{2}+1}, & \text{если } q<\dfrac{2Ky}{G};\\[2ex] Ky\left(\dfrac{qx}{Ky^2}+\dfrac{x^2F^{-2}\mathscr{L}_x^{-4}}{y^2}\right)^{\frac{1}{4}}\mathscr{L}_x^{\frac{c_a+c_b}{2}+1}, & \text{если } q\ge\dfrac{2Ky}{G}.\end{cases}$$

Следствие 2.1. *Пусть $A$ – абсолютная постоянная, тогда при выполнении одного из следующих условий:*

**i.** $y\ge\max(F\mathscr{L}_x^{4A+2c_a+2c_b+4},\,xF^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+c_a+c_b})$ *и* $\mathscr{L}_x^{2c_a+2c_b+4A+4}\le q<2KyG^{-1}$;

**ii.** $y\ge xF^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+c_a+c_b}$ *и* $2KyG^{-1}\le q\le Ky^2x^{-1}\mathscr{L}_x^{-2c_a-2c_b-4A-4}$, *следует оценка*

$$W(x,y) \ll \frac{Ky}{\mathscr{L}_x^A}.$$

Теорема 3.*Пусть $K$, $H$, $N$ и $q$ – натуральные числа, $K \le H$, $A$ – абсолютная постоянная, $\mathscr{L} = \ln Nq$, $\alpha$–вещественное и*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q)=1, \quad \mathscr{L}^{4A+20} \le q \le \frac{KH^2}{N}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

*Тогда при $H \gg N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ справедлива оценка*

$$V_K(N,H) \ll \frac{KH}{\mathscr{L}^A}.$$

Доказательство теоремы проводится методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М.Виноградова в сочетании с методами работ [3,4,5], с использованием следствий 1.1 и 2.1.

**Литература**


1. Виноградов И. М., Карацуба А.А. Метод тригонометрических сумм в теории чисел — Труды МИАН СССР. 1984. Т. 168. С. 4 – 30.
2. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Наука. 1976. 120 с.
3. Рахмонов З. Х. Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения // Известия РАН. сер. матем. 1993. Т. 57. № 4. С. 55 – 71.
4. Рахмонов З. Х. Средние значения функции Чебышева // Доклады Российской академии наук. 1993. Т. 331. №3. С. 281 – 282.
5. Рахмонов Ф З. Оценка квадратичных тригонометрических с простыми числами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2011. №3. С. 56 – 60.


УДК 511.524

## Обобщённая тернарная проблема Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми

Рахмонов П.З.

**(Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова)**

Estermann [1] доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + n^2 = N, \tag{1}$$

где $p_1$, $p_2$ — простые числа, $n$ — натуральное число.

Профессор В.Н.Чубариков поставил следующую задачу: *рассмотрение уравнения (1), в котором слагаемое $n^2$ заменится на $[n^c]$, где $c$ – нецелое фиксированное число и исследование его при более жестких условиях, а именно, когда слагаемые почти равны.* Эту задачу мы называем обобщённой тернарной проблемой Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми.

Теорема.[2]. Пусть $N$— достаточно большое натуральное число, $\mathscr{L} = \ln N$, $c$ – нецелое фиксированное число с условиями

$$\|c\| \geq 3c\left(2^{[c]+1}-1\right)\frac{\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}, \quad c \ > \ \frac{4}{3}+\mathscr{L}^{-0,3}. \tag{2}$$

Тогда при $H \geq N^{1-\frac{1}{2c}}\mathscr{L}^2$ для $I(N,H)$ — числа решений уравнения

$$p_1+p_2+[n^c]=N, \quad \left|p_i-\frac{N}{3}\right| \leq H, \quad i=1,2, \quad \left|[m^c]-\frac{N}{3}\right| \leq H$$

в простых числах $p_1$, $p_2$ и натуральных $m$ — справедлива асимптотическая формула:

$$I(N,H)=\frac{18}{3^{\frac{1}{c}}c}\cdot\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}}\mathscr{L}^2}+O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}}\mathscr{L}^3}\right).$$

Следствие. Каждое натуральное число $N>N_0$ представимо суммою двух простых чисел $p_1$, $p_2$ и целой частью нецелой степени натурального $m$ с условиями

$$\left|p_i-\frac{N}{3}\right| \leq N^{1-\frac{1}{2c}}\mathscr{L}^2, \quad \left|m-\left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{c}}\right| \leq \frac{3}{3^{\frac{1}{c}}\,c}N^{\frac{1}{2c}}\mathscr{L}^2-\frac{9(c-1)}{3^{\frac{1}{c}}\,2c^2}\mathscr{L}^4+1,$$

где $c$ – нецелое фиксированное число с условиями (2).

Доказательство теоремы проводится круговым методом Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М.Виноградова и его основу составляют:

- лемма 1 об оценке коротких тригонометрических сумм с нецелой степенью натурального числа $S_c(\alpha;x,y)$ для всех точках $\alpha\in[-0,5,\,0,5]$, включая окрестности точек с малыми знаменателями, за исключением только малой окрестностью нуля;
- лемма 2 об асимптотической формуле с остаточным членом суммы $S_c(\alpha;x,y)$ для точек $\alpha$, принадлежащих малой окрестностью нуля;
- лемма 3 о поведении коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами $S(\alpha;x,y)$ для точек$\alpha$, принадлежащих малой окрестностью нуля.

Лемма 1. [3,4]. Пусть $x \geq x_0 > 0$, $\mathscr{L}_x=\ln x$, $A$ – фиксированное положительное число больше единицы, $c$ – нецелое число с условиями

$$1<c\leq \log_2\mathscr{L}_x-\log_2\ln\mathscr{L}_x^{6A}, \qquad \|c\| \geq \left(2^{[c]+1}-1\right)(A+1)\,\mathscr{L}_x^{-1}\ln\mathscr{L}_x.$$

Тогда при $y \geq \sqrt{2cx}\,\mathscr{L}_x^{A+\theta}$ и $x^{1-c}y^{-1}\mathscr{L}_x^A \leq |\alpha| \leq 0,5$ справедлива оценка

$$S_c(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\leq x} e(\alpha[n^c]) \ll y\mathscr{L}_x^{-A},$$

где $\theta=0$ при $c\geq 1,1$ и $\theta=0,5$ при $c<1,1$.

Лемма 2. [3,5]. Пусть $x \geq x_0 > 0$, $A$ – фиксированное положительное число больше единицы, $c$ – нецелое число с условиями

$$1<c\leq \log_2\mathscr{L}-\log_2\ln\mathscr{L}^{6A}, \quad \|c\| \geq \left(2^{[c]+1}-1\right)(A+1)\,\frac{\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}.$$

Тогда при $y \geq \sqrt{2c}x^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^A$ и $|\alpha| \leq x^{1-c}y^{-1}\mathscr{L}^A$ справедлива асимптотическая формула

$$S_c(\alpha; x, y) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} \int_{x-y}^{x} e(\alpha(t^c - 0,5))dt + O\left(\frac{y|\sin \pi\alpha|}{\mathscr{L}^A}\right).$$

Лемма 3. [6]. Пусть $x \geq x_0$, $y \geq x^{\frac{5}{8}} \exp(\ln x)^{0,67}$ и $|\alpha| \leq \dfrac{x}{y^2}$. Тогда справедливо равенство:

$$S(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leq x} \Lambda(n)e(\alpha n) = \frac{\sin \pi\alpha y}{\pi\alpha} e\left(\alpha\left(x - \frac{y}{2}\right)\right) + O\left(y \exp(-\ln^4 \ln x)\right).$$


Литература

1. Estermann T. Proof that Every Large Integer is the Sum of Two Primes and a Square // Proc. London Math. Soc. (1937) s2-42(1): 501 – 516.
2. Рахмонов П. З. Обобщённая тернарная проблема Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2013. №2(151. С. 7 – 16.
3. Рахмонов П. З. Короткие суммы с нецелой степенью натурального числа // Математические заметки, 2014, т. 95, в. 5, с. 763 -– 774.
4. Рахмонов П. З. Короткие тригонометрические суммы с нецелой степенью натурального числа // Вестн. Моск. ун-та. сер.1, математика, механика, 2012, №6, с.51–55.
5. Рахмонов П. З. Оценка коротких тригонометрических сумм с нецелой степенью натурального числа // ДАН РТ, 2012, т. 55, №3, с. 185-191.
6. Рахмонов З.Х. Короткие линейные тригонометрические суммы с простыми числами // ДАН РТ, 2000, т. 43, №3, с.27–40.


УДК 514

## О гомотетической подвижности пространств Девиса $\mathbf{D}_n$

Раджабов Г.А.

**(Политехнический институт ТТУ им. акад. М. Осими в г. Худжанде)**

Рассматривается один из специальных случаев пространств опорных элементов Б.Л.Лаптева [1] пространство векторных плотностей Девиса $\mathrm{D}_n$, где за опорный объект принят относительный вектор $u = (u^1, u^2, ..., u^n)$ веса m. Элементами этого пространства являются совокупность точки дифференцируемого многообразия $\mathrm{M}_n$ и опорного объекта т.е. $(x; u)$ [2].

Метрика в этом прстранстве вводится с помошью абсолютного скаляра $L = L(x; u)$ однородного первого измерения относительно опорного объекта, для которого квадратичная форма

$$K = \left(\frac{1}{2}L^2\right)_{\cdot i \cdot j} Z^i Z^j$$

переменных $Z^i$ невырождена и положительно- определенна.

Метрический тензор в этом пространстве имеет вид

$$g_{ij} = g^m \left(\frac{1}{2}L^2\right)_{\cdot i \cdot j}$$

или

$$g_{ij}(x;u) = |\Phi_{\cdot i \cdot j}|^{\frac{-m}{mn-1}} \, \Phi_{\cdot i \cdot j}$$

где $\Phi = \dfrac{1}{2}L^2,\ \cdot i = \dfrac{\partial}{\partial u^i}\ \ (i,j,.. = 1,...,n).$

Имеет место следующая теорема

**Теорема.**

Для того, чтобы группа $P_r(G_r)$ пространства с базисными операторами

$$X_\nu = \xi^i_\nu(x)p_i\ \ (\nu = 1,2,...,r; i = 1,2,...n)$$

была группой гомотетий(движений) пространства Девиса, необходимо и достаточно, чтобы

$$D^L_\nu L(x;u) = c_\nu L(=0)$$

или

$$\xi^s_\nu \partial_s L + L_{\cdot i}\partial_s \xi^i_\nu u^s - mL\partial_s\xi^s_\nu = c_\nu L\ (=0)$$

где $D^L_\nu$–символ производной С.Ли в поле вектора $\xi$, $c_\nu$-гомотетические постоянные, а $p_i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Далее решается задача о нахождении метрик пространств Девиса трёх измерений допускающих возможные группы гомотетий и движений. Для этого воспользуемся методом школы И.П.Егорова [3]. Сущность этого метода заключается в следующем.

Для каждой вещественной струкруры алгебры Ли $\mathrm{I}_r(r \leqslant 4)$ строятся операторные представления соответствующей группы, при этом система координат выбирается таким образом, чтобы операторы группы имели наиболее простой вид. Если в группе часть операторов образуют коммутант, то они принимаются за опереторы движения, а остальные за операторы растяжения с соответствующими гомотетическими постоянными. Для каждого представления

$$X_\nu = \xi^i_\nu(x)p_i\ \ (\nu = 1,2,...,r; i = 1,2,...n)$$

составляются дифференциальные уранения в частных производных определяющие гомотетию(движения) , которые назывются уравнениями Киллинга, после интегрирования выясняется для каких групп абсолютный инвариант $L(x;u)$ может быть приведён к однородной форме с условием

$$\det\left|\left(\frac{1}{2}L^2\right)_{\cdot i \cdot j}\right| \neq 0.$$

Воспользуемся классификацией алгебры Ли приведенной в книге И.П.Егорова [4].

Для одночленных групп систему координат выберем так, чтобы оператор группы $P_1$ имел вид $X_1 = p_1$. Эта группа реализуется как группа гомотетий в пространстве с метрикой

$$L = e^{c_1 x^1} u^3 \varphi\left(x_2, x_3, \frac{u^1}{u^3}, \frac{u^2}{u^3}\right).$$

Для двучленных групп найдены четыре метрики допускающие эти группы как группы гомотетий .

Для группы $P_3$ из стуктурных уравнений построены следующие операторные представления:

Для структуры типа 111

$$\begin{gathered} X_1 = \mathrm{p}_1,\ X_2 = p_2,\ X_3 = x^1p_1 + p_2; \\ X_1 = \mathrm{p}_1,\ X_2 = p_2,\ X_3 = x^1p_1 + x^3p_2; \\ X_1 = \mathrm{p}_1,\ X_2 = p_2,\ X_3 = x^1p_1; \\ X_1 = \mathrm{p}_1,\ X_2 = p_2,\ X_3 = x^1p_1 + x^2p_2. \end{gathered}$$

Эти группы реализуются как группы гомотетий, соответственно, в пространствах с метриками

$$L = u^3e^{c_2x^2}\left(\frac{u^1}{u^3}\right)^{c_3+m}\varphi\left(\frac{u^1}{u^3}e^{-x^3}, \frac{u^2}{u^3}\right),$$
$$L = u^3e^{c_2x^2}\left(\frac{u^1}{u^3}\right)^{c_3-c_2x^2+m}\varphi\left(x^3, \frac{u^1}{u^3}e^{-\frac{u^2}{u^3}}\right),$$
$$L = u^3e^{c_2x^2}\left(\frac{u^1}{u^3}\right)^{c_3+m}\varphi\left(x^3, \frac{u^2}{u^3}\right),$$
$$L = u^2e^{c_2\frac{u^1}{u^2}}(x^2)^{c_2+2m-1}\varphi\left(x^3, \frac{x^2u^2}{u^3}\right).$$

Продолжая исследование для групп $P_3$типов 1У-У11 найдены восемь классов, для четырёхчленных групп гомотетий $P_4$21 классов пространств .

Из найденных метрик как частный случай при $c_\nu = 0$ получатся метрики пространств допускающие группы движений. Следует отметить, что если вес опорного объекта приравнят нулю т.е. положить $m = 0$, то получим метрики трехмерных пространств Финслера.

### Литература


1. Лаптев Б.Л. Пространства опорных элементов. Тр. 1У Всесоюзного матем. Съезда, 2, Л.,1964, с.221-226.
2. Davies E.T, On metric spaces based on a vector denaity. Proc. London Mathem. Soc.(2), 1947, v.19, p, 241-259.
3. Раджабов Г.А. О гомотетически подвижных двумерных пространств векторных опорных плотностей. Пятая Прибалтийская геометрическая конференция. Друскининкай, 1978, с.71.
4. Егоров И.П. Движения в обобщенных пространствах. Рязань.1975.


УДК 536.46

## Уточнение скорости волны фильтрационного горения газов

Садриддинов П.Б.

**(Институт математики им. А.Джураева)**

Основная задача теории горения заключается в определении скорости фронта пламени и его температуры. А фильтрационное горение газов (ФГГ) является недавно сформировавшимся разделом теории горения. Относительно ФГГ проведены многочисленные экспериментальные и теоретические исследования, а также получены различные соотношения для скорости волны [см. лит. 1]. В данном докладе приводятся разные подходы вычисления скорости волны- фильтрационного горения газов (ФГГ) при варьировании скорости вдува газа и фиксированных значениях других параметров. Отметим, что впервые приближенную аналитическую формулу для скорости распространения фронта пламени вывели Я.Б.Зельдович и Д.А.Франк-Каменецкий [2]. При этом они полагали, равенство коэффициентов диффузии и температуропроводности. Это условие позволило связать концентрацию с температурой и свести систему двух уравнений (диффузии и теплопроводности) к одному уравнению, содержащему только температуру. Аналогичная задача, об определение стационарной скорости фронта распространения экзотермической реакции в конденсированной среде, была решена в [3]. Проводя аналогии к этим работам относительно фильтрационного горения газов в инертной пористой среде нами в [4] получено соотношение для скорости волны. При реакции нулевого порядка из этого соотношения имеем:

$$u^2 = \frac{2c\varkappa k_0}{Q\eta_0} \frac{T_0}{T_e(1+u_0)} \int\limits_{T_z}^{T_e} \exp\left(-\frac{E}{RT}\right), \tag{1}$$

где

$$u_0 = \frac{v_{10}}{u}, \quad \varkappa = \frac{\alpha_2\lambda_2 + \alpha_1\lambda_1}{\rho_2 c_2 + \rho_{10} c_p (1+u_0)}, \quad c = \frac{\rho_2 c_2 + \rho_{10} c_p (1+u_0)}{\rho_{10}(1+u_0)}.$$

Поскольку интеграл в правой части (1) не берется в квадратурах, в [2] было использовано приближение Я.Б.Зельдовича и Д.А.Франк-Каменецкого

$$\frac{E}{RT} = \frac{E}{RT_e\left(1 - \dfrac{T_e - T}{T_e}\right)} \approx \frac{E}{RT_e}\left(1 + \frac{T_e - T}{T_e}\right) \tag{2}$$

Такое приближение обосновано тем, что температура при котором происходит самоускорение реакции близка к температуре горения (равновесной температуре -$T_e$). В результате применения приближения (2) из (1) после преобразования получаем трансцендентное уравнение относительно скорости волны $u$

$$u + v_{10} = \sqrt{\frac{2k_0(\alpha_2\lambda_2 + \alpha_1\lambda_1)T_0 RT_e}{\rho_{10} Q\eta_0 E} \exp\left(-\frac{E}{RT_e}\right)}.$$

Далее, для нахождения скорости волны $u$ при варьировании скорости вдува $v_{10}$ и фиксированных значениях других параметров в [4] используется программа "Подбор параметра".

Данная работа посвящена сравнению скорости волны полученной при приближенном и численном определении интеграла в правой части (1). В свое время в работе [5] для горения газов было проведено сравнение значения этого интеграла. Отметим, что в настоящей работе для определения скорости волны также используется программа подбор параметра, а интеграл в правой части (1) вычисляется численным методом. На рисунке 1. приводятся кривые зависимости скорости волны $u$ от скорости вдува газа $v_{10}$ при приближенном (1-сплошная линия) и численном (2-пунктирная линия) определение интеграла в (1)

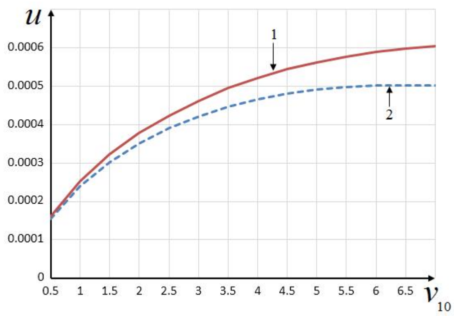



Рис.1: Зависимость скорости распространения фронта ФГГ $u$(м/с) от скорости вдува $v_{10}$м/с

**Литература**

1. Лаевский Ю.М., Бабкин В.С. Фильтрационное горение газов. // В сб. ”Распространение тепловых волн в гетерогенных средах” - Новосибирск, Наука. Сибирское Отделение, 1988, 286 с.
2. Зельдович Я.Б., Франк-Каменецкий Д.А. Теория теплового распространения пламени. // Журнал физической химии, 1938, т.12, с.100.
3. Новожилов Б.В. Скорость распространения фронта экзотермической реакции в конденсированной фазе. // Доклады. АН СССР, 1961, т.141, №1, с.151-153.
4. Кабилов М.М., Садриддинов П.Б. Исследование процесса распространения фронта фильтрационного горения газов // Доклады АН РТ 2010, том 53, №4, с.272-278.
5. Щетинков Е.С. Физика горения газов. Москва, 1965, 740 стр.

УДК 519.624.3

## Применение динамически адаптированных сеток для численного моделирования гидродинамических эффектов в различных средах

Сархадов И.

**(Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия)**

Изучение процессов взаимодействия мощных импульсов лазера и высокотемпературной плазмы на установках типа плазменный фокус [1,2] стимулировало дальнейшее развитие методов расчета и моделирования явлений, протекающих при таких процессах.

Как известно, для описания гидродинамических явлений в различных средах (конденсированные среды, жидкости, плотные газы и пылевая плазма [3]) можно применить хорошо развитие математические методы [4,5].

В данной работе для описания мощных импульсных воздействий введем систему уравнений [6]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\rho u\Big) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\rho u\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(P + \rho u^2\Big) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[\rho\Big(\varepsilon + \frac{u^2}{2}\Big)\Big] + \frac{\partial}{\partial x}\Big[\rho u\Big(\varepsilon + \frac{u^2}{2}\Big) + Pu\Big] = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\Big) + A(x,t) \tag{3}$$

с добавлением уравнение состояния [6,7]

$$P = P(\rho, T),\ \varepsilon) = \varepsilon(\rho, T). \tag{4}$$

В настоящей работе показана эффективность применения динамически адаптированных сеток [4,5] на примере задачи численного моделирования ударных волн, возникающих в материале на примере модельной задачи соударения медного стержня длиной 5 см с неподвижной преградой при скорости $u_0 = 2$км/с [6].

При решении системы уравнений переноса массы, импульса и энергии(1)-(3) с добавлением уравнения состояния (4) [6,7], и применения динамически адаптивных сеток получены профили скорости, давления, плотности вещества материала и удельной энергии ударника в разные моменты времени, а также временные зависимости этих же величин при различных координатах по длине стержня.

На Рис. 1 приведены упомянутые выше профили для 6-ти моментов времени. Как видно, при ударе возникают ударные волны больших интенсивности. Сжатие стержня продолжается до момента времени $t_5$ и в промежутке между $t_5$ и $t_6$ наступает момент, когда ударник перестает дальше деформироваться-сжиматься. Стержень после этого момента начинает разжиматься и его скорость меняет знак. Область сжатия стержня с течением времени увеличивается и соответствующим образом увеличивается плотность материала в этом месте. Ширина фронта разогрева материала также увеличивается. Начиная с некоторого момента фронт давления, расширяясь , достигает левой границы. В более поздние времена происходит дальнейшее расширение стержня и по инерции его длина становиться даже больше исходной длины, при этом плотность материала стержня становиться меньше его начальной плотности.

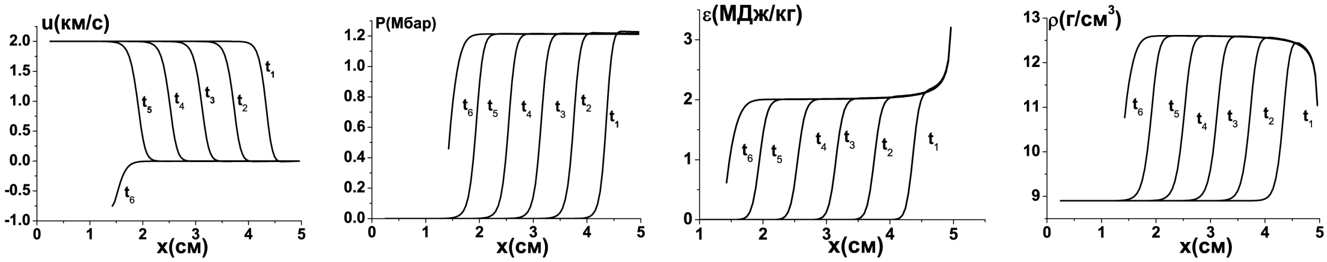



**Рис. 1:** Динамика профилей перемещения, скорости, давления, удельной энергии и плотности удар-ника при временах $t_i = i \cdot 1.25$мкс; $i = 1, 2, \cdots, 6$

В дальнейшем планируется использовать развитый подход для численного моделирования наряду с другими задачами ударных волн, возникающих в материалах под действием мощных импульсных лазерных и ионных пучков.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ No13-01-00595-a, 12-01-00396-a, 14-01-00628-a

## Литература

1. Фортов В.Е. Экстремальные состояния вещества на земле и в космосе. М.: Физматгиз, 2008, 264 с.
2. Фортов В.Е. Экстремальные состояния вещества. М.: Физматгиз, 2010, 304 с.
3. Фортов В.Е., Храпак А.Г., Молотков В.И., Петров О.Ф. Пылевая плазма. УФН, 2004, 174, № 5, с.495-544.
4. В.И. Мажукин, Л.Ю. Такоева. Принципы построения динамически адаптирующихся к решению сеток в одномерных краевых задачах. Математическое моделирование. Том 2, №3, 1990, с. 101-116.
5. П.В. Бреславский, В.И. Мажукин. Алгоритм численного решения гидродинамического варианта задачи Стефана при помощи динамически адаптирующихся сеток. Математическое моделирование. Том 3, №10, 1991, с.104-115.
6. О.М. Белоцерковский. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984 г.
7. Бушман А.В., Фортов В.Е. Модели уравнений состояния вещества. УФН, 1982, Т.140, вып.2, с.177-232.

УДК 511

# Асимптотическое приближение некоторых арифметических сумм с участием функции Мёбиуса

Собиров А. Ш.

**(Таджикский национальный университет)**

Суммы вида

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{\ln^k n}{n}; k=0,1,2,\dots.$$

приближаются с помощью формулы Эйлера –Маклорена [1].

Суммы вида

$$S_k=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{\mu\left(n\right)}{n}\ln^k\frac{x}{n},\text{ для } k=0,1,2,\dots$$

где $\mu(n)=\begin{cases}1,\text{если } n=1\\ (-1)^k,\text{если } n=p_1p_2\dots p_k\\ 0,\text{если } n\vdots p^2\end{cases}$ – функция Мебиуса, приближаются с помощью вторая формулы обращения Мебиуса [2].

В настоящей работе в комбинациях указанных сумм и формул получаются следующие асимптотические оценки с ограниченными коэффициентами:

**Теорема.** Для всех $x\geqslant 100$ имеются место следующие асимптотические формулы:

$$S_0=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{\mu\left(n\right)}{n},\ -0,99\leqslant S_0\leqslant 1,01$$

$$S_1=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{\mu\left(n\right)}{n}\ln^k\frac{x}{n},\quad -0,2081<S_1<2,125$$

$$S_2=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{\mu\left(n\right)}{n}\ln^2\frac{x}{n}=2lnx+\Delta_2,$$

$$\text{где}\Delta_2=\Delta_2\left(x\right)\text{и }-3,362<\Delta_2<3,11$$

$$S_3=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{\mu\left(n\right)}{n}\ln^3\frac{x}{n}=3\ln^2 x-6\gamma\log x+\Delta_3$$

где $\gamma\approx 0,5772\dots$ постоянная Эйлера,

$$\Delta_3=\Delta_3\left(x\right)\quad -12,5<\Delta_3<10,9$$

$$S_4=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{\mu\left(n\right)}{n}\ln^4\frac{x}{n}=4\ln^3 x-12\gamma\log^2 x+\left(24\gamma^2+24\gamma_1\right)\ln x+\Delta_4$$

$$\text{где }\gamma_1=\int\limits_1^\infty\sigma\left(t\right)\frac{2ln\,t-3}{t^3}dt$$

,

$$\sigma\left(t\right)=\frac{\{t\}-\{t\}^2}{2}$$

$\{t\}$ – функции дробной доли $u$, $-0,1875 < \gamma_1 < 0,0625$, кроме того $\Delta_4 = \Delta_4(x)$, $|\Delta_4| < 80$.

Для установление асимптотическое поведение каждой суммы $S_k$ понадобятся значение всех предыдущих сумм вида $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}$. Видно что асимптотическое значение рассмотренных суммы вида $S_k$ есть логарифмический многочлен

$$S_k = S_k(\ln x) = k\ln^{k-1}x - k(k-1)\gamma\ln^{k-2}x + a_3\ln^{k-3}x + \ldots + a_{k-1}\ln x + \Delta_k$$

где $\Delta_k = \Delta_k(x)$ – свободный член многочлена и остаточный член асимптотического вычисления имеет свои левые и правые числовые границы. Все коэффициенты $a_3, a_4, \ldots, a_{k-1}, \Delta_k$ зависят от $\gamma$ и $k$.

При оценках не использованы символы Ландау O и o. Асимптотическое значение суммы вида $S_k$ применяются в элементарного доказательства теоремы о простых числах в натуральном ряду и в арифметической прогрессии.

**Литература**

1. Карацуба А. А. “Основы аналитической теории чисел” Москва 1986гг.
2. Чандрасекхаран К. “Арифметические суммы” Москва 1985гг.

УДК 511.524

## Об кубической тернарной задаче Эстермана с почти равными слагаемыми

Фозилова Д.М.

**(Институт математики им. А.Джураева )**

Доклад посвящен улучшению теоремы [1] об асимптотической формуле в кубической задаче Эстермана с почти равными слагаемыми. Основная теорема доказывается использованием следствиями основной теоремы работы [2] о поведении короткой кубической тригонометрической суммы Г. Вейля вида

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m\le x} e(\alpha m^3), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \quad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \le q \le \tau$$

в множестве точек первого класса в сочетании с новой оценкой суммы $T(\alpha; x, y)$ в множестве точек второго класса.

Теорема. Пусть $N$ – достаточно большое натуральное число, $I(N,H)$ – число представлений $N$ суммою двух простых чисел $p_1$, $p_2$ и куба натурального $m$ с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1,2, \quad \left|m^3 - \frac{N}{3}\right| \le H,$$

$\rho(N,p)$ – число решений сравнения $k^3 \equiv N(mod p)$. Тогда при $H \ge N^{\frac{5}{6}}\mathscr{L}^9$, $\mathscr{L} = \ln N$ справедлива асимптотическая формула:

$$I(N,H) = \frac{3\mathfrak{S}H^2}{\sqrt[3]{3N}\mathscr{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{\sqrt{N}\mathscr{L}^3}\right), \mathfrak{S} = \prod_p \left(1 + \frac{\rho(N,p)}{(p-1)^2}\right).$$

Следствие. Существует такое $N_0$, что каждое натуральное число $N > N_0$ представимо в виде суммы двух простых чисел $p_1$, $p_2$ и куба натурального $m$ с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le N^{\frac{5}{6}}\mathscr{L}^9, \quad i = 1,2, \quad \left|m - \sqrt[3]{\frac{N}{3}}\right| \le \frac{N^{\frac{1}{6}}\mathscr{L}^9}{\sqrt[3]{3}} - \frac{\mathscr{L}^{18}}{\sqrt[3]{3}} + 1.$$

**Литература**

1. Фозилова Д.М. Асимтотическая формула в кубической задаче Эстермана с почти равными слагаемыми // Доклады АН РТ, 2011 г., том 54, №9, с.715 – 718.
2. Рахмонов З.Х., Фозилова Д.М. Короткая кубическая тригонометрическия сумма Г.Вейля // Доклады АН РТ, 2011 г., том 54, №11. с.880 – 886.

УДК 511. 524

# Нули производной первого порядка функции Харди

Хайруллоев Ш.А.

**(Институт математики им. А.Джураева)**

Функция Харди $Z(t)$ задается равенством

$$Z(t) = e^{i\theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right), \quad e^{i\theta(t)} = \pi^{-\frac{it}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|^{-1},$$

принимает вещественные значение при вещественных значениях $t$ и вещественные нули $Z(t)$ являются нулями $\zeta(s)$, лежащими на критической прямой.

Первым результатом о нулях дзета-функции Римана $\zeta(s)$ на критической прямой является теорема Г.Харди [1]. В 1914 г. он доказал, что $\zeta(1/2+it)$ *имеет бесконечно много вещественных нулей.* Затем Харди и Литтлвуд [2] в 1921 г. доказали, что промежуток $(T, T+H)$ при $H \geq T^{1/4+\varepsilon}$ содержит нуль нечетного порядка $\zeta(1/2+it)$. Ян Мозер [3] в 1976 г. доказал, что это утверждение имеет место при $H \geq T^{1/6}\ln^2 T$. В 1981 г. А.А. Карацуба [4] доказал теорему Харди-Литллвуда уже при $H \geq T^{5/32}\ln^2 T$.

В работе [5] задачу о величине промежутка $(T, T+H)$ критической прямой в которой, содержится нуль нечетного порядка дзета-функции сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар для оценки специальных тригонометрических сумм, то есть: *пусть* $(k,l)$ – *произвольная экспоненциальная пара, отличная от* $(1/2, 1/2)$,

$$\theta(k;l) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2-\theta_1^{-1}(k;l)}\right), \quad \theta_1(k;l) = \frac{l}{0,5-k}, \tag{1}$$

*тогда промежуток* $(T, T+H)$, $T \geq T_0 > 0$, $H \geq T^{\theta(k;l)}\ln^2 T$ *содержит нуль нечетного порядка дзета-функции Римана.*

Заметим, что минимизация $\theta(k;l)$ равносильно минимизации $\theta_1(k;l)$ и теорема А.А.Карацуба с $H \geq T^{5/32}\ln^2 T$ является следствием соотношение (1), при

$$(k,\lambda) = \left(\frac{1}{14}, \frac{11}{14}\right) = AAB(0,1), \quad \theta_1\left(\frac{1}{14}, \frac{11}{14}\right) = \frac{11}{6} = 1,8(3), \quad \theta\left(\frac{1}{14}, \frac{11}{14}\right) = \frac{5}{32} = 0,15625.$$

В работе [6] найдена нижняя грань величины $\theta_1(k;l)$ по множеству всех экпоненциальных пар, то есть найдена нижняя грань длины промежутка критической прямой, в котором содержится нуль нечетного порядка дзета-функции и выражена она через константу Ранкина.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{R}$ множество всех экспоненциальных пар $(k,l)$ отличных от $(1/2, 1/2)$, тогда справедливо соотношение

$$\inf_{(k,l)\in\mathfrak{R}} \theta_1(k;l) = R+1,$$

где $R = 0,8290213568591335924092397772831120\ldots$ – постоянная Ранкина.

Полученный результат в рамках данного метода является окончательным.

А.А.Карацуба [4] вместе с задачей о соседних нулях функции $Z(t)$ также изучил задачу о соседних точках экстремума или точках перегиба функции $Z(t)$ или в более общей подстановке – о соседних нулях функции $Z^{(j)}(t)$, $j \geq 1$. Он показал, что с увеличением $j$ длина промежутка, на котором заведомо лежит нуль $Z^{(j)}(t)$, уменьшается и доказал: *промежуток* $(T, T+H)$ *содержит нуль нечетного порядка функции* $Z^{(j)}(t)$ при $T \geq T_0(j) > 0$, $H \geq cT^{1/(6j+6)}\ln^{2/(j+1)} T, c = c(j) > 0$.

В работе [7] задача о величине промежутка $(T, T+H)$ критической прямой, в которой заведомо лежит нуль нечетного порядка функции $Z^{(j)}(t) \quad (j \geq 1)$ сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар для оценки тригонометрических сумм и доказана следующая теорема

Теорема 2. Пусть $(k, l)$ –произвольная экспоненциальная пара, $j$ – натуральное число, $T \geq T_0(j) > 0$,

$$H \geq cT^{\theta_j(k;l)}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}}, \quad \theta_j(k;l) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2 - \delta_j^{-1}(k;l)}\right),$$

$$\delta_j(k;l) = \frac{l+j}{0,5-k+j}, \quad c = c_0(j) > 0.$$

Тогда промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечетного порядка функции $Z^{(j)}(t)$.

Заметим, что $\theta_j\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6j+6}$, то есть теорема А.А.Карацубы является следствием теоремы 2, при $(k, l) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$.

Доклад посвящен нахождению нижней грани длины промежутка критической прямой, в которой содержится нуль нечетного порядка производной первого порядка функции Харди.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{R}$ множество всех экспоненциальных пар $(k, l)$, тогда

$$\inf_{(k,l)\in\mathfrak{R}} \delta_1(k;l) = \inf_{(k,l)\in\mathfrak{R}} \delta_1 ABA^2BA^2 = 1\frac{35}{146} = 1,239726...,$$

$$ABA^2BA^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{13}{106}, \frac{75}{106}\right).$$

Теорема 3 является уточнением теоремы Карацуба при $j = 1$, так как

$$\frac{35}{432} = \frac{1}{12} - \frac{6}{2592},$$

и ее доказательство проводится методом оптимизации экспоненциальных пар.

## Литература

1. Hardy G. H. Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann // Compt.Rend. Acad.Sci-1914.-v.158.-P.1012-1014.
2. Hardy G.H., Littlewood J.E. The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line // Math.Z.-1921.-Bd 10.-S.283-317.
3. Мозер Я. Об одной сумме в теории дзета-функции Римана. - Acta arith., 1976, 31, S. 31-43.
4. Карацуба А.А. О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Труды МИАН. 1981.-т.157.С.49-63.
5. Рахмонов З.Х., Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // ДАН Республики Таджикистан, 2006, т. 49, 5, стр. 393-400.
6. Рахмонов З.Х., Хайруллоев Ш.А. Соседние нули дзета–функции Римана, лежащие на критической прямой. ДАН РТ, 2009, т. 52, № 5, стр. 331 – 337.
7. Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями функции $Z^{(j)}(t)$, $j \geq 1$ // ДАН РТ, 2006, т. 49, 9, стр. 803 - 809.

УДК 004.021

# Реализация нечеткого поиска в скриптовом языке PHP

Хакимов Р.

**(Худжандский государственный университет им. ак. Б. Гафурова)**

Данная работа посвящена решению следующей задачи: дан текстовый файл с последовательностью чисел, которая является представлением музыкального файла, где каждой секунде аудио файла соответствует одно характеристическое число. Необходимо написать скрипт, который проанализирует файл и выявит максимально длинную подпоследовательность чисел, которая повторяется как минимум один раз.

Важным условием задачи является то, что абсолютно равных подпоследовательностей может не найтись, поэтому надо найти максимально близкие. Также, к задаче ставится ограничение, что такие последовательности не могут быть слишком короткими (менее 10) и слишком длинными (более 30).

Наиболее распространенным применением алгоритмов нечеткого поиска (или поиска по сходству) до недавнего времени была проверка орфографии. Также, при наличии больших объемов данных ДНК, нечеткий поиск сходства нуклеотидных последовательностей стал важным применением. Нечеткий поиск сейчас широко применяется для идентификации музыкальных произведений по небольшим отрывкам и в фильтрации спама [1].

Для реализации данной задачи необходимо определить некоторые понятия, используемые при использовании нечеткого поиска. Пусть $X$ – заданная числовая последовательность. Все рассматриваемые ниже подпоследовательности выделяются из последовательности $X$.

Согласно методу нечеткого поиска, элементы $x, y \in X$ называются близкими, если они удовлетворяют следующим условиям.

**Условие 1.** Элементы одинаковых подпоследовательностей будут локализованы вокруг одного единственного числа, то есть у них будут равные (либо близкие) средние арифметические. Так как количество элементов в сравниваемых подпоследовательностях будет одинаковое, поэтому у одинаковых подпоследовательностей должны быть одинаковые суммы (либо близкие):

$$|\mathrm{s}_1 - \mathrm{s}_2| \le \varepsilon_{\mathrm{s}}$$

где, $s_1$ и $s_2$ соответственно суммы первого и второго подпоследовательностей, $\varepsilon_{\mathrm{s}}$ – заданная наперед точность.

**Условие 2.** Если у двух подпоследовательностей одинаковые суммы, но разные стандартные отклонения, то они будут разные в силу того, что эти две подпоследовательности чисел имеют различные разбросы.

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \le \varepsilon_{\sigma}$$

Например, данные первой подпоследовательности могут быть беспорядочно и сильно рассеяны вокруг среднего значения, а у второй подпоследовательности — сконцентрированы около среднего значения и упорядочены.

**Условие 3.** В качестве третьего условия выберем наклон линейной регрессии. Одинаковые подпоследовательности будут иметь одинаковые линейные регрессии, соответственно, их угловые коэффициенты должны быть равны (либо близки):

$$|\mathrm{b}_1 - \mathrm{b}_2| \le \varepsilon_{\mathrm{b}}$$

Из нескольких подпоследовательностей, удовлетворяющих условиям 1, 2, 3 и имеющим наибольшую длину, в качестве результата выберем ту, которая имеет наименьшую сумму разностей сумм, стандартных отклонений и угловых коэффициентов:

$$|\mathrm{s}_1^* - \mathrm{s}_2^*| + |\sigma_1^* - \sigma_2^*| + |\mathrm{b}_1^* - \mathrm{b}_2^*| < |\mathrm{s}_1 - \mathrm{s}_2| + |\sigma_1 - \sigma_2| + |\mathrm{b}_1 - \mathrm{b}_2|$$

Предложенный алгоритм использует перебор (brute force). Положение несколько сглаживает последовательная проверка условий 1,2,3. Как только условие не выполняется, происходит переход на другой шаг цикла перебора. Также, есть возможность сокращения времени расчетов: можно повторно использовать значения, рассчитанные на ранних условиях в последующих условиях. Процесс поиска, можно распараллелить по длине проверяемой подпоследовательности.

Можно упростить формулу подсчета углового коэффициента для нашей ситуации. Действительно, пусть $b$ – угловой коэффициент линейной регрессии:

$$b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Правую часть формулы можно записать следующим образом:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum\limits_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_i y_i} - \frac{1}{\mathrm{n}} \sum\limits_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_i} \sum\limits_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{y_i}}{\sum\limits_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} (\mathrm{x_i^2}) - \frac{1}{\mathrm{n}} \left(\sum\limits_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_i}\right)^2}$$

Учитывая, что для нашей задачи $x_i \in \mathbb{N}$, можно записать:

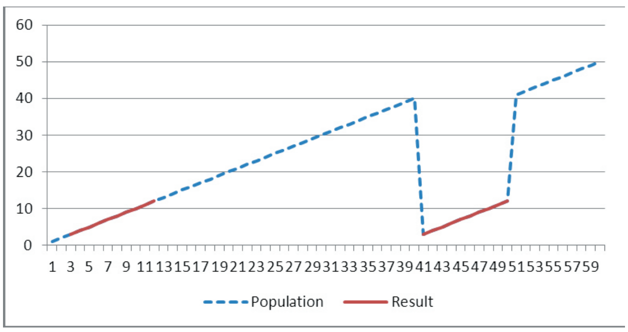
$$\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} (\mathrm{x_i^2}) - \frac{1}{\mathrm{n}} \left(\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_i}\right)^2 = \frac{\mathrm{n\,(n+1)\,(2n+1)}}{6} - \frac{1}{\mathrm{n}} \left(\frac{\mathrm{n\,(n+1)}}{2}\right)^2 =$$

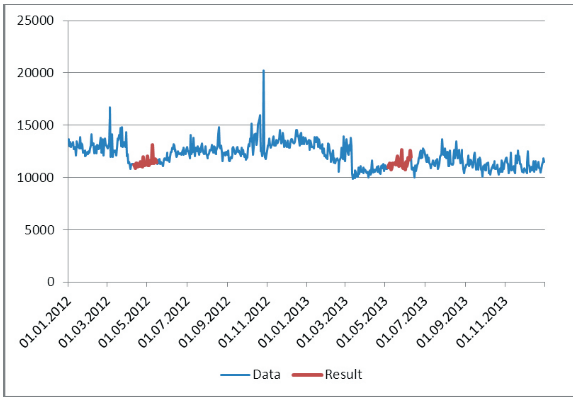
$$= \frac{\mathrm{n\,(n+1)}}{12}\,(\mathrm{4n + 2 - 3n - 3}) = \frac{1}{12}\mathrm{n\,(n+1)\,(n-1)}$$

И для $b$ можно получить более простую формулу вычисления:

$$\mathrm{b} = \frac{12}{\mathrm{n(n^2-1)}} \left(\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{iy_i} - \frac{n+1}{2} \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{y_i}\right) = \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^{n} i y_i - \frac{6}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

В заключении, приведем графики, визуально отражающие результаты некоторых тестов. На графиках выделены участки “близких” подпоследовательностей данной последовательности.




## Литература


1. http://en.wikipedia.org/wiki/Approximate_string_matching
2. http://en.wikipedia.org/wiki/Simple_linear_regression
3. http://en.wikipedia.org/wiki/Standard_deviation
4. http://en.wikipedia.org/wiki/Time_series
5. http://en.wikipedia.org/wiki/Semimetric_space#Semimetrics
6. В.Г. Минашкин, Р.А. Шмойлова, Н.А. Садовникова, Л.Г. Моисейкина, Е.С. Рыбакова. Теория статистики: Учебно-методический комплекс. – М.: Изд. центр ЕАОИ. 2008. – 296 с.
7. Бойцов Л.М. Классификация и экспериментальное исследование современных алгоритмов нечеткого словарного поиска // Труды 6-ой Всероссийской научной конференции «Электронные библиотеки: перспективные методы и технологии, электронные коллекции». RCDL2004, Пущино, Россия, 2004. http://boytsov.info/pubs/rcdl2004.pdf


УДК 531

# Подвижная нагрузка но нелинейно - сжимаемом слое грунта с основанием Винклера

Хакимов У.

**(Худжандский государственный университет им. ак. Б. Гафурова)**

Рассматривается задача о воздействии произвольно убывающей нормальной нагрузки высокой интенсивности на двухслойную среду, состоящую из мягкого слоя грунта и упруго – податливой прокладки с толщинами $h_1, h_2$ и плотностями $\rho_1, \rho_2$.

В отличие от предыдущего работе, здесь грунт моделируется нелинейно-сжимаемой средой а прокладка обладающая более слабой чем грунт жесткостью $K$ - и плотностью $\rho_2 < \rho_1$ - основанием Винклера. Нижняя граница двухслойной среды является твердой и недеформируемой. Согласно принятых предположений волновым процессом в прокладке приберегается, а волна сжатия OA (рис.2) при $\xi \succ \xi$ от контактной поверхности двух сред отражается в виде волны разгрузки AB сильного разрыва, и поведение грунта в областях 1, 2, 3 и т.д. определяется разгрузочными ветвями диаграммы $P \infty E$.

Отметим, что предлагаемая работа имеет практическое значение в оценках уровней снижения динамических нагрузок на различные подземные сооружения при использовании насыльного экрана с упругоподатливой прокладкой.

Решение задачи построено аналитически как обратным, так и прямим способами. Приступим к изложению этих решений задача в области 1 обратным способам при заданной форме фронта ударной волной $\eta = \eta(\xi)$ ранее было решена [1]. Её решение согласно [1] во предыдущего работе представлено в виде формулы [2]. В ходе решения этой задачи определён профиль нагрузки $f(\xi)$, которой в дальнейшим при построении решений задачи для областей 2 и 3 считается заданным.

Учитывая, что среда в области 2 находится в состоянии разгрузки,

то для решения задачи относительно потенциала скорости $\phi_2(\xi, n)$ имеем уравнение

$$\mu^2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = 0, \left( \mu^2 = \frac{D^2}{Cp^2} - 1, Cp = \sqrt{\frac{E}{\rho_1}} \right) \tag{1}$$

Во следующими граничными условиями:

$$tg\beta \left( \upsilon_2 - \upsilon_1 \right) = \left( u_2 - u_1 \right) \text{ при } \eta + tg\beta \cdot \xi = 2h_1 \tag{2}$$

$$D \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} = K_x \cdot \ \upsilon_2 \text{ при } \eta = h, \xi_a \leq \xi \leq \xi_c \tag{3}$$

где $C_p = D \sin \beta, tg\beta = 1/\mu, K_x = K/h_2\, U_2, \upsilon_2$ – горизонтальная и вертикальная составляющие скорости, $P_2$ – давление среды в области 2, $\beta$ – угол наклона отраженной волны с линией АС, К – модуль Юнга прокладки.

Покажем, что выражение (3) является следствием условия Винклера. Согласно условия Винклера на подошве грунтового слоя нормальное напряжение или давление $P_2(x, y, t)$ прямо пропорционально вертикальному перемещению $V_2(x, y, t)$ основания, т.е.

$$P_2(x, h, t) = K_x \cdot V(x, h, t). \tag{4}$$

Продифференцируя по t , из (4) получим

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = K_x \frac{\partial V_2}{\partial t} = K_x \cdot \upsilon_2(x, h, t) \tag{5}$$

Если в (5) переходит в подвижную систему координат $\xi = Dt{+}x, \eta = y$ то (5) вырождается в (3). Извесно, что уравнение (1) при Д >Ср допускает решение вида

$$\phi_2 \left( \xi, \eta \right) = f_1 \left( \xi - \mu\eta \right) + f_2 \left( \xi + \mu\eta \right) \tag{6}$$

Отсюда

$$U_2(\xi, \eta) = \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} = f_1' \left( \xi - \mu\eta \right) + f_2'(\xi + \mu\eta), \tag{7}$$

$$\upsilon_2(\xi, \eta) = \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} = -\mu f_1'(\xi - \mu\eta) + \mu f_2' \left( \xi + \mu\eta \right)$$

Подставляя (7) в (2), после некоторных преобразований, получим

$$f_1'(z) = \frac{1}{2} \left[ U_1 \left( \frac{z + \mu \left( h + tg\beta \cdot \xi a \right)}{2} - \frac{z - \mu \left( h + tg\beta \cdot \xi a \right)}{2\mu} \right) - \right.$$
$$\left. - \ tg\beta \cdot \upsilon_1 \left( \frac{z + \mu \left( h + tg\beta \cdot \xi\alpha \right)}{2\mu} \right) \right]. \tag{8}$$

Используя формулы $P_2'\left(\xi, \eta\right) = P_1'(\xi_1), P_2''(\xi, \eta) = P_1''(\xi_2)$, * т. д (*) подставим (7) в (3). Тогда имеем:

$$f_2''(z) + \frac{K_x \cdot \mu}{\rho_1 D^2} f_2'(z) = -f_1''(z - 2\mu h) + \frac{K_x \cdot \mu}{\rho_1 D^2} f_1'(z - 2\mu h), \tag{9}$$

где штрих сверху означает произведению пот аргументу.

Уравнение (9) имеет решение вида:

$$f_2'(z) = c_2 e^{-lz} - f_1'(z-2\mu h) + f_1'(z-2\mu h)\cdot e^{-l(z-z_0)} + 2le^{-lz}\int\limits_{Z_{02}}^{z} e^{lz} f_1'(z-2\mu h)dz \qquad (10)$$

где $z_{02} = \xi_a + \mu h, l = \dfrac{(K_x \cdot \mu)}{(\rho_1 \cdot D^2)}$.

Отметим, что произвольная постоянная $C_2$ , входящая в (10) определяется из условия (2) при $\xi = \xi_a$, $\eta = h$. Так как точка $\mathrm{A}(\xi_a, h)$ лежит на фронта ударной волны ОА, то вертикальное перемещение основания $V_2\,(\xi_a, h)$ обращается в нуль.

Следовательно, с учетом (*) получим

$$U_2(\xi_a, h) = 0 \text{ при } \xi = \xi_a, \eta = h. \qquad (11)$$

В этом случае, подставляя (8) и (10) в (7) и (11) , находим, что

$$C_2 = -\frac{1}{2}e^{l(\xi_a+\mu h)}\left[U_1(\xi_a, h) - \frac{1}{\mu}\upsilon_1(\xi_a, h)\right]. \qquad (12)$$

Таким образом, решение задача в области 2 выражается явными формулами.

В целом, анализ серии результатов расчета показывает, что упрощения инженерная схема, основанная на моделирование прокладки основанием Винклера позволяет получить практически приемлемые оценки нагрузок на подземные сооружения при воздействии на границу двухслойной среды сейсмической волны сжатия.

### Литература

1. Атабоев К. О воздействии подвижной нагрузки на полуплоскость. ФАН Уз. ССР. №9.1979.
2. Хакимов У. О воздействии подвижной нагрузки на нелинейно – сжимаемую полосу с жестки основанием. ПМТФ.№3 1986.

УДК 519.86

## Об одной интегро-дифференциальной системе и связанные с ней задачи охраны редких видов

Юнуси М., Ганиев Ч.

**(ДФ НИТУ "МИСиС")**

Рассмотрим модельную экосистему, описываемую с помощью следующей интегро-дифференциальной задачи типа

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial a} + \sum\limits_{i=1}^{2} v_i \frac{\partial N}{\partial x_i} = F_0(a)N + \sum\limits_{i=1}^{2} D_i \frac{\partial^2 N}{\partial x_i^2}, \quad x \in \bar{G}, \quad 0 < a < \infty, \quad 0 < t \leqslant t_k \\ N(x, a, 0) = N_0(x, a), \quad x \in G, \quad 0 \leqslant a < \infty \\ N(x, 0, t) = \int\limits_0^\infty B_0(\xi)N(x, \xi, t)d\xi, \quad x \in \overline{G}, \quad 0 \leqslant t < t_k \\ N|_s = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где $N=(N_1,\ N_2,\ ...,\ N_m), \bar{G}=G+S, \quad G=\{(x_1,x_2):\quad 0<x_i<L_i,\ i=1,2\}, S$ - граница области $G$,

$$F_0(a)=\begin{pmatrix} F_{11}(a) & ... & F_{1m}(a) \\ ... & ... & ... \\ F_{m1}(a) & ... & F_{mm}(a) \end{pmatrix}, \quad B_0(a)=\begin{pmatrix} b_{11}(a) & ... & b_{1m}(a) \\ ... & ... & ... \\ b_{m1}(a) & ... & b_{mm}(a) \end{pmatrix},$$

$$v_i=\begin{pmatrix} v_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_{im} \end{pmatrix}, \quad D_i=\begin{pmatrix} d_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{im} \end{pmatrix}, \quad i=1,2$$

Следуя [1-5], сформулируем задачу охраны. Пусть $N^{\min}, \quad N^{\max}$ - положительные векторы (часть компонентов этих векторов для некоторых видов задается, а часть находится в результате решения задачи). Требуется найти $N^{min}, N^{max}$ условия относительно модельной экосистемы (1), которые обеспечивают выполнения неравенства:

$$N^{\min}\leqslant N(x,a,t)\leqslant N^{\max}_{,} \quad N^{\min}\leqslant\int\limits_0^\infty p(a)N(x,a,t)da\leqslant N^{\max} \tag{2}$$

где $p(a)-$весовая функция, $p(a)\geqslant 0,\ \int\limits_0^\infty p(a)da=1.$

**Утверждение**. При обычных условиях на входные функции (1) имеет место:

$$N(x,a,t)=\frac{2}{\sqrt{L_1L_2}}Z(a)\sum_{n_1n_2=1}^{\infty}E^{\lambda}_{n_1n_2}(a)M_{n_1n_2}(t-a)\cdot\sin\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2x_2}{L_2}E_{DV}(x), \tag{3}$$

где $Z(a)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}Z_i(a),\ Z_{i+1}(a)=\int\limits_0^a F_0(\xi)Z_i(\xi)d\xi,\ Z_0(a)=1,$

$$E^{\lambda}_{n_1n_2}(a)=\begin{pmatrix} e^{-\lambda^1_{n_1n_2}a} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{-\lambda^m_{n_1n_2}a} \end{pmatrix},$$

$$E_{DV}(x)=\begin{pmatrix} e^{\sum\limits_{i=1}^{2}\frac{v_{i1}x_i}{2D_{i1}}} & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\sum\limits_{i=1}^{2}\frac{v_{im}x_i}{2D_{im}}} \end{pmatrix},$$

$M_{n_1n_2}(t)-$ является решением следующего интегрального уравнения типа восстановления

$$M_{n_1n_2}(t)=\int\limits_0^t\tilde{B}(\xi,t)M_{n_1n_2}(t-\xi)d\xi+f(t), M_{n_1n_2}(t)=\int\limits_0^\infty B(\xi)M_{n_1n_2}(t-\xi)d\xi, \tag{4}$$

где $B(\xi)=B_0(\xi)Z(\xi)E^{\lambda}_{n_1n_2}(\xi)$ является матрицей выживаемости возрастно-пространственно-распределенных сообществ. Решение (3) будем искать в виде$M_{n_1n_2}(t)=C\cdot\exp(\delta t)$, где $C$ – неотрицательный вектор, $\delta=const$. Тогда для определения $\delta$получим характеристическое уравнение [6-10]

$$f(\delta)=\det(I-\int\limits_0^\infty B(\xi)e^{-\delta\xi}d\xi)=0, \tag{5}$$

которое эквивалентно уравнениям $f(\delta) = \det\left(I - \int\limits_0^\infty e^{-\delta a} d\overline{B}(a)\right) = 0, \det(I - \overline{B}) = 0$

$$\det\left(I - \frac{\delta}{2}\tilde{\vartheta}_2 + \frac{\delta^2}{3!}\tilde{\vartheta}_3 + \cdots\right) = 0, \tag{6}$$

где $\overline{B} = \int\limits_0^\infty \overline{B}(\xi)d\xi$, $B(a) = \int\limits_0^a B(a)da$, $\tilde{\vartheta}_j = (I - \overline{B})^{-1}\vartheta_j, \quad \vartheta_j = \int\limits_0^\infty a^j dB, \quad j = 1, 2, \cdots$

Таким образом, если вещественные части корней (4) или (5) отрицательны, то при $t \to \infty M_{n_1 n_2} \to 0$. Следовательно, в силу равномерной сходимости (2) и в силу (3) имеем $N(x, a, t) \underset{\to}{\to} 0, \quad t \to \infty$. Это означает, что нулевое решение задачи (1) асимптотически устойчиво. Теперь решим задачу охраны видов экосистемы, т.е. найдем условия, обеспечивающие выполнение неравенства (2). Заметим, что для линейной задачи (1) в (2) вектор $N^{\min}$ не может быть нулевым.

## Литература


1. Юнуси М. Теорема о представлении сложных объектов, описываемых дифференциальными уравнениями. Вестник Таджикского национального университета, 2013, 1/1(102), с. 3-12.
2. Юнуси М., Ганиев Ч. Об одной модели популяционной турбулентности. Вестник Таджикского национального университета, № 1-2 (106), серия естеств. наук. 2013. С. 17-21.
3. Юнуси М. Исследование математической модели задачи защиты растений. Душанбе, ООО, "Сармад - компания", 2013, 110с. (монография) (соав. Р. Одинаев).
4. Юнуси М. Исследования по математическому моделированию задачи охраны и оценки численности популяции экологических систем . Душанбе, ООО, "Сармад - компания", 2013, 136с. (монография) (соав. С .Одинаева).
5. Юнуси М. О решении модельных задач с функциональными условиями . Д. Сино-2014. -108с. (монография). (соав. С Х. Джалилов).
6. Yunusi M. Model of Number Tree. ICM 2010, International Congress of Mathemation Book Abstracts , Hyderabad , 2010p.531-532
7. Yunusi M. About Extreme and Algebraic Representations of processes describing Tree of Numbers Models. $13^{tn-}$ International Pure Mathematics Conference 2012. (Abstracts), 1-3 September. 2012, Islamabad.
8. Yunusi M. Extreme Model of Economic crisis, risks and control interactions countries with different economic development level. International Congress Actuaries, March 30 to 4 April, Washington, US, 2014.-63p.
9. Yunusi M. Representation of Economics its parameters by polynomial model. International Congress Actuaries, March 30 to 4 April, Washington, US, 2014.-81p.
10. Ганиев Ч., Юнуси М. Дифференциальная модель популяционной турбулентности. Матер. Межд. науч. конф. ,посвящ. 85-летию акад. АН РТ Михайлова Л.Г. Душанбе, 2013, с.160-162.

УДК 519.86

# Некоторые математические вопросы экономического кризиса

Махваш Юнуси[†], Махмадюсуф Юнуси[‡]

**([†]НИИ ТНУ)**
**([‡]ДФ НИТУ "МИСиС")**

Рассмотрим следующую модельную экономику

$$\begin{cases} \frac{dK}{dt} = \varepsilon A f\left(K, L\right),\ 0 < t \leqslant t_k,\ \ K\left(0\right) = K_0, \\ \frac{dL}{dt} = \delta L, \qquad L\left(0\right) = L_0, \\ \delta: \int\limits_0^{a_{\max}} \mathrm{B}\left(a\right) e^{-\delta a} da = 1, \quad \delta \in \left(-\infty, \infty\right), \\ Y = A f\left(K, L\right), \qquad C = \left(1 - \varepsilon\right) Y, \\ \frac{dA}{dt} = a_0 A - a_1 A^2, \qquad A\left(0\right) = A_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $K = K(t)-$ величина капитала в момент времени $t, L = L(t)-$ величина трудовых ресурсов, $\varepsilon$-доля национального дохода – $Y$ идущего на капиталовложения , C – величина потребления, $A = A(t)-$ уровень технологии, $B - B(a)-$функция стабильности трудовых ресурсов определяемая как $\mathrm{B}\left(a\right) = \mathrm{B}_0\left(a\right) e^{-\int\limits_0^a f_0(\xi) d\xi}$, $B_0(a)$ – функция рождаемости людских ресурсов, $F_0(a)$ – функция смертности.

Следует отметить, что функция $L = L(t)$ представляется в виде
$L(t) = \int_0^{a_{\max}} \varphi(a,t) N(a,t) da$, где $N = N\left(a, t\right)$ является решением задачи:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\right) N = -F_0\left(a\right) N, \quad 0 < t \leqslant t_0, \quad 0 \leqslant a \leqslant a_{\max} \\ N\left(a, 0\right) = N_0\left(a\right) \\ N\left(0, t\right) = \int\limits_0^{a_{\max}} \mathrm{B}_0\left(\xi\right)\ N\ \left(\xi, t\right) d\xi \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $\varphi = \varphi\left(a, t\right)$ является решением сопряженной задачи и называется потенциальной к функцией людских ресурсов.

**Определение 1.** Пусть входные функции задачи (1) заданы в области определения своих параметров, а также известные входные параметры $\mathrm{K}_0,\ L_0,\ A_0,\ \varepsilon\ \ f\left(0\right)$ некоторая производственная функция, тогда вектор функцию $(K, L, Y, C, A)$ определяемой как решение задачи (1) мы называем модельной экономикой соответствующую производственную функцию $f(K, L)$. При этом производственную функцию $A \cdot f\left(K, L\right)$ назовем модельной производствам.

**Определение 2.** Скажем, что модельная экономика (1) находится в состояние кризиса, если существуют такие постоянные положительные числа $K*$, $L*$ и $\delta$ для которых имеют места неравенства

$$Y^\tau\left(\mathrm{K}, L^*\right) \leqslant Y^\tau\left(\mathrm{K}^*, L^*\right) \leqslant Y^\tau\left(\mathrm{K}^*, L\right), \tag{3}$$

Каковы бы не были решения (1) удовлетворяющих условий

$$\frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau \mathrm{K}\left(t\right) dt \leqslant \mathrm{K}^*, \qquad \frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau L\left(t\right) dt \geqslant L^* \tag{4}$$

где $Y^\tau = \frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau A\left(t\right) f\left(\mathrm{K},\ L\right)\ dt$.

Например, если рассмотрим производства Кобб-Дугласса $f\left(K, L\right) = f_0 \left(\frac{K}{K_0}\right)^\alpha \left(\frac{L}{L_0}\right)^{1-\alpha}$, где $\alpha$-степень использования трудовых ресурсов в процессе производства, $0 < \alpha < 1$, то легко видеть, что если существует пара $(K^{*}, L^{*})$ удовлетворяемых (3), то $\frac{1}{\tau}\int\limits_{0}^{\tau} K\left(t\right)d \leqslant K^{*}$, $frac1\tau\int\limits_{0}^{\tau} L\left(t\right)dt \geqslant L^{*}$, т.е. имеет места неравенства (4).

**Теорема.** Для любой модельного производства типа $Y = Af\left(K, L\right)$ условие (3) является необходимым и достаточным.

Действительно, по определению производственной функции $\frac{df}{dx} > 0,\ \frac{df}{dl} > 0$,

$$\begin{aligned} f^{\tau}\left(k, L^{*}\right) - f^{\tau}\left(k^{*}, L^{*}\right) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{0}^{\tau} A\left(t\right)\left[f\left(K, L^{*}\right) - f\left(k^{*}, L^{*}\right)\right]dt = \\ = \frac{1}{\tau}\int\limits_{0}^{\tau} A\left(t\right)\frac{\partial f}{\partial K}\mid_{K,L}\left(K - K^{*}\right)dt = \frac{1}{\tau}C_0\int_0^{\tau}\left(K - K^{*}\right)dt, \end{aligned} \tag{5}$$

где $C_0 = const > 0$. Отсюда, если выполнены условия (3), то $f^{\tau}\left(K, L^{*}\right) - f^{\tau}\left(K^{*}, L^{*}\right) \leqslant 0$ и $\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} K\left(t\right)dt \leqslant K^{*}$. Аналогично, используя условие $f^{\tau}\left(K^{*}, L^{*}\right) - f^{\tau}\left(K^{*}, L\right) \leqslant 0$, получим $\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} L\left(t\right)dt \geqslant L^{*}$. Доказательство данного неравенства также следует из неравенство (5). Таким образом, необходимым и достаточным условием кризиса модельной экономики являются неравенства(4). Следует отметить, что числа $(K^{*}, L^{*})$ определяются из решения дифференциального уравнения. Для нахождения решения уравнения $\frac{dL}{dt} = \delta L$, мы должны сначала решить уравнения $\int_0^{a_{\max}} B\left(a\right)e^{-\delta a}da = 1$ . В общем случае, если $B\left(a\right) \geq 0$, то это уравнение имеет один максимальный вещественный корень $\delta = \delta_{\max}$ и счетное числа комплексно-сопряженных корней типа $\delta_j = \alpha_j \pm i\beta_j$ , так что имеем: $L_k\left(t\right) = c_k e^{\delta_k t},\ k = 0, 1, 2...$, и следовательно $L\left(t\right) = L_0 e^{\delta_{\max}t} + \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_j e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t,\ 0 \leqslant t \leqslant t_k$, где $C_j$ – коэффициенты Фурье данного разложения. Для законности данного разложения, мы должны рассмотреть класс функции,$B\left(a\right) \geqslant 0$для которых система функции $\{\cos\beta, t\}$является ортонормированной. Числа $\alpha_j$ и $\beta_j$ определим из системы

$$\left\{\begin{array}{l} \int_0^{a_{\max}} \mathrm{B}\left(a\right)e^{-\alpha_j a}\cos\beta_j a da = 1 \\ \int_0^{a_{\max}} \mathrm{B}\left(a\right)e^{\alpha_j a}\sin\beta_j a da = 0 \end{array}\right.$$

$\delta_{\max} = \left\{\begin{array}{l} < 0,\ h = \int_0^{a_{\max}} \mathrm{B}\left(a\right)\ < 1 \\ 0,\ \ \mathrm{h} = 1 \\ > 0, \text{если h} = 1 \end{array}\right.$ Отсюда, легко видеть, что $\cos\beta_j a_{\max} = 0$,т.е$\beta_j = \frac{\pi}{2a_{\max}} i = 0, 1, 2, ....$ и корни $\alpha_j, \delta_{\max}$ удовлетворяемой условиям $\left|\alpha_j\right|\ \leqslant \left|\delta_{\max}\right|$

**Утверждение 1**. Для равномерного закона распределения

$$\mathrm{B}\left(a\right) = \left\{\begin{array}{ll} 0\,,\quad a \leqslant 0 & \\ \frac{1}{a_{\max}}, & 0 < a \leqslant a_{\max} \\ 0,\quad a > a_{\max} & \end{array}\right.$$

имеем: $e^{-\delta\, a_{msx}} = 1 + a_{\max}\delta,\ \ \delta_{\max=0,}$ и следовательно $\alpha_j = 0,\ L\left(t\right) = \sum\limits_{j=1} c_j e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t,\ L^{*} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} L\left(t\right)dt.$

**Утверждение 2.** Пусть $B(a)$ определяется как нормальный закон распределения, т.е $B\left(a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(a - a_0\right)}{2\sigma 2}}$, тогда $\delta_j$ определяются из решения уравнения $F\left(\frac{a_0}{\sigma} - \sigma\delta\right) = e^{\delta a_0 - \frac{\sigma^2\delta^2}{2}}$ где $a_0, \sigma$ параметры, $F\left(a\right)$ – функция распределения нормального закона.

Доказательство. Введём замену $t = \sigma\delta + \frac{a - a_0}{\sigma}$, т.е $a = a_0 - \sigma^2\delta + \sigma t$, и

$$dx = \sigma dt - \delta a_0 + \sigma^2\delta^2 - \sigma\delta t - \frac{(\delta t - \sigma\delta)^2}{2} = -\sigma a_0 + \sigma^2\delta^2 - \delta\sigma t - \frac{t^2}{2} + +t\sigma\delta - \frac{\sigma^2\delta^2}{2} = $$
$$= -\delta\, a_0 + \frac{1}{2}\sigma^2\delta^2 - \frac{t^2}{2}$$

Тогда имеем: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{a_0}{\sigma}+\sigma\delta}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \cdot e^{-\delta\, a_0 + \frac{\sigma^2\delta^2}{2}} = 1$. Отсюда $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\sigma\delta-\frac{a_0}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = e^{\delta a_0 - \frac{\sigma^2\delta^2}{2}}$, что и требовалось доказать. Заметим, что если ввести замену $x = \frac{a_0}{\sigma} - \delta\sigma$ , что получим $f\,(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{a_0^2}{\sigma^2}\right)}, 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $x^2 - \frac{a_0^2}{\sigma^2} \geqslant 0$, $|x| \geqslant \frac{a_0}{\sigma}$, и следовательно $x = \frac{a_0}{\sigma} - \delta\sigma \leqslant -\frac{a_0}{\sigma}$ , $\delta \geqslant \frac{a_0}{\sigma^2}$, $\delta \prec \infty$. Аналогично получим $x = \frac{a_0}{\sigma} - \delta\sigma \geqslant \frac{a_0}{\sigma}$ , $\delta \leqslant 0$, $\delta \succ -\infty$. Таким образом $\delta \geqslant \delta_{\min} = \frac{a_0}{\sigma^2}$, является единственный вещественный корнем уравнения $\int_0^{a_{\max}} B\,(a)e^{-\delta a}da = 1$ в первом и $\delta \leqslant \delta_{\max} = 0$, во втором случаях. Эти значения используются при определения кризисных значений.

**Литература**

1. М. Юнуси. Введение в модельную экономику. –Душанбе,ТНУ, 2001,-97 с.

УДК 519.86

## О моделях сравнениймодельных экологических систем по факторам рождаемости и смертности

Юнуси М.,* Одинаева С.,** Ганиев Ч.***

**(*ДФ НИТУ “МИСиС”)**
**(**КГУ)**
**(***Таджикский национальный университет)**

Рассмотрим задачу сравнения экосистем с учетом возрастного состава и пространственных распределений. Пусть заданы две модельных экосистем.

Первая модельная экосистема имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial a} + \sum\limits_{i=1}^{2} v_i \frac{\partial N}{\partial x_i} = F(N) + \sum\limits_{i=1}^{2} D_i \frac{\partial^2 N}{\partial x_i^2}, \quad x \in G, \quad 0 < a < \infty, \quad 0 < t \leqslant t_k, \\ N(x,a,0) = N_0(x,a), \quad x \in G, \quad 0 \leqslant a < \infty, \\ N(x,0,t) = \int\limits_0^\infty B(N(x,\xi,t))d\xi \quad x \in \overline{G}, \quad 0 \leqslant t < t_k \\ N|_S = 0, \quad \left(\frac{\partial N}{\partial n} - \alpha N|_S = 0\right), \end{cases}$$

а вторая экосистема представляется в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial a} + \sum\limits_{i=1}^{2} v_i \frac{\partial M}{\partial x_i} = F(M) + \sum\limits_{i=1}^{2} D_i \frac{\partial^2 M}{\partial x_i^2}, \quad x \in G, \quad 0 < a < \infty, \quad 0 < t \leqslant t_k, \\ M(x,a,0) = M_0(x,a), \quad x \in G, \quad 0 \leqslant a < \infty, \\ M(x,0,t) = \int\limits_0^\infty B(M(x,\xi,t))d\xi \quad x \in \overline{G}, \quad 0 \leqslant t < t_k \\ M|_S = 0, \quad \left(\frac{\partial M}{\partial n} - \alpha M|_S = 0\right), \end{cases}$$

где

$$N = (N_1, ..., N_m), \quad N_i = N_i(x,a,t), M = (M_1, ..., M_m), \quad M_i = M_i(x,a,t), \quad i = \overline{1,m},$$

$$F=\begin{pmatrix} F_{11}(h) & ... & F_{1m}(h)\\ ... & ... & ...\\ F_{m1}(h) & ... & F_{mm}(h)\end{pmatrix},\quad B_0(a)=\begin{pmatrix} B_{11}(h) & ... & B_{1m}(h)\\ ... & ... & ...\\ B_{m1}(h) & ... & B_{mm}(h)\end{pmatrix},$$
$$h=(N,M)$$

Для сравнения двух экосистем введем функцию $\Delta N = N(x,a,t)-M(x,a,t)$, тогда легко видеть, что эта функция является решением следующей задачи

$$\frac{\partial\Delta N}{\partial t}+\frac{\partial\Delta N}{\partial a}+\sum_{i=1}^{2}v_i\frac{\partial\Delta N}{\partial x_i}=\Delta F(N)+\sum_{i=1}^{2}D_i\frac{\partial^2\Delta N}{\partial x_i^2},\quad x\in G,\quad 0<a<\infty,\quad 0<t<t_k,$$
$$\Delta N\,|_{t=0}=\Delta N^0,\Delta N(x,0,t)=\int_0^\infty\Delta B(N(x,\xi,t))d\xi\quad x\in\overline{G},\quad 0\leqslant t<t_k,$$
$$\Delta N|_S=0,\quad \left(\frac{\partial\Delta N}{\partial n}-\alpha\Delta N|_S=0\right)$$

**Определение сравнения экосистем**. Пусть $h=(h_1,h_2,...,h_h)>0$ вектор означающий разность параметров обоих экосистем, тогда говорят экосистемы сравнимы между собой, если при $h=(h_1,h_2,...,h_h)\to 0$, $\|\Delta N(x,a,t)\|\to 0$.

**Утверждение.** Все реальные экосистемы сравнимы между собой в смысле данного определения!

Легко видеть, что решение последней задачи представляется в виде разложение впервые полученное проф. Юнуси (при любом $m\geqslant I$):

$$\Delta N(x,a,t)=\frac{2}{\sqrt{L_1L_2}}Z(a)\sum_{n_1n_2=1}^{\infty}E^{\lambda}_{n_1n_2}(a)M_{n_1n_2}(t-a)\cdot\sin\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2x_2}{L_2}E_{DV}(x),$$

где

$$Z(a)=\sum_{i=0}^{\infty}Z_i(a),\quad Z_{i+1}(a)=\int_0^a F_0(\xi)Z_i(\xi)d\xi,$$
$$Z_0(a)=1,$$
$$E^{\lambda}_{n_1n_2}(a)=\begin{pmatrix} e^{-\lambda^1_{n_1n_2}a} & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & e^{-\lambda^m_{n_1n_2}a}\end{pmatrix},$$
$$E_{DV}(x)=\begin{pmatrix} e^{\sum_{i=1}^{2}\frac{v_{i1}x_i}{2D_{i1}}} & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & e^{\sum_{i=1}^{2}\frac{v_{im}x_i}{2D_{im}}}\end{pmatrix},$$
$$\tilde{B}(a)=B_0Z(a)E^{\lambda}_{n_1n_2}(a),B_0(a)=\frac{\partial B}{\partial N}\Big|_{N^*},\quad \frac{\partial Z}{\partial a}=F_0(\xi)|\,Z,\quad Z|_{a=0}=I,$$
$$F_0(\xi)=\frac{\partial F}{\partial N}\Big|_{N^*}$$

$M_{n_1n_2}(t)-$ является решением следующего интегрального уравнения типа восстановления

$$M_{n_1n_2}(t)=\int_0^t\tilde{B}(\xi,t)M_{n_1n_2}(t-\xi)d\xi+f(t),$$

$$M_{n_1n_2}(t)=\int_0^\infty B(\xi)M_{n_1n_2}(t-\xi)d\xi.$$

Здесь$B(\xi)=B_0(\xi)Z(\xi)E^{\lambda}_{n_1n_2}(\xi)$ является матрицей выживаемости возрастно-пространственно-распределенных сообществ.Решение интегрального уравнения будем искать в виде

$$M_{n_1n_2}(t)=C\cdot\exp(\delta t),$$

где − неотрицательный вектор, $\delta = const$. Тогда для определения $\delta$ получим уравнение $f(\delta) = \det(I - \int_0^\infty B(\xi)e^{-\delta\xi}d\xi) = 0$,которое эквивалентно уравнениям $f(\delta) = \det(I - \int_0^\infty B(a)e^{-\delta a}da) = 0, \det(I - \overline{B}) = 0$ или $\det\left(I - \frac{\delta}{2}\tilde{\vartheta}_2 + \frac{\delta^2}{3!}\tilde{\vartheta}_3 + \cdots\right) = 0$, где $\overline{B} = \int_0^\infty B(\xi)d\xi, \quad \tilde{\vartheta}_j = (I - \overline{B})^{-1}\vartheta_j, \quad \vartheta_j = \int_0^\infty a^j dB, \quad j = 1, 2, \ldots$

Таким образом, если вещественные части корней характеристического уравнения отрицательны, то при $t \to \infty$ $M_{n_1 n_2} \to 0$ и тогда имеем

$$\Delta N(x, a, t) \rightrightarrows 0, \quad t \to \infty.$$

Следовательно, рассмотренные экологические системы сравнимы.

УДК 536.46

## Скорость волны и максимальная температурапри горении водородо-воздушной смеси газов в инертной пористой среде

Кабилов М.М.[†], Гулбоев Б.Дж.[‡]

**([†]Российско-Таджикский (Славянский) университет, Душанбе)**
**([‡]Таджикский национальный университет)**

Горение смеси газов в инертной пористой среде при фильтрации исходной смеси к зоне горения известно под названием фильтрационное горение газов (ФГГ). ФГГ применяется для утилизации вредных газов, сжигание сверх бедных топлив, а также для радиационного нагрева метала, керамики, стекла, полупроводников. При этом важными характеристиками являются скорость волны и максимальная температура.

Отметим, что для определения скорости волны горения, учёными получены различные соотношения (см. [1]) и проведены многочисленные эксперименты [2]. Полученное нами соотношение в работе [3] в отличие от других включает все коэффициенты диффузии компонентов смеси газов. Это соотношение было получено в результате интегрирования уравнения энергии системы (смеси газов и пористой среды) в случае стационарного неадиабатического распространения волны горения. Чтобы проверить, достоверность результатов расчёта по этому соотношению нами рассмотрена случай симметричности профилей температуры и концентрации компонентов [4], что означает $Le_{eff(i)}u_\phi = 1$, $i = 1 \ldots N$, где $N$ − число компонентов смеси, $Le_{eff(i)} = D_i/\kappa$, $\kappa = \lambda_1/\rho_{10}^0$, $D_i$- коэффициент диффузии $i$-го компонента, $\kappa$ − коэффициент температуропроводности. В данной работе проводится анализ расчётов характеристик волны фильтрационного горения водородо-воздушной смеси в инертной пористой среде. Расчёты заключаются в нахождении скорости волны с помощью программы «Подбор параметра» из полученного соотношения

$$(\upsilon_{10} - U)^2 = \frac{k_0 \exp(-1/\beta)\gamma\lambda_1\Lambda\sqrt{1 + 4\Delta/(1 - u_0/(1+\phi))^2}}{\rho_{10}^0 c_p u_\phi a_4 \eta_{1(k_*)}} \cdot \frac{T_0}{T_e} \cdot \left(1 - \frac{a_4}{\gamma + a_4}\right) - \\ - \frac{(\upsilon_{10} - U)\alpha_0(T_e - T_0)(k_1 - k_2)\sqrt{1 + 4\Delta/(1 - u_0/(1+\phi))^2}}{Q\eta_{1(k_*)}\rho_{10}k_1k_2},$$

где

$$\gamma = \frac{RT_e^2}{E(T_e - T_0)}, \qquad \Lambda = 1 + \frac{\alpha_1\lambda_1}{\alpha_2\lambda_2}, \qquad \Delta = \frac{\alpha_0(\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2)}{U^2(\rho_{10}c_p + \rho_2 c_2)^2}, \qquad u_0 = \frac{\upsilon_{10}}{U},$$

$$T_e - T_0 = \frac{Q\eta_{1(k_*)}}{c_p u_\phi \sqrt{1 + 4\Delta/(1 - u_0/(1+\phi))^2}}, \quad u_\phi = 1 - \frac{\phi}{u_0 - 1}, \quad \phi = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_{10} c_p}, \quad \beta = \frac{RT_e}{E}$$

$$k_1 = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_3}}{2}, \qquad k_2 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_3}}{2},$$

$$a_1 = \frac{\rho_{10}c_p(\upsilon_{10} - U) - \rho_2 c_2 U}{\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2}, \quad a_3 = \frac{\alpha_0}{\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2},$$

$$a_4 = \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\alpha_0(\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2)}{\rho_{10}c_p(\upsilon_{10} - U) - \rho_2 c_2 U}}\right].$$

Здесь $T_0$ – температура пористой среды в холодной границе; $T_e$ – максимальная температура; $U$ – скорость волны горения; $\upsilon_{10}$ – скорость потока газа в порах; $\eta_{1(k_*)}$ – концентрация недостающего компонента газовой смеси; $\rho_{10}$,$C_p$ – приведенная плотность и теплоёмкость смеси газов соответственно; $\rho_2$, $c_2$ – те же величины для пористой среды; $\lambda_1$ , $lambda_2$ – коэффициенты теплопроводности газа и пористой среды; $\alpha_1$, $alpha_2$ – объёмные содержания газа и пористой среды; $\alpha_0$ – коэффициент теплообмена с внешней средой; $Q$ – тепловой эффект реакции; $E$ – энергия активации; $R$ – универсальная газовая постоянная; $k_0$ – предэкспонент.

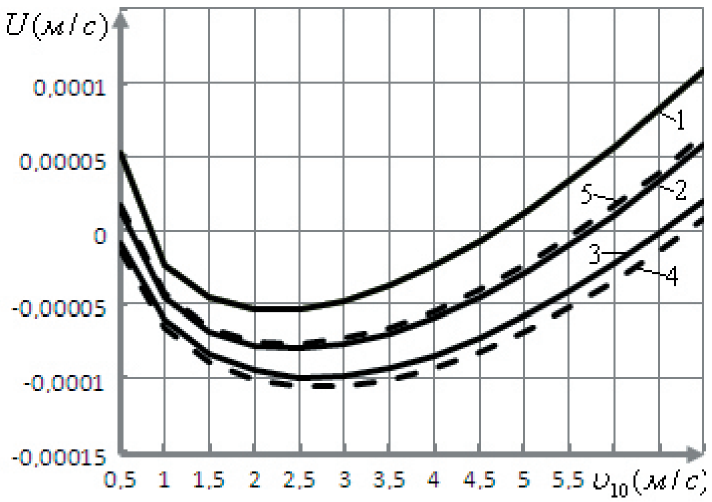



**Рис. 1.** Кривые зависимости скорости волны $U(m/c)$ от скорости вудва $\upsilon_{10}(m/c)$ в случаеводородо - воздушной смеси (65%$H_2$+ воздух) и коэффициента теплоотдачи стенки $\alpha_W$ =180 Вт/(м$^2\cdot$ К) при различных значениях радиуса трубки (сплошные линии): 1 – 0,09 м; 2 – 0,12 м; 3 – 0,15 м; а также при разном значении коэффициента теплоотдачи стенки $\alpha_W$ (пунктирные линии): 4 – 100 Вт/(м$^2\cdot$); 5 – 140 Вт/(м$^2\cdot$ К) и фиксированном радиусе трубки $R_W$ =0,09 м.

На рис. 1 приведены кривые зависимости скорости волны от скорости вдува при 65% водорода в смеси в случае $\alpha_W$ =180Вт/(м$^2\cdot$ К) и различных значениях радиуса трубки (0,09; 0,12; 0,15 м). Заметим, что кривые расположены в четвёртом квадранте плоскости ($\upsilon_{10}$ , $U$) и имеют форму параболы с ветвями направленными вверх, то есть функциональная зависимость $U(\upsilon_{10})$имеет минимума. Это означает, что с увеличением скорости вдува скорость волны на встречу потока увеличивается до максимального значения, а затем падает. Максимальные значения скорости волны достигаются при скоростях вдува 2; 2,5 м/сдля радиусов трубки 0,09 и 0,15 м соответственно. При этом максимальные значения скорости волны соответственно равны -5,4· $10^{-5}$ и -9,9· $10^{-5}$ м/с.С увеличением радиуса трубки, кривые смещаются в вниз, что означает увеличения скорости волны. А это соответствует тому, что по мере уменьшения коэффициента теплоотдачи скорость волны растёт.Пунктирные кривые на рис. 1 выражают зависимости скорости волны от скорости вдува в случае 65% водорода в смеси при разном значении коэффициента теплоотдачи стенки $\alpha_W$ (100, 140 Вт/(м$^2$· К)) и фиксированном значении радиуса трубки $R_W$ =0,09 м ($\alpha_0 = 2\alpha_W/R_W$- коэффициент теплопотерьв окружающее пространство). Видно, что при увеличении коэффициента теплоотдачи стенки скорость волны уменьшается по абсолютной величине (-1,4· $10^{-5}$;-1,09· $10^{-4}$ м/с). Также заметим, что при каждом значении коэффициента теплоотдачи стенки ($\alpha_W$ =100, $\alpha_W$ =140 Вт/(м$^2$· К)) наблюдаются максимальные значения скорости волны -1,1· 10 $^{-4}$, -7,7· $10^{-5}$м/с, соответствующие следующим значениям скорости вдува 3 и 2,5 м/с.

Также было установлено, что в случае уменьшения доли водорода (от 65% до 33%) в смеси при фиксированных значениях коэффициента теплоотдачи стенки (180 Вт/(м$^2$· К)) и радиуса трубки (0.09 м) скорость волны по абсолютной величине увеличивается и изменяется в промежутке (-5,21· 10 $^{-5}$ ; -1,38 · 10 $^{-3}$м/с) в рассматриваемом диапазоне изменения скорости вдува.

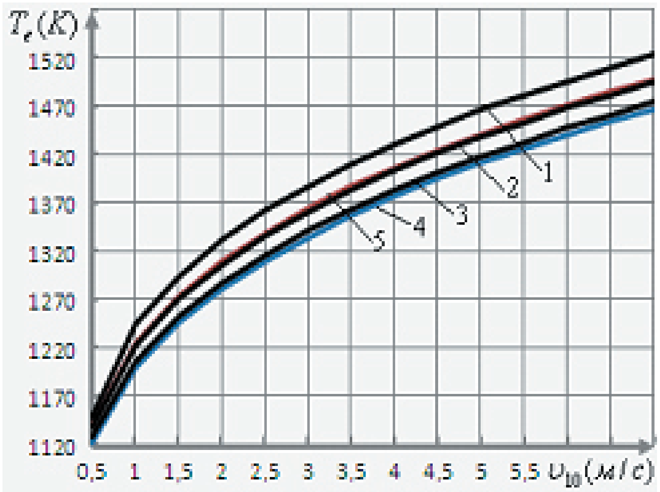



**Рис. 2.** Кривые зависимости максимальной температуры $T_{\max}(K)$ от скорости вдува $\upsilon_{10}(m/c)$ в случаеводородо-воздушной смеси (65%$H_2$+ воздух) и коэффициента теплоотдачи стенки $\alpha_W$ =180 Вт/(м$^2$· К) при различных значениях радиуса трубки: 1 – 0,09 м; 2 – 0,12 м; 3 – 0,15 м; а также при различных значениях коэффициента теплоотдачи стенки $\alpha_W$: 4 – 100 Вт/(м$^2$· К), 5 – 140 Вт/(м$^2$· К) и фиксированном радиусе трубки $R_W$ =0,09 м.

Далее, на рис. 2 приведены кривые зависимости максимальной температуры от скорости вдува в случае 65% водорода в смеси при вышеуказанных двух значениях коэффициента теплоотдачи стенки и трёх радиусах трубки. Заметим, что при увеличении скорости вдува максимальная температура увеличивается. При фиксированном значении коэффициента теплоотдачи стенки $\alpha_W$ =180 Вт/(м$^2$· К) и варьировании радиуса трубки от 0,09 м до 0,15 м максимальная температура изменяется в промежутке (1127 ; 1523 К). При относительно малом значении радиуса трубки (0,09 м) значения максимальной температуры относительно больше. Также увеличения коэффициента теплоотдачи стенки (от 100 до 140 Вт/(м$^2$· К)) приводит к увеличению максимальной температуры.

Полученные расчётысогласуютсяс результатами расчётов приведённых в работе [5], где исследовались зависимости скорости волны от скорости вдува при различных значениях коэффициента теплообмена с окружающейсредой. Отметим, что наши расчёты проводились при тех же значениях параметров, что и в работе [5]. В частности,максимальные значения скорости волны наблюдаются в тех же интервалах скорости вдува от 0,5 до 4 м/с и скорость волны изменяется в тех же порядках ($10^{-5}$– $10^{-4}$м/с). Это даёт нам возможность предполагать достоверностьполученного нами соотношения [3].

## Литература


1. Добрего К.В., Жданок С.А. - Физика фильтрационного горения газов. – Минск: Ин-т тепло- и массообмена им.А.В.Лыкова НАНБ, 2002, 203с.
2. В.С. Бабкин, Ю.М.Лаевский - Фильтрационное горение газов. Физика горения и взрыва, 1987, т.20, №5, с. 27-44.
3. М.М. Кабилов, Б.Дж. Гулбоев - Зависимость скорости волны фильтрационного горения газов от коэффициентов диффузии компонентов смеси газов. Сборник научных статей по итогам международной научно-практической конференции, Санкт-Петербург, 27-28 февраля 2014 года, с. 77-79.
4. Кабилов М.М., ГулбоевБ.Дж. Фильтрационное горение газов при симметричности профилей температуры пористой среды и концентрации компонентов газовой смеси. ДАН РТ, Т.56, №1, 2013, с. 35-43.
5. Потытняков С.И., Лаевский Ю.М., Бабкин В.С. Влияние теплопотерь на распространение стационарных волн при фильтрационном горении газов. Физика горения и взрыва, 1984, т.20, №1, с. 19-26.


УДК 511

# Оид ба баҳодиҳии суммаҳои тригонометрии Дезуйе ва татбиқи он дар ҳалли масъалаҳои аддитивӣ бо ададҳои содда

Бӯриев А. Б.

**(Донишкадаи политехникии Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С. Осимӣ, ш. Хуҷанд)**

Ду пайдарпаии ададҳои натуралии $\{a\,(n)\}$ ва $\{b\,(n)\}$ - ро дида мебароем. Масъалаҳои аддитивии бинарӣ бо ададҳои сода гуфта проблемаеро, ки тасвир намудани адади $n$ ба намуди суммаи $n = a\,(p) + b\,(q)$ , ки дар ин ҷо $p$ ва $q$ ададҳои содда буда $n$ бошад аз қатори ададҳои натуралӣ гирифта шудааст номида мешавад. Мисолҳои классикии чунин масъалаҳо то имрӯз ҳалли худро наёфтаанд. Ба ин мисол шуда метавонад проблемаи дугоникхои содда дар қатори ададҳои ва проблемаи бинарии Гольдбах оиди тасвир намудани ададҳои ҷуфт ба намуди суммаи ду адади содда аст.

Яке, аз самтҳои актуалии тадқиқот бо масъалаҳои бинарӣ бо ададҳои сода ин баҳодиҳии ҳудуди болоии тавоноии маҷмӯи ададҳое, ки бо чунин тарз тасвир карда намешаванд мебошад.

Бо баробари аз тарафи И.М.Виноградов хал намудани проблемаи “тернарӣ”-и Голдбах имконият пайдо шуд, ки доири проблемаи бинарӣ натиҷаҳо ба даст ояд. Натиҷаҳои беҳтарин доири ин проблема ба олимон Чен Джин Рану ва Лю Ян Мин таалукдор мебошад. Соли 1988 онҳо исбот намуданд, ки барои шумораи $T\,(x)$ ададҳои ҷуфти натуралии $n$ - и аз $x$ калон набуда ба намуди суммаи ду адади содда тасвир нашаванда баҳодиҳии зерин ҷой дорад:

$$T\,(x) \ll x^{1-1/20}, \quad (x \to \infty)$$

дар ин маъруза мо оиди ду масъалан аддитиви бо ададхо содда натичахои худро ба намуди ду теоремахои зерин пешниход менамоям ки ин натичахои дар айни замон дорои ахамияти калон дар халли проблемаи бинарии Гольдбах хисобида мешавад.

Теорема 1.

Бигузор $n = a(p) + b(q)$, ки дар инҷо $a(p) = p,\ b(q) = [\alpha q]p$, $q$ ададҳои содда бошад. Он гоҳ

1) Агар $\alpha$ ирратсионалӣ-квадратӣ бошад, он гоҳ ҳангоми $x \to \infty$

$$T_1(x) \ll x^{1-2/9}$$

ҷой дорад.

2)Агар $a$ ададӣ ирратсионалӣ-алгебравӣ бошад, он гоҳ ҳангоми $x \to \infty$ баҳодиҳии

$$T_1(x) \ll_\varepsilon x^{1-2\backslash 9+\varepsilon}$$

барои дилхоҳ ададӣ хурди $\varepsilon > 0$ ҷой дорад, доимии $\alpha$ дар аломати '$\ll_\varepsilon$' эффективӣ намебошад.

Теорема 2.

Бигузор $c > 1$ ададӣ бутун набошад ва $c\gamma = 1$. Он гоҳ барои қимати $T_2(x)$ дар намуди $n = p + [q^c]$ баҳодиҳии

$$T_2(x) \ll_\in x^{1-2\delta+\varepsilon}$$

барои дилхоҳ ададӣ хурди $\varepsilon > 0$ ҷой дорад, барои $\alpha$ бузургии $\delta > 0$ аз шарти

$$\sum_{q \le x} e^{2\pi i a[q^c]} \ll x^{1-\delta}$$

муайян карда мешавад ва $\alpha$ шарти $x^{0.5\gamma-1} \le \alpha \le 1 - x^{0.5\gamma-1}$ қонеъ мегардонад. Доимии $\alpha$ дар аломати '$\ll_\varepsilon$' эффективӣ аст.

**Адабиётҳо**

1. Виноградов И.М.// ДАН.1937.Т.15.В.6/7.С.291-294
2. Карацуба А.А Основы аналитической теории чисел М.: Наука, 1983
3. Буриев К. Об исключительном множестве в проблеме Харди – Литлвуда для нецелых степеней. Математические заметки, 1989, т.46, ВНП. 4, с 127-128
4. Тырина О.В. Средние значения тригонометрических сумм. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1989
5. Буриев К. Аддитивные задачи с простыми числами. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1989

УДК 004.912

## Оиди алгоритми баҳиҷоҷудокунии калимаҳои забони тоҷикӣ

Музафаров Д., Шодиев С.

**(Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи ак. Б. Ғафуров)**

Масъалаи ба тарзи автоматикӣ ҷудо намудани калимаҳои забони тоҷикӣ яке аз масъалаҳои актуалии олами компютерии имрӯза аст. Ба ҳамаи истифодабарандагони компютер, ки бо барномаҳои таҳригари матнӣ сару кор доранд маълум аст, ки то ҳол ягон таъминоти барномавӣ дорои чунин хосият нестанд ва аз як сатр ба сатри дигар кӯчонидани калимаҳо дар бисёр ҳалотҳо ноқулаии муайянро дар назди онҳо мегузорад.

Гарчанде, ки дар [1] яке аз тарзҳои ҳалли масъалаи мазкур тадқиқ шудааст, лекин, бо назардошти соҳаи истифодабариаш, дар гузориши мо ноқулай аст.

Дар мақолаи мазкур алгоритми ба ҳиҷоҳо ҷудо намудани калимаҳои забони тоҷикӣ пешкаш карда шудааст ва татбиқи он дар масъалаи аз сатр ба сатри дигар кӯчонидани калимаҳо оварда шудааст.

Қоидаи умумӣ, ки барои ба ҳиҷо ҷудо намудани калимаҳо дар забони тоҷикӣ истифода мешавад чунин баён карда мешавад: дар ҳолати умумӣ калимаҳо аз рӯи қоидаҳои зерин ба ҳиҷо ҷудо карда мешаванд:

1. Аз охири калима садоноки якум (яъне садоноки охирин) - и калимаро меёбанд;
2. Агар пеш аз садоноки ёфташуда ҳамсадо истода бошад, онгоҳ ҳарфҳои аз ҳамин ҳамсадо сар карда то охир ҳиҷоро ташкил медиҳанд; агар пеш аз садоноки ёфташуда садонок истода бошад ё ягон ҳарф боқӣ набошад, онгоҳ ҳарфҳои аз садоноки ёфташуда сар карда то охир ҳиҷоро ташкил медиҳанд;
3. Ҳиҷои ҷудокардашударо аз калима бурида гирифта мешавад;
4. Агар дар калима ҳарфҳо боқӣ намонда бошанд, онгоҳ ҳиҷоҳои ҳосилшударо аз баръакси бурида гирифтанашон чида, калимаи ба ҳиҷо ҷудокардашударо ҳосил карда мешавад. Дар айни ҳол гузариш ба қадами якум.

Мувофиқи алгоритми дар боло баёншуда мисолҳои ба ҳиҷо ҷудо намудани якчанд калимаҳоро дида мебароем. Масалан, калимаи «забон». Дар қадами якуми алгоритм, дар ҷои 4-ум садоноки охирини калимаро муайян мекунем: забон. Дар қадами дуюм, азбаски пеш аз садоноки ёфташуда ҳамсадо меистад, бо ҳамроҳии он ҳарфҳои боқимондаи тарафи ростро ҳамчун ҳиҷо ҷудо намуда, аз калима мебурем. Дар натиҷа ҳарфҳои боқимондаи калима чунин мегарданд: за. Боз қадами якуми алгоритмро барои ҳарфҳои боқимонда татбиқ намуда, ҳиҷои дигарро ҷудо намуда бурида мегирем. Дар охир ҳиҷоҳои буридагирифташударо аз баръакс навишта ҳосил мекунем: за-бон.

Лекин, алгоритми болоӣ на ҳамавақт ҷавоби дуруст медиҳад. Масалан, ҳангоми ҷудо намудани калимаи «Сайёд» ҷавоби алгоритм «Са-йёд» аст, ки нодуруст аст (бояд «Сай-ёд» бошад).

Барои бартараф намудани ин камбудӣ тақрибан 10000 калимаҳои нодири (беназири) забони тоҷикӣ ҷудо карда шуданд ва бо мувофиқа бо мутахассисони ҳамин соҳа тарзи ба ҳиҷо ҷудокунии ин калимаҳо таҳлил карда шуда, ба алгоритми болоӣ тағйиротҳо дохил карда шуданд.

P.S. Сатри якуми мақолаи мазкур актуалнокӣ ва зарурати ҳалли масъалаи гузошташударо нишон медиҳад.

### Адабиётҳо

1. Усмонов З.Д., Худойбердиев Х.А. О слоговой структуре слов таджикского языка // ДАН РТ, **т. 49**, №6, 2006, С. 489-492.

УДК 044.056

# Оиди татбиқи методҳои математикӣ дар ҳалли муаммои таъмини бехатарии маълумот

Осимова Д.М., Нарзиева Д.

**(Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи ак. Б. Ғафуров)**

Замони мо – замони тараққиёти бовусъати технологияҳои иттилоотӣ ва воридшавии ин технологияҳо ба тамоми соҳаҳои фаъолияти инсонӣ ба ҳисоб меравад. Технологияҳои компютерии ҳозиразамон имкониятҳои зиёди коркарди автоматикии маълумотҳои гуногуни ҳаҷман калонро фароҳам овarданд. Дар ин шароити тараққӣ ёфтани технологияҳои иттилоотӣ ва компютеркунонии умумӣ, муаммои таъмини бехатарии маълумот на танҳо ҳатмӣ мегардад, балки ба яке аз хусусиятҳои системаҳои иттилоотӣ мубаддал мегардад.

Худи сиситемаи компютерӣ ва системаҳои автоматиконидашудаи коркарди маълумот ба сифати объекти асосии ҳифзи маълумот қабул карда мешавад. Дар зери мафҳуми сиситемаи компютерӣ маҷмӯи воситаҳои техникӣ (аппаратӣ) ва барномавӣ дар назар дошта мешавад, ки онҳо имконияти ба таври автоматикӣ ҷамъ овардани маълумот, нигоҳ доштани он, коркарди он ва доду гирифти маълумотро таъмин мекунанд.

Дар зери мафҳуми ҳифзи маълумот дар системаи компютерӣ, маҷмӯи меъёрҳои ҳуқуқию ташкилӣ, воситаҳои техникию барномавӣ ва криптографӣ дар назар дошта мешавад. Предмети ҳифзи маълумот дар системаҳои компютерӣ худи маълумот ба ҳисоб меравад. Маълумот (информатсия) гуфта ҳамаи додашудаҳои ягон объект ё ҳодисаҳои гирду атроф, параметрҳо ва хусусиятҳои онҳоро меноманд.

Дар ҳар давру замон инсоният эҳтиёҷи махфӣ нигоҳ доштани ягон маълумотро дошт. Бо мурури замон зарурияти доду гирифти маълумотҳои махфии ҳарбӣ, давлатӣ ва дипломатӣ пайдо шуд. Ин талабот ҷустуҷӯ намудани роҳҳои ҳалли муаммои ҳифзи маълумот бо ёрии табдидиҳии маълумотро ба миён овард. Ҳоло методҳои табдилдиҳии маълумот яке аз роҳҳои ҳалли муаммои таъмини бехатарии маълумот ба ҳисоб рафта ин муамморо соҳаи криптология меомӯзад.

Термини криптология аз калимаҳои лотинии kryptos – махфӣ ва logos – илм гирифта шудааст.

Дар зери мафҳуми табдилдиҳӣ, чунин шифргузории маълумотро фаҳмидан мумкин аст, ки танҳо шахсе, ки ба ӯ калиди шифр дастрас аст, хондани онро имконият дорад. Яке аз методҳои васеъ истифодашавандаи табдилдиҳии маълумот ин методҳои криптографӣ ба ҳисоб мераванд.

Криптография соҳаест, ки методҳои математикии табдилдиҳии маълумотро ҷустуҷӯ ва кор карда мебарояд. Таърихи криптография бо таърихи пайдоиши забон баробар мебошад. Дар давраи то милодӣ худи хат системаи криптографӣ ба ҳисоб мерафт. Китобҳои муқаддаси Мисри Қадим ва Ҳиндустони Қадим мисоли ин шуда метавонанд. Моҳияти методҳои криптографӣ аз он иборатанд, ки маълумоти тайёр, ки ҳоло ҳифз нашудааст, ки он маълумоти кушод ба ҳисоб меравад, шифронӣ карда шуда ба шифрограмма табдил дода мешавад. Шахсе, ки ба дастрас намудани ин маълумот иҷозат дорад, онро дешифронӣ мекунад, яъне кушода мебарояд ва ба шакли аввалааш табдил медиҳад.

Протсесси дешифронӣ табдилдиҳии баръакси криптограмма мебошад. Дар натиҷаи иҷро намудани ин протсес маълумоти шифршуда дар намуди аввалава барои истифодабаранда фаҳмо пайдо мешавад. Барои бе монеа шифронӣ ва дешифронӣ намудани маълумот мафҳуми калид истифода бурда мешавад. Ба сифати калидҳо он ягон маълумотро истифода бурдан мумкин мебошад.

Криптографияи ҳозиразамон чор қисмҳои зеринро дар бар мегирад:

**1. Криптосистмаҳои симметрӣ**. Ин чунини системаҳое мебошанд, ки ҳам барои шифрронӣ ва ҳам барои дешифрронӣ ҳамон якто калид истифода бурда мешавад. Дар асоси ин калид, ки ба ҳар хоҳишманд дастрас аст, маълумоти шифршуда ба маълумоти аввала табдил дода мешавад.

**2. Криптосистемаҳо бо калиди кушод**. Дар ин гуна системаҳо ду-то калид истифода бурда мешавад: калиди кушода ва калиди махкам, ки онҳо бо формулаҳои матетматикӣ бо ҳам алоқаманд мебошанд. Дар ин гуна системаҳо бо калиди кушод маълумот шифронӣ карда шуда, бо калиди махкам маълумот дешифронӣ карда мешавад. Ин калид танҳо ба шахсе, ки ин маълумотро мегирад, дастрас мебошад.

**3.Имзои электронӣ.** Системаи имзоҳои электронӣ гуфта, табдилдиҳии криптографиеро меноманд, ки ба маълумоти ҳифз карда мешуда ҳамроҳ карда мешавад.

**4.Идоракунӣ бо калидҳо.** Ин чунин системаи коркарди маълумот мебошад, ки вазифаи он аз тартиб додан ва тақсим намудани калидҳо иборат мебошад.

Протсесси ҳифзи криптографии маълумотро ҳам бо воситаи барнома ва ҳам бо воситаҳои техникӣ (аппаратӣ) ба вуҷуд овардан мумкин аст. Дар системаҳои криптографӣ методҳои табдилдиҳӣ бо алгоритмҳои махсус иҷро карда мешаванд. Масалан, барои табдилдиҳии маълумот алгоритмҳои асосии шифронӣ, ба монанди алгоритмҳои ивазкунӣ ё ҷобаҷогузорӣ, алгоритмҳои ҷойивазкунӣ, алгоритмҳои гаммирониро истифода мебаранд. Аз байни ин алгоритмҳо, алгоритмҳое, ки дар асоси табдилдиҳиҳои мураккаби математикӣ сохта шудаанд татбиқи васеи худро ёфтаанд. Яке аз ин гуна алгоритмҳое, ки дар шабакаи INTERNET васеъ истифода бурда мешавад алгоритми шифронии RSA мебошад. Ин алгоритм барои шифронӣ хосиятҳои ададҳои соддаро истифода мебарад.

Алгоритми RSA аз тарафи олимони институти технолгии Масачусетс (ИМА) Роналд Ривест, Ади Шамир ва Леонард Адлеман кор карда баромада шуда, номи ин алгоритм аз ҳарфи аввалаи номҳои созандагони ин алгоритм Rivest-Shamir-Adleman гирифта шудааст. Мувофиқи алгоритми RSA ададҳои соддаи калон интихоб карда шуда ҳосили зарби ин ададҳо ба зарбшавандаҳо ҷудо карда мешавад.Чӣ тавре,ки маълум аст интихоби ададҳои содда мушкил набуда, аммо ба зарбшавандаҳо ҷудо намудани ҳосили зарби ин ададҳо осон нест.

Дар криптосистемаҳои бо калиди кушод функсияҳои яктарафа истифодабурдамешаванд, яъне:

1). Агар x маълум бошад, он гоҳ ёфтани қиматиf(x) нисбатан осон аст.

2). Агар қимати y= f(x) маълум бошад, он гоҳ ёфтани қимати x душвор мебошад.

Алгоритми RSA системаи криптографӣ бо калиди кушод буда, ба факторизатсияи ҳосили зарби ду адади калони содда асос карда шудааст. Барои шифронӣ амали бадараҷабардории адади бо бузургии мутлақ калон истифода бурда мешавад. Барои дешифронӣ ҳисоб кардани фнксияи Эйлер аз ин адади калонро лозим меояд, ки он ба зарбшавандаҳои содда ҷудо намуда тавонистани ададро талаб мекунад. Дар системаи криптографии RSA ҳар як калид аз ду адади бутун иборат мебошад. Ҳар як шахс калиди кушод (publickey) ва калиди махками (privatekey) худашро мустақилона месозад. Калиди кушода ба ҳама дастрас буда, калиди махкам махфӣ нигоҳ дошта мешавад. Калиди кушода ва калиди махкам аз рӯи алгоритми зерин пайдо карда мешаванд:

1). Ададҳои тасодуфии соддаи ва интихоб карда мешаванд

2).Ҳосили зарби n= p*q ёфта мешавад

3).Қимати функсияи Эйлер аз адади n ҳисоб карда мешавад:

$$\varphi(n) = (p-1)(q-1)$$

4). Чунин адади e интихоб карда мешавад, ки он бо қимати функсияи $\varphi(n)$ бо ҳам содда бошанд. Одатан ба сифати қимати e ададҳои соддаи Ферма 17, 257 ё 65537-ро қабул мекунад.

5). Чунин адади d-ро интихоб мекунанд, ки он шарти зеринро қаноат кунад:

$$d * e = mod\varphi(n)$$

Ададие-ро экспонентаи кушода меноманд. Адади d-ро экспонентаи махфӣ меноманд ва он одатан аз рӯи алгоритми Евклид ҳисоб карда мешавад.

6).Ҷуфти (e,n) ба сифати калиди кушодаи RSA эълон карда мешавад

7).Ҷуфти (d,n) ба сифати калиди маҳками RSA қабул карда шуда, он махфӣ нигоҳ дошта мешавад.

Шифронӣ ба таври зерин иҷро карда мешавад:

1). Матни аввала ҳамчун қатори ададӣ a1,a2,..,ak дида баромада мешавад;

2). Аз болои ҳар як адади $a_i$ амали

$$a_i \mod n(i = 1, 2, \ldots, k)$$

иҷро карда мешавад;

3). Пайдар паии ададии $c_1, c_2, \ldots, k$ аз рӯи формулаи

$$c_i \quad = a_i \mod n(i = 1, 2, \ldots, k)$$

ҳосил карда мешавад, ки он криптотекстро ( матни шифршуда) ташкил медиҳад.

Дешифронӣ ба таври зерин иҷро карда мешавад:

1). Пайдарпайии ададии $a_1, a_2, \ldots, k$ аз рӯи формулаи

$$a_i = c_i \mod n(i = 1, 2, \ldots, k)$$

ҳосил карда мешавад;

2). Пайдарпаии ҳосилшудаи $a_1, a_2, \ldots, k$ ба сифати матни аввала қабул карда мешавад.

Солҳои охир методҳои математикии зиёд барои шифронӣ истифода шуда истодаанд. Яке аз ин гуна методҳо ба истифодабарии матритсаи баръакс асос ёфтааст ва он ба таври зерин истифода бурда мешавад:

1). Ба сифати калид матрисаи А-и тартиби се интихоб карда мешавад.

2). Матни барои шифронӣ тайёр, ки онро бо $T_0$ ишора мекунем, интихоб карда мешавад.

3). Эквиваленти ададии матн, ки бо $T_э$ ишора мекунем, ҳосил карда мешавад.

4). Аз эквиваленти ададии матн $T_э$ пайдарпаии векторҳои сеченакаи $b_1, b_2, \ldots b_n$ сохта мешаванд.

5). Матритсаи А-ро ба векторҳои $b_1, b_2, \ldots b_n$ зарб карда векторҳои $c_1, c_2, \ldots, c_n$ –ро ҳосил мекунем.

6). Пайдарпайии ададии компонентҳои векторҳои $b_1, b_2, \ldots b_n$ матни шифршударо ташкил медиҳанд.

7). Матритсаи $A^{-1}$ матритсаи ба $A$ баръаксро ҳисоб мекунем.

8). Матритсаи баръаксро ба векторҳои $c_1, c_2, \ldots, c_n$ зарб намуда векторҳои в $b_1, b_2, \ldots b_n$-ро ҳосил мекунем.

9). Компонентаҳои векторҳои ҳосил шуда эквиваленти ададии матни авваларо ташкил медиҳанд.

Масалан, матни $T_0$ = Я СТУДЕНТ СПЕЦИАЛЬНОСТИ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ –ро бо тарзи дар боло овардашуда шифронӣ ва дешифронӣ мекунем.

1). Матритсаи зеринро ба сифати калиди интихоб мекунем.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2). Эквиваленти ададии онро муайян мекунем:

$$T,33,19,20,21,5,6,15,20,0,19,17,6,24,10,1,13,30,15,16,19,20,10,9,1,27,10,\\ 20,29,10,15,22,16,18,14,1,24,10,10,34$$

3).Аз ин эквиваленти ададии матн векторҳои $b_1,\ldots,b_{13}$ –ро тартиб медиҳем:

$$b_1(33,19,20), b_2(21,5,6), b_3(15,20,0), b_4(19,17,6), b_5(24,10,1), b_6(13,30,15),\\ b_7(16,19,20), b_8(10,9,1), b_9(27,10,20), b_{10}(29,10,15), b_{11}(22,16,18),\\ b_{12}(14,1,24), b_{13}(10,10,34)$$

4). Матритсаи А –ро ба векторҳои $b_1,\ldots,b_{13}$ зарб карда векторҳои $c_1,\ldots,c_{13}$-ро ҳосил мекунем.

$$c_1 = A*b_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 33 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 145 \\ 119 \\ 85 \end{pmatrix};$$

$$c_2 = A*b_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 21 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 35 \\ 47 \end{pmatrix};$$

$$c_3 = A*b_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix};$$

$$c_4 = A*b_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 19 \\ 17 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ 47 \\ 55 \end{pmatrix};$$

$$c_5 = A*b_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 24 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61 \\ 15 \\ 58 \end{pmatrix};$$

$$c_6 = A*b_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 13 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 101 \\ 105 \\ 56 \end{pmatrix};$$

$$c_7 = A*b_7 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 16 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 111 \\ 119 \\ 51 \end{pmatrix};$$

$$c_8 = A*b_8 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 14 \\ 29 \end{pmatrix};$$

$$c_9 = A*b_9 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 27 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 124 \\ 110 \\ 64 \end{pmatrix};$$

$$c_{10} = A*b_{10} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 29 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 113 \\ 85 \\ 68 \end{pmatrix};$$

$$c_{11} = A * b_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 22 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 114 \\ 106 \\ 60 \end{pmatrix};$$

$$c_{12} = A * b_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 101 \\ 121 \\ 29 \end{pmatrix};$$

$$c_{13} = A * b_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 132 \\ 180 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

5). Матритсаи баръаксро ҳисоб мекунем

$$A^{-1} = (-\frac{1}{6}) * \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 10 & -6 & -10 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6). Матритсаи баръаксро ба векторҳои $c_1, \dots c_{13}$ зарб карда векторҳои $b_1, \dots, b_{13}$-ро ҳосил мекунем.

$$b_1 = A^{-1} * c_1 = (-\frac{1}{6}) * \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 10 & -6 & -10 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 145 \\ 119 \\ 85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix};$$

$$b_2 = A^{-1} * c_2 = (-\frac{1}{6}) * \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 10 & -6 & -10 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 65 \\ 35 \\ 47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix};$$

$$b_3 = A^{-1} * c_3 = (-\frac{1}{6}) * \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 10 & -6 & -10 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$b_4 = A^{-1} * c_4 = (-\frac{1}{6}) * \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 10 & -6 & -10 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 73 \\ 47 \\ 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 17 \\ 6 \end{pmatrix};$$

$$b_5 = A^{-1} * c_5 = (-\frac{1}{6}) * \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 10 & -6 & -10 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 61 \\ 15 \\ 58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$b_6 = A^{-1} * c_6 = (-\frac{1}{6}) * \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 10 & -6 & -10 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 101 \\ 105 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix};$$

$$b_7 = A^{-1} *_7 = (-\frac{1}{6}) * \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 10 & -6 & -10 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 111 \\ 119 \\ 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix};$$

$$b_8 = A^{-1} * c_8 = (-\frac{1}{6}) * \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 10 & -6 & -10 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 32 \\ 14 \\ 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$b_9 = A^{-1} * c_9 = (-\frac{1}{6}) * \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 10 & -6 & -10 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 124 \\ 110 \\ 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix};$$

$$b_{10} = A^{-1} * c_{10} = (-\frac{1}{6}) * \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 10 & -6 & -10 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 113 \\ 85 \\ 68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix};$$

$$b_{11} = A^{-1} * c_{11} = (-\frac{1}{6}) * \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 10 & -6 & -10 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 114 \\ 106 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix};$$

$$b_{12} = A^{-1} * c_{12} = (-\frac{1}{6}) * \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 10 & -6 & -10 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 101 \\ 121 \\ 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ 24 \end{pmatrix};$$

$$b_{13} = A^{-1} * c_{13} = (-\frac{1}{6}) * \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 10 & -6 & -10 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 132 \\ 180 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 34 \end{pmatrix}.$$

7). Аз компонентаҳои векторҳои ҳосилшуда эквиваленти ададии матни авваларо пайдо мекунем.

$$T_э = 33, 19, 20, 21, 5, 6, 15, 20, 0, 19, 17, 6, 24, 10, 1, 13, 30, 15, 16, 19, 20, 10, 9, 1, 27,$$
$$10, 20, 29, 10, 15, 22, 16, 18, 14, 1, 24, 10, 10, 34$$

8). Ададҳоро бо ҳарфҳо иваз намуда матни зеринро пайдо мекунем:

$T_0 =$ Я СТУДЕНТ СПЕЦИАЛЬНОСТИ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ

Дар натиҷа матни аввала ҳосил карда шуд.

Ба монанди ин дигар методҳои математикӣ, аз ҷумла бисёраъзогиҳои интерполятсионӣ дар ҳалли муаммои таъмини бехатарии маълумот татбиқи худро ёфта метавонанд. УДК 510.6

## Тадбиқи формулаи гуфторҳои мантиқӣ дар ҳалли масъалаҳои физикӣ

Солеҳов О., Миршоев А.А.

**(Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи ак. Б. Ғафуров)**

Дар мақолаи мазкур тадбиқи мантиқи математикӣ бо истифодабарии забон ва методҳои математикӣ дида баромада шудааст.

Мантиқи математикӣ дар биология, тиб, лингвистика, педагогика психология, иқтисодиёт техника ва соҳаи компютерӣ васеъ истифода бурда шуда истодааст.

Фанни мантиқи математикиро дар омӯзишгоҳҳо бо мафҳуми абстрактӣ маҳдуд накарда, онро дар омӯзиши фанни математикаи мактабӣ ҷорӣ кардан лозим аст, ки он характери амалии ин фанро нишон дода, ба реформаи мактабӣ мувофиқ мебошад.

Дар мақола масъалаи таҳлил ва синтези схемаҳои алоқамандӣ бо ёрии формулаҳои гуфторҳои мантиқӣ дида баромада шудааст.

Схемаи алоқамандӣ – асбоберо, ки аз алоқакуниҳо (контактҳо) ва ноқилҳои алоқакунии душабака ифода мекунад (миқдори шабакаҳо зиёд шуданашон низ мумкин аст). Аниқтараш, мо схемаи алоқамандиеро дида мебароем, ки он қисми таркибии занҷири электрикӣ буда, аз манбаъи $A$ ба истеъмаолкунанда $B$ ҷоришаванда аст (масалан, ба фурӯзонак). Дар байни манбаъ ва истеъмолкунанда калидҳои пайвасткунанда ва ҷудокунандаи занҷир як ё якчанто, ки пай дар пай пайваст шудаанд, иштирок карданашон мумкин аст.

Схемаеро дида мебароем, ки он аз як васл иборат мебошад. Занҷир пайваст мешавад, фақат ва фақат ҳамон вақт, агар васл пайваст бошад.


Расми 1.


Расми 2.

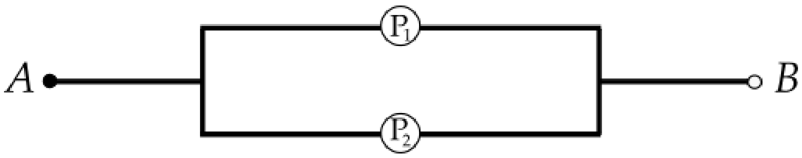
Ба васли $P$ тағйирёбандаи $x$-ро мувофиқ гузошта, ба ду вазъият «пайваст» ва «нопайваст» қиматҳои мувофиқи он 1-рост ва 0-дурӯғро қабул мекунем, он гоҳ формула кори занҷирро чунин ифода мекунад:

| $P$ | $x$ | Занҷир |
|---|---|---|
| Пайваст | 1 | Пайваст |
| Нопайваст | 0 | Нопайваст |

Агар дар байни манбаъ ва истеъмолкунандаи ҷараён ду васлҳои $P_1$ ва $P_2$ ҷойгир кунем (расми 2), ки онҳо пайдарпай пайваст шудаанд, онгоҳ занҷир пайваст аст, агар ҳарду васл пайваст бошанд. Ва нопайваст аст, агар ақалан яке аз онҳо нопайваст бошад. Конъюнксияи тағйирёбандаҳо $x_1$ ва $x_2$, ки васлҳои $P_1$ ва $P_2$ мувофиқ гузошта шудаанд ҳақ аст, агар ҳарду тағйирёбандаҳо қимати 1 ва агар аққалан яке аз онҳо қимати дурӯғро қабул кунад нопайваст, яъне 0. Ҳамин тавр, формулаи $x_1 \wedge x_2$ ба схемаи расми 2 мувофиқ меояд.

Аён аст, ки $x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n$ схемаеро муайян мекунад, ки он бо $n$ васлҳои пайдарпай пайвастшуда мебошад.

Агар васлхои $P_1$ ва $P_2$ параллел пайваст шуда бошанд (расми 3), онгоҳ занҷир пайваста мебошад, агар аққалан яке аз васлҳо пайваст бошад. Ва нопайваст аст, агар ҳардуи онҳо нопайваст бошанд. Ба ин гуна схема формулаи $x_1 \vee x_2$ мувофиқ меояд, ки он ҳақ аст, агар ақалан яке аз тағйирёбандаҳо қимати 1-ро қабул кунад ва дурӯғ, агар ҳарду тағирёбандаҳо қимати 0-ро қабул кунанд.




Расми 3.

Бо осонӣ дидан мумкин аст, ки дизъюнксия $x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n$ схемаи кори занҷири бо $n$ васл параллел пайвастшудаи калидро муайян мекунад.

Калидҳо на ҳама вақт аз ҳамдигар новобастаанд, онҳоро чунин сохтан мумкин аст, ки дар як вақт васлҳо пайваст ва нопайваст бошанд, ё ки яке аз онҳо нопайваст ва дигаре пайваст бошад ва баръакс. Дар мавриди якум васлҳоро идентӣ дар мавриди дуюм инверсӣ меноманд. Васлҳои идентиро якхела ифода мекунанд; васли инверсӣ бо васли $P$–ро бо $\bar{P}$ ишора мекунанд. Агар ба васли $P$ тағйирёбандаи $x$–ро мувофиқ гузорем, аён аст, ки ба васли $\bar{P}$ тағйирёбандаи $\bar{x}$ мувофиқ меояд: агар $x$ қимати 1–ро қабул кунад ( $P$ пайваст), формулаи $\bar{x}$ қимати 0–ро қабул мекунад ($\bar{P}$ нопайваст) ва бараъкс.

Мувофиқгузориҳои ҳосил кардашуда имконият медиҳанд, ки дилхоҳ занҷирҳои пайдарпай ё параллел пайвастро бо формулаҳои гуфторҳои мантиқӣ ифода намоем ва баръакс.

Барои хосиятҳо, имкониятҳо ва хусусиятҳои схемаи алоқамандиро фаҳмидан кифоя аст, ки формулаи ба ин схема мувофиқро дида мебароем.

Мисол: Схемаи зерин додашудааст (ниг. ба расм). Дар ин ҷо ба ҷои $X, Y, Z$ мувофиқан тағйирёбандаҳои $x_1$, $x_2$, $x_3$-ро гузошта формулаи ба схема мувофиқи $F : x_1(x_3 \vee \bar{x}_2) \vee (x_2(x_3 \vee \bar{x}_1)$-ро менависем.

Ҷадвали ҳаққоният барои формулаи додашуда тартиб медиҳем:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $F$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Аз ҷадвал муайян кардан мумкин аст, ки занҷир дар 5 ҳолат пайваст ва дар 3 ҳолат нопайваст аст.

Бо ёрии табдилдиҳӣ формулаи болоиро дар чунин намуд навиштан мумкин аст.

$$x_1(x_3 \vee \bar{x}_2) \vee x_2(x_3 \vee \bar{x}_1) \equiv x_1x_3 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2 \equiv x_3(x_1 \vee x_2) \vee x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2$$

Аз ифодаи ҳосилшуда дидан мумкин аст, ки яке аз васлҳои идентӣ изофа аст.

Дар ин мисол таҳлили схемаи додашударо гузаронида шуда, шартҳои пайваст ё пайваст набудани занҷир муайян карда шуданд. Ин амал имконият медиҳад, ки схемаи додашуда содда карда шавад.

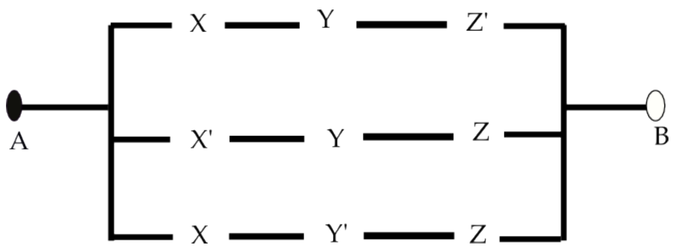
Масъалаеро дида мебароем, ки дар он сохтани занҷир бо се васл талаб карда шудааст ва он танҳо дар вақти ду васл пайваст буданаш пайваст аст.

Формулаҳои $F(x_1, x_2, x_3)$, ки ба схемаи талаб шуда мувофиқат мекунад, қимати 1-ро дар вақти ду тағйирёбанда қимати 1 доштан қабул мекунад.

Шакли нормалии дизъюнктивии мукамал (ШНДМ)-и формулаи $F$-ро менависем:

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3$$

Схемаи ба ин формула мувофиқро месозем (дар ин ҷо ба ҷои $X$, $Y$, $Z$ мувофиқан тағйирёбандаҳои $x_1$, $x_2$, $x_3$ гузошта шудааст):




Дар ин масъала методи умумии сохтани схема аз рӯи хусусиятҳояш – синтези схемаи алоқамандӣ нишон дода шудааст.

## Адабиёт:

1. Игошин И. И., Задачник-практикум по математической логике.-М.: Просвещение, 1986.
2. Лихтарников Л. М., Сукачева Т. Г. Математическая логика. Курс лексии, задачник практикум и решения. – Санкт-Петербург, 1999.
3. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. - М.: Наука, 1976.
4. Николская И. П., Математическая логика. - М.: Наука, 1979.
5. Новиков П.С. Элементы математической логики. – М.: Наука, 1973.
6. Черч А. Введение в математическую логику. - М.: Мир, 1960.

# Именной указатель

**Индекс 20214**

# НОМАИ ДОНИШГОҲ
# УЧЁНЫЕ ЗАПИСКИ

**2014, № 2 (29) қ. 1 – 364 саҳ.**

| | |
|---|---|
| Муҳаррир: | Музафаров Д. |
| Муҳаррири техникӣ: | Файзибоев М. |
| Мусаҳҳеҳ: | Шодиев С. |

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры РТ.
Свидетельство о регистрации №0078/МЧ от 19 марта 2012 г.
Адрес редакции: 735700, Худжанд, ул. Ленина 52. Тел. 6-44-83,
E-mail: uchzap@bk.ru
Полнотекстовая версия журнала размещена на сайте: www.hgu.tj

Маҷалла дар Вазорати фарҳанги ҶТ номнавис шудааст.
Шаҳодатномаи №0078/МҶ аз 19 марти соли 2012
Суроғаи идора: 735700, Хуҷанд, кӯчаи Ленин 52. Тел. 6-44-83,
E-mail: uchzap@bk.ru
Матни комили маҷалла дар сомонаи www.hgu.tj ҷойгузин аст.

Ба чопаш 16.06.2014 имзо шуд. Супориши рақами №73
Ҳуруфи навъи Computer Modern Super. Қоғази №1. Чопи офсет.
Андозааш 60×84/8. Ҷшч 45,5. Теъдод 100

Подписано в печать 16.06.2014. Заказ №73
Гарнитура Computer Modern Super.
Бумага офсетная №1. Печать офсетная. Формат 60×84/8.
Усл. печ. л. 44,5. Тираж 100

***

Матбааи «Меъроҷ»,
735700, ш. Хуҷанд, кӯчаи 50-солагии СССР,
Маркази савдои «Ориёнфар»