

Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых функциональных классов

СЕРГЕЙ Б. ВАКАРЧУК, МИРГАНД Ш. ШАВОЗОВ,
ВАЛЕНТИНА И. ЗАБУТНАЯ

(Представлена Р. М. Тригубом)

Аннотация. Для предложенной К. И. Руновским усредненной характеристики гладкости функций рассмотрены её основные свойства и получены точные неравенства типа Джексона. Точные значения некоторых n -поперечников вычислены для классов дифференцируемых функций, определенных при помощи указанной характеристики гладкости, и мажорант, удовлетворяющих определенным требованиям.

2010 MSC. 41A10, 41A17, 41A44, 42A10.

Ключевые слова и фразы. Наилучшее полиномиальное приближение, усредненная характеристика гладкости функции, неравенство типа Джексона, поперечник, мажоранта, коэффициенты Фурье.

1. Пусть $L_2 = L_2([0, 2\pi])$ — пространство измеримых по Лебегу 2π -периодических функций, у которых норма

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} < \infty.$$

Через \mathcal{T}_{n-1} обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка $n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$). Для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(kx + \gamma_k), \quad (1)$$

Статья поступила в редакцию 14.10.2013

где равенство понимается в смысле сходимости в пространстве L_2 , величина ее наилучшего приближения элементами подпространства \mathcal{T}_{n-1} равна

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f) &:= \inf\{\|f - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}\} = \|f - S_{n-1}(f)\| \\ &= \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь

$$S_{n-1}(f, x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k \cos(kx + \gamma_k)$$

есть частная сумма $(n-1)$ -го порядка ряда Фурье (1) функции f . Под $\omega_m(f, t)$ ($m \in \mathbb{N}$; $t \geq 0$) понимаем модуль непрерывности m -го порядка функции $f \in L_2$, т.е.

$$\omega_m(f, t) := \sup\{\|\Delta_h^m f\| : |h| \leq t\},$$

где

$$\Delta_h^m f(x) := \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x + jh)$$

есть конечная разность m -го порядка функции f в точке x с шагом h . Через L_2^r ($r \in \mathbb{N}$) обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$ -го порядка абсолютно непрерывны, а производные r -го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству L_2 .

Среди экстремальных задач теории аппроксимации функций одной из важных является задача вычисления точных констант в неравенствах Джексона

$$E_{n-1}(f) \leq \chi n^{-r} \omega_m(f^{(r)}, \tau/n) \quad (r \in \mathbb{Z}_+; n, m \in \mathbb{N}; \tau > 0)$$

на классах L_2^r ($L_2^0 \equiv L_2$), где χ — константа. Эту задачу в разное время исследовали Н. И. Черных, Л. В. Тайков, А. А. Лигун, В. А. Юдин, В. И. Иванов и О. И. Смирнов, А. Г. Бабенко и другие (см., например, [1–15]).

В работе [5] А. А. Лигун рассмотрел следующую экстремальную характеристику (всюду далее отношение $0/0$ полагаем равным 0):

$$\sup \left\{ \frac{E_{n-1}^2(f)}{\int_0^h \omega_m^2(f^{(r)}, t) \varphi(t) dt} : f \in L_2^r, f \neq \text{const} \right\},$$

где $m, n \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $0 < h \leq \pi/n$; неотрицательная функция φ измерима, суммируема на отрезке $[0, h]$ и не эквивалентна нулю. В частности, было показано, что имеет место двойное неравенство

$$\frac{1}{B_{n,h}^{r,m}(\varphi)} \leq \sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_{n-1}^2(f)}{\int_0^h \omega_m^2(f^{(r)}, t) \varphi(t) dt} \leq \frac{1}{\inf_{n \leq k < \infty} B_{k,h}^{r,m}(\varphi)},$$

где

$$B_{k,h}^{r,m}(\varphi) := 2^m k^{2r} \int_0^h (1 - \cos kt)^m \varphi(t) dt.$$

С целью обобщения указанного результата М. Ш. Шабозов и Г. А. Юсупов [12] рассмотрели экстремальную характеристику:

$$\chi_{m,n,r,p,s}(\varphi; h) := \sup \left\{ \frac{E_{n-1}(f)}{(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t) \varphi(t) dt)^s} : f \in L_2^r, f \neq \text{const} \right\}, \quad (3)$$

где $m, n \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; p, s — положительные числа; $0 < h \leq \pi/n$, а функция φ удовлетворяет требованиям, сформулированным выше в двойном неравенстве, полученном А. А. Лигуном. В [12] была показана справедливость соотношения

$$\left\{ \mathcal{A}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1} \leq \chi_{m,n,r,p,1/p}(\varphi, h) \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} \mathcal{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1}, \quad (4)$$

где $0 < p \leq 2$; $0 < h \leq \pi/n$ и

$$\mathcal{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) := 2^{m/2} \left(k^{rp} \int_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p}.$$

2. При решении некоторых экстремальных задач теории аппроксимации функций в L_2 вместо модуля непрерывности m -го порядка С. Б. Вакарчуком, В. И. Забутной и М. Ш. Шабозовым использовалась следующая усредненная характеристика гладкости [13–15]:

$$\Omega_m(f, t) := \left\{ \frac{1}{t^m} \int_0^t \cdots \int_0^t \|\Delta_{\frac{t}{h}}^m f\|^2 dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/2}, \quad (5)$$

где $t > 0$; $\bar{h} := (h_1, \dots, h_m)$; $\Delta_{\bar{h}}^m := \Delta_{h_1}^1 \circ \Delta_{h_2}^1 \circ \dots \circ \Delta_{h_m}^1$; $\Delta_{h_j}^1 f(x) := f(x + h_j) - f(x)$, $j = \overline{1, m}$. Напомним, что в ходе исследования важных вопросов конструктивной теории функций в метрическом пространстве L_p ($0 < p < 1$) подобного рода усредненная характеристика гладкости функций рассматривалась К. В. Руновским [16, 17] и Э. А. Стороженко, В. Кротовым, П. Освальдом [18].

Заметим, что усредненные модули непрерывности иного вида ранее изучались Р. М. Тригубом (см., например, [19, 20]) в пространствах L_p ($p \geq 1$) и была показана их слабая эквивалентность обычным модулям непрерывности.

Далее отметим свойства $\Omega_m(f)$, поскольку они, по нашему мнению, представляют определенный интерес.

1. $\lim_{t \rightarrow 0} \Omega_m(f, t) = 0$.

Действительно, поскольку норма $\|\Delta_{\bar{h}}^m\|$ является непрерывной функцией от h_1, \dots, h_m , то данное свойство вытекает из теоремы о среднем для кратного интеграла:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Omega_m(f, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \|\Delta_{h_1(t)}^1 \circ \Delta_{h_2(t)}^1 \circ \dots \circ \Delta_{h_m(t)}^1 f\| = 0,$$

где $0 < h_j(t) \leq t$ ($j = \overline{1, m}$) — значения, зависящие от t .

2. Функция $\Omega_m(f, t)$ непрерывна при $t > 0$.

3. $\Omega_m(f, t) \leq 2^m \|f\|$.

Данное свойство можно показать, используя метод математической индукции.

4. $\Omega_m(f_1 + f_2, t) \leq 2(\Omega_m(f_1, t) + \Omega_m(f_2, t))$.

Действительно, поскольку $\Delta_{\bar{h}}^m(f_1 + f_2) = \Delta_{\bar{h}}^m f_1 + \Delta_{\bar{h}}^m f_2$, то $\|\Delta_{\bar{h}}^m(f_1 + f_2)\|^2 \leq 2 \left(\|\Delta_{\bar{h}}^m f_1\|^2 + \|\Delta_{\bar{h}}^m f_2\|^2 \right)$. Используя формулу (5), получаем требуемое неравенство.

5. $\Omega_m(f, nt) \leq n^m \Omega_m(f, t)$ ($n \in \mathbb{N}$).

Докажем это свойство. Поскольку

$$\begin{aligned} \Omega_m(f, nt) &= \left\{ \frac{1}{(nt)^m} \int_0^{nt} \dots \int_0^{nt} \|\Delta_{\bar{h}}^m f\|^2 dh_1 \dots dh_m \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \frac{1}{t^m} \int_0^t \dots \int_0^t \|\Delta_{n\bar{h}}^m f\|^2 dh_1 \dots dh_m \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

где $n\bar{h} := (nh_1, \dots, nh_m)$, то теперь необходимо показать справедливость неравенства $\|\Delta_{n\bar{h}}^m f\| \leq n^m \|\Delta_{\bar{h}}^m f\|$ и далее воспользоваться соотношением (5). Применим метод математической индукции для доказательства указанного неравенства. При $m = 1$ и $m = 2$ имеем соответственно

$$\Delta_{nh_1}^1 f(x) = \sum_{i_1=0}^{n-1} \Delta_{h_1}^1 f(x + i_1 h_1),$$

$$\begin{aligned} \Delta_{nh_2}^1 \circ \Delta_{nh_1}^1 f(x) &= \Delta_{nh_2}^1 \circ \left(\sum_{i_1=0}^{n-1} \Delta_{h_1}^1 f(x + i_1 h_1) \right) \\ &= \sum_{i_1=0}^{n-1} \Delta_{nh_2}^1 \circ \Delta_{h_1}^1 f(x + i_1 h_1) \\ &= \sum_{i_2=0}^{n-1} \sum_{i_1=0}^{n-1} \Delta_{h_2}^1 \circ \Delta_{h_1}^1 f(x + i_1 h_1 + i_2 h_2). \end{aligned}$$

Следовательно, $\|\Delta_{nh_1}^1 f\| \leq n \|\Delta_{h_1}^1 f\|$, $\|\Delta_{nh_2}^1 \circ \Delta_{nh_1}^1 f\| \leq n^2 \|\Delta_{h_2}^1 \circ \Delta_{h_1}^1 f\|$.

Пусть при $m = k$, где $k \in \mathbb{N}$; $k \geq 2$, справедливо неравенство

$$\|\Delta_{nh_k}^1 \circ \Delta_{nh_{k-1}}^1 \circ \dots \circ \Delta_{nh_1}^1 f\| \leq n^k \|\Delta_{h_k}^1 \circ \Delta_{h_{k-1}}^1 \circ \dots \circ \Delta_{h_1}^1 f\|.$$

Тогда для $m = k + 1$ получаем

$$\begin{aligned} \|\Delta_{nh_{k+1}}^1 \circ \Delta_{nh_k}^1 \circ \dots \circ \Delta_{nh_1}^1 f\| &\leq n \|\Delta_{h_{k+1}}^1 \circ (\Delta_{nh_k}^1 \circ \dots \circ \Delta_{nh_1}^1 f)\| \\ &= n \|\Delta_{nh_k}^1 \circ \dots \circ \Delta_{nh_1}^1 \circ (\Delta_{h_{k+1}}^1 f)\| \leq n^{k+1} \|\Delta_{h_k}^1 \circ \dots \circ \Delta_{h_1}^1 \circ \Delta_{h_{k+1}}^1 f\| \\ &= n^{k+1} \|\Delta_{h_{k+1}}^1 \circ \Delta_{h_k}^1 \circ \dots \circ \Delta_{h_1}^1 f\|, \end{aligned}$$

т.е. $\|\Delta_{n\bar{h}}^m f\| \leq n^m \|\Delta_{\bar{h}}^m f\|$.

6. $\tilde{C}_m \Omega_m(f, t) \leq \omega_m(f, t) \leq C_m^* \Omega_m(f, t)$, где \tilde{C}_m и C_m^* — некоторые постоянные, не зависящие от t и $f \in L_2$.

Отметим, что для пространства L_p ($0 < p < 1$) данное свойство было получено К. В. Руновским [16]. Используя некоторые соображения из [16, 17], покажем его справедливость и в рассматриваемом случае. Получим вначале второе неравенство. Из [17] следует соотношение $\omega_1(f, t) \leq C \Omega_1(f, t)$, где C — константа, не зависящая от функции f и переменной t . Используя определение модуля непрерывности первого порядка и формулу (5), отсюда получаем

$$\|\Delta_\tau^1 f\|^2 \leq C^2 \frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_h^1 f\|^2 dh,$$

где $|\tau| \leq t$. На основании данного неравенства для любого $\tau \in [-t, t]$ имеем

$$\begin{aligned} \|\Delta_\tau^2 f\|^2 &= \|\Delta_\tau^1 \circ \Delta_\tau^1 f\|^2 \leq \frac{C^2}{t} \int_0^t \|\Delta_{h_1}^1 \circ \Delta_\tau^1 f\|^2 dh_1 \\ &= \frac{C^2}{t} \int_0^t \|\Delta_\tau^1 \circ \Delta_{h_1}^1 f\|^2 dh_1 \leq \frac{C^4}{t^2} \int_0^t \int_0^t \|\Delta_{h_2}^1 \circ \Delta_{h_1}^1 f\|^2 dh_1 dh_2. \end{aligned}$$

Следовательно, $\omega_2(f, t) \leq C_2^* \Omega_2(f, t)$, где $C_2^* := C^2$. Продолжая последовательно указанным образом описанный процесс, получаем неравенство $\omega_m(f, t) \leq C_m^* \Omega_m(f, t)$, где $C_m^* := C^m$. Поскольку получение оценки сверху величины $\Omega_m(f, t)$ через $\omega_m(f, t)$ основано на идее доказательства соответствующего факта для случая $0 < p < 1$ в теореме 3.1 из работы К. В. Руновского [16], то по понятным причинам оно не приводится.

7. Функция $\Omega_m(f)$ является почти возрастающей, т.е. существует константа C , не зависящая от f и t , такая, что для любых $0 < t_1 < t_2$ имеет место неравенство $\Omega_m(f, t_1) \leq C \Omega_m(f, t_2)$.

Действительно, используя свойство 6 и полагая $C := C_m^*/\tilde{C}_m$, имеем

$$\Omega_m(f, t_1) \leq \frac{1}{\tilde{C}_m} \omega_m(f, t_1) \leq \frac{1}{\tilde{C}_m} \omega_m(f, t_2) \leq C \Omega_m(f, t_2).$$

3. С нашей точки зрения, по аналогии с (3), определенный интерес представляет изучение экстремальной характеристики

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p,s}(\varphi; h) := \sup \left\{ \frac{E_{n-1}(f)}{(\int_0^h \Omega_m^p(f(r), t) \varphi(t) dt)^s} : f \in L_2^r, f \neq \text{const} \right\}, \quad (6)$$

где $m, n \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $p, s \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$; $0 < h \leq \pi/n$; φ — неотрицательная измеримая суммируемая на $[0, h]$ функция, не эквивалентная нулю. Следующая теорема является своеобразным распространением результата (4) на экстремальную характеристику (6).

Обозначим $\text{sinc } t := \sin(t)/t$ ($t \neq 0$), доопределив данную функцию значением 1 в точке $t = 0$, т.е. $\text{sinc } 0 := 1$.

Теорема 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$; $0 < p \leq 2$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $0 < h \leq \pi/n$; φ — неотрицательная, измеримая, суммируемая на отрезке $[0, h]$ функция, не эквивалентная нулю. Тогда справедливо равенство

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi; h) = \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} \mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1}, \tag{7}$$

где

$$\mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) := 2^{m/2} \left\{ k^{rp} \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} kt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right\}^{1/p}.$$

Доказательство. Пусть $f \in L_2^r$, $f \not\equiv \operatorname{const}$. Поскольку $f^{(r)} \in L_2$, то в смысле сходимости в L_2

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^r c_k \exp(ikx), \tag{8}$$

где c_k — коэффициенты ряда Фурье функции f , записанного в комплексной форме.

Используя равенство (8), запишем

$$\Delta_h^m f^{(r)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^r \prod_{\nu=1}^m (\exp(ikh_\nu) - 1) c_k \exp(ikx).$$

Применяя равенство Парсеваля, имеем

$$\|\Delta_h^m f^{(r)}\|^2 = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \prod_{\nu=1}^m (1 - \cos kh_\nu) \rho_k^2. \tag{9}$$

Подставляя (9) в формулу (5), получаем

$$\Omega_m^2(f^{(r)}, t) = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 (1 - \operatorname{sinc} kt)^m \geq 2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 (1 - \operatorname{sinc} kt)^m. \tag{10}$$

Воспользуемся далее одним вариантом неравенства Минковского, приведенным в монографии А. Пинкуса [21, с. 109]:

$$\left\{ \int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |\tilde{f}_k(t)|^2 \right)^{p/2} dt \right\}^{1/p} \geq \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_0^h |\tilde{f}_k(t)|^p dt \right)^{2/p} \right\}^{1/2} \tag{11}$$

($0 < p \leq 2$).

Полагая $\tilde{f}_k := f_k \varphi^{1/p}$, из (11) получаем

$$\left\{ \int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2 \right)^{p/2} \varphi(t) dt \right\}^{1/p} \geq \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_0^h |f_k(t)|^p \varphi(t) dt \right)^{2/p} \right\}^{1/2} \quad (0 < p \leq 2). \quad (12)$$

Возводя обе части неравенства (10) в степень $p/2$, умножая их на функцию φ , интегрируя по переменной t в пределах от 0 до h и применяя соотношение (12), с учетом формулы (2) имеем

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t) \varphi(t) dt \right\}^{1/p} \\ & \geq 2^{m/2} \left\{ \int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 (1 - \operatorname{sinc} kt)^m \right)^{p/2} \varphi(t) dt \right\}^{1/p} \\ & \geq 2^{m/2} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \left(k^{pr} \rho_k^p \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} kt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{2/p} \right\}^{1/2} \\ & = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \left(\mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \right)^2 \right\}^{1/2} \geq E_{n-1}(f) \inf_{n \leq k < \infty} \mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi). \quad (13) \end{aligned}$$

Из неравенства (13) следует оценка сверху экстремальной характеристики (6)

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi, h) \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} \mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1}. \quad (14)$$

Перейдем к получению оценки снизу экстремальной характеристики (6), где $s = 1/p$. Можно показать, что числовая последовательность $\{\mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)\}_{k \in \mathbb{N}, k \geq n}$ ограничена снизу положительным числом, т.е. она имеет отличную от нуля точную нижнюю границу. Рассмотрим функцию $f_k(x) = \sin kx$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq n$), принадлежащую классу L_2^r . Поскольку $E_{n-1}(f_k) = 1$ и $\Omega_m(f_k^{(r)}, t) = k^r \{2(1 - \operatorname{sinc} kt)\}^{m/2}$, то

$$\begin{aligned} \frac{E_{n-1}(f_k)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f_k^{(r)}, t) \varphi(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}} & \geq 2^{-m/2} n^{-r} \left\{ \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} kt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right\}^{-\frac{1}{p}} \\ & = \left\{ \mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi, h) \geq \left\{ \mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1}$$

для любого натурального числа $k \geq n$. Отсюда, учитывая определение и свойства точных верхней и нижней границ числового множества, получаем

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi, h) \geq \sup_{n \leq k < \infty} \left\{ \mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1} = \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} \mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1}. \quad (15)$$

Сопоставляя неравенства (14) и (15), получаем требуемое равенство (7). Теорема 1 доказана. \square

4. Рассмотрим следствия, вытекающие из теоремы 1.

Следствие 1. Пусть $0 < h \leq 3\pi/(4n)$ и выполнены все требования теоремы 1. Тогда имеет место следующее равенство

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi, h) = \left\{ \mathcal{B}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1}. \quad (16)$$

Доказательство. В силу поведения функции $g(t) := \operatorname{sinc} t$ (см., например, [22, с. 129, 132]), для любого $x \geq 1$ и $0 < y \leq 3\pi/4$ имеем $g(y) \geq g(xy)$. Тогда справедливо неравенство

$$x^\gamma (1 - g(xy))^\alpha \geq (1 - g(y))^\alpha, \quad (17)$$

где γ и α — произвольные положительные числа. Пусть $x = k/n$ ($k, n \in \mathbb{N}$; $k \geq n$); $y = nt$ ($0 < t \leq h$); $\gamma = rp$; $\alpha = mp/2$. Тогда из (17) получаем

$$k^{rp} (1 - \operatorname{sinc} kt)^{mp/2} \geq n^{rp} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2}. \quad (18)$$

Умножая обе части неравенства (18) на функцию φ , интегрируя полученное соотношение по переменной t в пределах от 0 до h , возводя обе части полученного таким образом неравенства в степень $1/p$ и умножая их на число $2^{m/2}$, имеем

$$\mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \geq \mathcal{B}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi) \quad (k \geq n).$$

С учетом данного соотношения из формулы (7) получаем требуемое равенство (16), чем и завершаем доказательство следствия 1. \square

Полагая в формуле (16) $p = 2$ и $\varphi \equiv 1$, имеем один из результатов, приведенных в работе [15]:

$$\sup \left\{ \frac{n^{r-1/2} E_{n-1}(f)}{\int_0^h \Omega_m^2(f^{(r)}, t) dt} : f \in L_2^r, f \neq \text{const} \right\} = \left\{ 2^m \int_0^{nh} (1 - \text{sinc } t)^m dt \right\}^{-1/2}.$$

Введем обозначение $Si(\tau) := \int_0^\tau \text{sinc } t dt$ — интегральный синус — и доопределим функцию $\Omega_m(t)$ в точке $t = 0$, полагая $\Omega_m(f, 0) = 0$, где $f \in L_2$.

Следствие 2. Пусть $0 < \tau \leq 3\pi/4$; $m, n \in \mathbb{N}$; $\beta(\tau) := (Si(\tau) - \sin \tau)/(\tau - \sin \tau)$; $\eta(p) := (1 + mp/2)^{1/p}$. Если при некотором фиксированном значении $p \in (0, 2]$ для элемента $f \in L_2^r$ ($r \in \mathbb{Z}_+$) функция $\Omega_m^p(f^{(r)})$ является выпуклой вверх на сегменте $[0, 3\pi/(4n)]$, то величина наилучшего полиномиального приближения функции f удовлетворяет неравенству

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{\eta(p)}{n^r} (2(1 - \text{sinc } \tau))^{-m/2} \Omega_m(f^{(r)}, \tau\beta(\tau)/n).$$

Если же функция $\Omega_m^p(f^{(r)})$ при любом значении p из отрезка $[p_*, p^*] \subset (0, 2]$ выпуклая вверх на сегменте $[0, 3\pi/(4n)]$, то

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{\eta(p^*)}{n^r} (2(1 - \text{sinc } \tau))^{-m/2} \Omega_m(f^{(r)}, \tau\beta(\tau)/n).$$

Доказательство. Используя следствие 1, для функции $f \in L_2^r$ запишем неравенство

$$E_{n-1}(f) \leq 2^{-m/2} n^r \left\{ \frac{\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t) \varphi(t) dt}{\int_0^h (1 - \text{sinc } nt)^{mp/2} \varphi(t) dt} \right\}^{1/p}. \quad (19)$$

Обозначая $\sigma(t) = -\text{sinc } nt$, где $0 < t \leq 3\pi/(4n)$, и полагая $\varphi(t) = d\sigma(t)/dt$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^h (1 - \text{sinc } nt)^{mp/2} \sigma'(t) dt &= \int_0^h (1 - \text{sinc } nt)^{mp/2} d(1 - \text{sinc } nt) \\ &= \left(\frac{mp}{2} + 1 \right)^{-1} (1 - \text{sinc } nh)^{mp/2+1}. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся неравенством Йенсена, которое сформулируем в необходимом нам виде (см., например, [23, с. 288]):

Пусть \mathfrak{L} — непрерывная, выпуклая вверх функция, заданная на полуоси \mathbb{R}_+ . Если функции ψ и q определены на отрезке $[a, b]$ и при этом ψ измерима и почти везде конечна, q неотрицательна, q и $\psi \cdot q$ суммируемы и $\int_a^b q(t) dt > 0$, то справедливо неравенство

$$\frac{\int_a^b \mathfrak{L}(\psi(t))q(t) dt}{\int_a^b q(t) dt} \leq \mathfrak{L} \left(\frac{\int_a^b \psi(t)q(t) dt}{\int_a^b q(t) dt} \right).$$

Поскольку, по условию, $\Omega_m^p(f^{(r)})$ — выпуклая вверх на отрезке $[0, 3\pi/(4n)]$ функция, то, полагая в последней формуле $\mathfrak{L} = \Omega_m^p(f^{(r)})$, $q = \varphi$, $\psi = t$, $a = 0$, $b = h$, где $0 < h \leq 3\pi/(4n)$, получаем

$$\frac{\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)\varphi(t) dt}{\int_0^h \varphi(t) dt} \leq \Omega_m^p \left(f^{(r)}; \frac{\int_0^h t\varphi(t) dt}{\int_0^h \varphi(t) dt} \right).$$

Учитывая указанный выше вид функции $\varphi = \sigma'$, из данного неравенства имеем

$$\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)\sigma'(t) dt \leq (1 - \text{sinc } nh) \Omega_m^p \left(f^{(r)}; \frac{h(\text{Si}(nh) - \sin(nh))}{nh - \sin(nh)} \right).$$

Из последнего неравенства и соотношения (19), в которых полагаем $h = \tau/n$, следует оценка сверху величины наилучшего полиномиального приближения функции f , которая в силу введенных ранее обозначений запишется в виде

$$E_{n-1}(f) \leq \eta(p) n^{-r} (2(1 - \text{sinc } \tau))^{-m/2} \Omega_m(f^{(r)}; \tau\beta(\tau)/n).$$

Пусть теперь функция $\Omega_m^p(f^{(r)})$ является выпуклой вверх при любом $p \in [p_*, p^*] \subset (0, 2]$. Поскольку в последнем неравенстве от p зависит лишь величина η , которая, как нетрудно убедиться, принимает минимальное значение при $p = p^*$, то при оценке величины $E_{n-1}(f)$ сверху вместо числового значения $\eta(p)$ используем $\eta(p^*)$. Следствие 2 доказано. \square

Запишем значение величины $\mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)$ при $h = a/n$ ($0 < a \leq \pi$) и $\varphi(t) = q(nt)$, т.е.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) &= 2^{m/2} \left\{ k^{rp} \int_0^{a/n} (1 - \operatorname{sinc} kt)^{mp/2} q(nt) dt \right\}^{1/p} \\ &= 2^{m/2} n^{r-1/p} \left\{ \left(\frac{k}{n} \right)^{rp} \int_0^a (1 - \operatorname{sinc} (kt/n))^{mp/2} q(t) dt \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем неравенство

$$\inf_{n \leq k < \infty} \mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \geq 2^{m/2} n^{r-1/p} \inf_{x \geq 1} \left\{ x^{rp} \int_0^a (1 - \operatorname{sinc} xt)^{mp/2} q(t) dt \right\}^{1/p}.$$

В силу теоремы 1 и рассуждений, подобных проведенным в работе [5, с. 788–789], получаем следующий результат.

Следствие 3. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $0 < p \leq 2$; q — неотрицательная, измеримая, суммируемая на отрезке $[0, a]$ ($0 < a \leq \pi$) функция, не эквивалентная нулю. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \left\{ \Phi_{m,r,p}(a, q, 1) \right\}^{-1/p} &\leq \sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)}{\left\{ \int_0^a \Omega_m^p(f^{(r)}, t/n) q(t) dt \right\}^{1/p}} \\ &\leq \left\{ \inf_{x \geq 1} \Phi_{m,r,p}(a, q, x) \right\}^{-1/p}, \quad (20) \end{aligned}$$

где $\Phi_{m,r,p}(a, q, x) = x^{rp} \int_0^a (1 - \operatorname{sinc} xt)^{mp/2} q(t) dt$. При этом, если функция q такова, что $\inf_{x \geq 1} \Phi_{m,r,p}(a, q, x) = \Phi_{m,r,p}(a, q, 1)$, то имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)}{\left\{ \int_0^a \Omega_m^p(f^{(r)}, t/n) q(t) dt \right\}^{1/p}} = \left\{ \Phi_{m,r,p}(a, q, 1) \right\}^{-1/p}.$$

Следствие 4. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $0 < p \leq 2$; функция $q(t) = t^{rp-1} q_1(t)$ — неотрицательная, измеримая, суммируемая на $[0, a]$, где $0 < a \leq \pi$; q_1 — невозрастающая, не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место равенство

$$\inf_{x \geq 1} \Phi_{m,r,p}(a, t^{rp-1} q_1(t), x) = \Phi_{m,r,p}(a, t^{rp-1} q_1(t), 1) \quad (21)$$

и справедлива формула

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)}{\left\{ \int_0^a \Omega_m^p(f^{(r)}, t/n) t^{rp-1} q_1(t) dt \right\}^{1/p}} = \left\{ \Phi_{m,r,p}(a, t^{rp-1} q_1(t), 1) \right\}^{-1/p}. \quad (22)$$

Доказательство. Покажем справедливость соотношения (21), поскольку равенство (22) будет сразу получено при помощи формулы (20) из следствия 3.

Полагаем $q_2(t) = \{q_1(t), \text{ если } 0 \leq t \leq a; q_1(a), \text{ если } a \leq t < \infty\}$. При всех $x \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{m,r,p}(a, t^{rp-1}q_1(t), x) &= x^{rp} \int_0^a (1 - \operatorname{sinc} xt)^{mp/2} t^{rp-1} q_1(t) dt \\ &= \int_0^{ax} (1 - \operatorname{sinc} t)^{mp/2} t^{rp-1} q_2(t/x) dt \geq \int_0^{ax} (1 - \operatorname{sinc} t)^{mp/2} t^{rp-1} q_2(t) dt \\ &\geq \int_0^a (1 - \operatorname{sinc} t)^{mp/2} t^{rp-1} q_1(t) dt = \Phi_{m,r,p}(a, t^{rp-1}q_1(t), 1), \end{aligned}$$

т.е. формула (21) имеет место. Следствие 4 доказано. □

Возвращаясь снова к выражению $\mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)$, введенному в формулировке теоремы 1, выясним, какими дифференциальными свойствами должна обладать функция φ , чтобы выполнялось равенство

$$\inf_{n \leq k < \infty} \mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) = \mathcal{B}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi). \tag{23}$$

Лемма 1. Пусть функция φ является неотрицательной на отрезке $[0, h]$ и дифференцируемой на интервале $(0, h)$ ($0 < h \leq \pi/n$). Если при некоторых $r \in \mathbb{N}$; $1/r \leq p \leq 2$ и любых $t \in (0, h)$ выполнено неравенство

$$(rp - 1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \geq 0, \tag{24}$$

то справедливо соотношение (23).

Доказательство. Учитывая вид выражения $\mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)$ и условия леммы 1, для установления справедливости формулы (23) достаточно доказать, что функция

$$y(x) := x^{rp} \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} xt)^{mp/2} \varphi(t) dt \tag{25}$$

будет неубывающей при $1 \leq x < \infty$. Для этого покажем, что на множестве $1 \leq x < \infty$ её первая производная y' является неотрицательной, откуда будет следовать равенство $\inf\{y(x) : 1 \leq x < \infty\} = y(1)$. Дифференцируя функцию (25), получаем

$$y'(x) = rp x^{rp-1} \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} xt)^{mp/2} \varphi(t) dt + x^{rp} \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} (1 - \operatorname{sinc} xt)^{mp/2} \varphi(t) dt. \quad (26)$$

Непосредственным подсчетом можно убедиться в справедливости равенства

$$\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial x} (1 - \operatorname{sinc} xt)^{mp/2} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial t} (1 - \operatorname{sinc} xt)^{mp/2}. \quad (27)$$

Используя формулу (27), из равенства (26) имеем

$$y'(x) = x^{rp-1} \left\{ rp \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} xt)^{mp/2} \varphi(t) dt + \int_0^h t \varphi(t) \frac{\partial}{\partial t} (1 - \operatorname{sinc} xt)^{mp/2} dt \right\}. \quad (28)$$

Выполнив интегрирование по частям во втором интеграле, расположенном в правой части равенства (28), и учитывая неравенство (24), получаем

$$y'(x) = x^{rp-1} \left\{ (1 - \operatorname{sinc} xh)^{mp/2} h \varphi(h) + \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} xt)^{mp/2} \left((rp - 1) \varphi(t) - t \varphi'(t) \right) dt \right\} \geq 0.$$

Лемма доказана. \square

Следствие 5. Пусть $r \in \mathbb{N}$; $1/r \leq p \leq 2$; $0 \leq \gamma \leq rp - 1$; $0 < \beta \leq \pi$; $\varphi_*(t) = \sin^\gamma(\beta t/h)$, где $0 < t \leq h \leq \pi/n$. Тогда для любых $m, n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi_*, h) = 2^{-m/2} n^{-r} \left\{ \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} \sin^\gamma(\beta t/h) dt \right\}^{-1/p}. \quad (29)$$

Действительно, нетрудно показать, что при $0 < x \leq \pi$ имеет место неравенство

$$\operatorname{sinc} x - \cos x \geq 0. \quad (30)$$

Далее проверим выполнение условия (24) для функции φ_* , полагая

$$\begin{aligned} \xi(t) &:= (rp - 1)\varphi_*(t) - t\varphi'_*(t) \\ &= (\beta t/h) \operatorname{sinc}^{\gamma-1}(\beta t/h) \left((rp - 1)\operatorname{sinc}(\beta t/h) - \gamma \cos(\beta t/h) \right). \end{aligned} \quad (31)$$

В силу неравенства (30) имеем

$$\operatorname{sinc}(\beta t/h) - \cos(\beta t/h) \geq 0. \quad (32)$$

Поскольку $rp - 1 \geq \gamma$, то с учетом неравенства (32) выражение в круглых скобках в правой части формулы (31) будет неотрицательным. Следовательно, $\xi(t) \geq 0$ для любых $t \in (0, h)$, а это, в силу леммы 1, означает справедливость формулы (29).

5. Пусть \mathfrak{M} — выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2 . Символами $b_n(\mathfrak{M}, L_2)$, $d^n(\mathfrak{M}, L_2)$, $d_n(\mathfrak{M}, L_2)$, $\delta_n(\mathfrak{M}, L_2)$, $\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2)$ обозначим соответственно бернштейновский, гельфандовский, колмогоровский, линейный и проекционный n -поперечники \mathfrak{M} в пространстве L_2 (см., например, [21]). Между этими n -поперечниками в L_2 выполняются следующие соотношения

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d^n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}, L_2). \quad (33)$$

Пусть $\Phi(t) (t \geq 0)$ — произвольная непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Через $W_{m,p}^r(\Phi)$ ($m, r \in \mathbb{N}$; $0 < p \leq 2$) обозначим класс функций $f \in L_2^r$, для которых при всех $0 < t \leq 2\pi$ выполнено неравенство

$$\int_0^t \Omega_m^p(f^{(r)}, \tau) d\tau \leq \Phi^p(t). \quad (34)$$

Следуя работам [13–15], обозначим через t_* величину аргумента $t \in (0, \infty)$ функции $\operatorname{sinc} t$, при котором она достигает своего наименьшего значения. Очевидно, что t_* есть наименьший из положительных корней уравнения $t - \operatorname{tg} t = 0$ ($4, 49 < t_* < 4, 51$). При этом полагаем $(1 - \operatorname{sinc} t)_* = \{1 - \operatorname{sinc} t, \text{ если } 0 < t \leq t_*; 1 - \operatorname{sinc} t_*, \text{ если } t \geq t_*\}$. Также обозначим $E_{n-1}(W_{m,p}^r) = \sup\{E_{n-1}(f) : f \in W_{m,p}^r(\Phi)\}$.

Теорема 2. Пусть $n, m, r \in \mathbb{N}$; $1/r \leq p \leq 2$. Если для всех $0 < t \leq 2\pi$ мажоранта Φ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi^p(t)}{\Phi^p(\pi/n)} \geq \frac{\int_0^t (1 - \operatorname{sinc} n\tau)_*^{mp/2} d\tau}{\int_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^{mp/2} d\tau}, \quad (35)$$

то справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lambda_{2n}(W_{m,p}^r(\Phi), L_2) &= \lambda_{2n-1}(W_{m,p}^r(\Phi), L_2) = E_{n-1}(W_{m,p}^r(\Phi)) \\ &= 2^{-m/2} n^{-r} \left\{ \int_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \end{aligned} \quad (36)$$

где λ_n — любой из перечисленных выше n -поперечников — b_n, d^n, d_n, δ_n или Π_n . При этом множество мажорант, удовлетворяющих условию (35), не пусто.

Доказательство. Из формулы (29), в которой полагаем $\gamma = 0$ и $h = \pi/n$, и соотношения (33) получаем оценки сверху

$$\begin{aligned} \lambda_{2n}(W_{m,p}^r(\Phi), L_2) &\leq \lambda_{2n-1}(W_{m,p}^r(\Phi), L_2) \leq d_{2n-1}(W_{m,p}^r(\Phi), L_2) \\ &\leq E_{n-1}(W_{m,p}^r(\Phi)) \leq 2^{-m/2} n^{-r} \left\{ \int_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned} \quad (37)$$

Для получения оценок снизу рассмотрим шар \mathbb{B}_{2n+1} в подпространстве \mathcal{T}_n тригонометрических полиномов порядка n , т.е.

$$\mathbb{B}_{2n+1} := \left\{ T_n \in \mathcal{T}_n : \|T_n\| = 2^{-m/2} n^{-r} \left(\int_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right)^{-\frac{1}{p}} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}$$

и покажем справедливость включения $\mathbb{B}_{2n+1} \subset W_{m,p}^r(\Phi)$. Для произвольного полинома

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_k \cos(kx + \gamma_k)$$

имеем

$$\Omega_m^2(T_n^{(r)}, \tau) = 2^m \sum_{k=1}^n k^{2r} \rho_k^2 (1 - \operatorname{sinc} k\tau)^m. \quad (38)$$

Учитывая, что неравенство $(1 - \operatorname{sinc} k\tau)^m \leq (1 - \operatorname{sinc} n\tau)_*^m$ справедливо для любых $0 \leq \tau < \infty$ и $k \leq n$ ($k \in \mathbb{N}$), из (38) получаем

$$\Omega_m(T_n^{(r)}, \tau) \leq 2^{m/2} n^r (1 - \operatorname{sinc} n\tau)_*^{m/2} \|T_n\|. \quad (39)$$

Возведя обе части неравенства (39) в степень p , где $1/r \leq p \leq 2$, и проинтегрировав их по переменной τ в пределах от 0 до t ($0 < t \leq 2\pi$), имеем

$$\int_0^t \Omega_m^p(T_n^{(r)}, \tau) d\tau \leq \|T_n\|^p 2^{m/2} n^{rp} \int_0^t (1 - \operatorname{sinc} n\tau)_*^{mp/2} d\tau. \quad (40)$$

Учитывая условие (35), для любого полинома $T_n \in \mathbb{B}_{2n+1}$ из неравенства (40) получаем

$$\int_0^t \Omega_m^p(T_n^{(r)}, \tau) d\tau \leq \frac{\Phi^p(\pi/n) \int_0^t (1 - \operatorname{sinc} n\tau)_*^{mp/2} d\tau}{\int_0^t (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^{mp/2} d\tau} \leq \Phi^p(t).$$

Отсюда, в силу неравенства (34), следует включение $\mathbb{B}_{2n+1} \subset W_{m,p}^r(\Phi)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \lambda_{2n}(W_{m,p}^r(\Phi), L_2) &\geq b_{2n}(W_{m,p}^r(\Phi), L_2) \geq b_{2n}(\mathbb{B}_{2n+1}, L_2) \\ &\geq 2^{-m/2} n^{-r} \left\{ \int_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned} \quad (41)$$

Сопоставляя соотношения (37) и (41), получаем требуемые равенства (36).

Покажем, что функция $\Phi_*(t) = t^{\alpha/p}$, где

$$\alpha = \pi / \int_0^\pi (1 - \operatorname{sinc} \tau)^{mp/2} d\tau, \quad (42)$$

удовлетворяет условию (35) при любом $n \in \mathbb{N}$. Для дальнейших рассуждений нам понадобятся оценки величины α как сверху так и снизу. Из геометрических соображений очевидно, что $\operatorname{sinc} \tau > 1 - \tau/\pi$ для любого $\tau \in (0, \pi)$. Тогда из соотношения (42) имеем

$$\alpha > \pi / \int_0^\pi (\tau/\pi)^{mp/2} d\tau = mp/2 + 1. \quad (43)$$

Для получения оценки сверху величины α воспользуемся неравенством $1 - \operatorname{sinc} \tau > (\tau/\pi)^2$, где $\tau \in (0, \pi)$. Из соотношения (42) получаем

$$\alpha < \pi / \int_0^\pi (\tau/\pi)^{mp} d\tau = mp + 1. \quad (44)$$

Условие (35), которое требуется доказать для функции Φ_* , примет следующий вид:

$$\left(\frac{tn}{\pi}\right)^\alpha \geq \frac{\int_0^t (1 - \operatorname{sinc} n\tau)_*^{mp/2} d\tau}{\int_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^{mp/2} d\tau}. \quad (45)$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) := \left(\frac{tn}{\pi}\right)^\alpha - \frac{\int_0^t (1 - \operatorname{sinc} n\tau)_*^{mp/2} d\tau}{\int_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^{mp/2} d\tau},$$

которую, используя формулу (42), перепишем в следующем виде

$$F(t) = \left(\frac{tn}{\pi}\right)^\alpha - \frac{\alpha n}{\pi} \int_0^t (1 - \operatorname{sinc} n\tau)_*^{mp/2} d\tau \quad (46)$$

и покажем, что $F(t) \geq 0$ при любом $0 \leq t \leq 2\pi$. Это будет равносильно выполнению неравенства (45). Рассуждения проведем для трех случаев: а) $0 \leq t \leq \pi/n$; б) $\pi/n \leq t \leq t_*/n$; в) $t_*/n \leq t \leq 2\pi$.

Рассмотрим случай а). Воспользовавшись формулой (46) и неравенством $\sin \tau \geq \tau - \tau^3/6$ ($\tau \geq 0$), получаем

$$\begin{aligned} F(t) &\geq \left(\frac{tn}{\pi}\right)^\alpha - \frac{\alpha n}{\pi} \int_0^t \left(\frac{n\tau}{6}\right)^{mp} d\tau \\ &= \left(\frac{tn}{\pi}\right)^\alpha \left(1 - \frac{\alpha \pi^{\alpha-1} n^{mp+1-\alpha}}{(mp+1)\sqrt{6}^{mp}} t^{mp+1-\alpha}\right). \end{aligned} \quad (47)$$

Из неравенств (44) и (47) следует, что при $t \rightarrow 0+0$ функция F принимает положительные значения. Покажем, что F является знакопостоянной функцией на интервале $(0, \pi/n)$. Для этого применим метод рассуждений от противного, полагая, что существует точка $\xi \in (0, \pi/n)$, при переходе аргумента t через которую F меняет свой знак.

Поскольку, как следует из формул (32) и (46), $F(0) = F(\pi/n) = 0$, то в силу теоремы Ролля производная первого порядка

$$F^{(1)}(t) = \frac{\alpha n}{\pi} \left(\left(\frac{tn}{\pi}\right)^{\alpha-1} - (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} \right) \quad (48)$$

должна иметь на интервале $(0, \pi/n)$ не менее двух различных нулей. Из формулы (48) следует, что такое же количество различных нулей

на $(0, \pi/n)$ и в тех же точках будет иметь и функция

$$G(t) := \left(\frac{tn}{\pi}\right)^{2(\alpha-1)/(mp)} - 1 + \operatorname{sinc} nt. \quad (49)$$

В силу первого замечательного предела, для функции $g(t) = \operatorname{sinc} t$ полагаем $g(0) = 1$. С учетом этого из соотношения (49) имеем $G(0) = G(\pi/n) = 0$. Следовательно, функция G имеет на отрезке $[0, \pi/n]$ не менее четырех различных нулей. Поскольку функцию (49) можно представить в виде

$$G(t) = \frac{1}{nt} G_1(t),$$

где

$$G_1(t) := \left(\frac{1}{\pi}\right)^{2(\alpha-1)/(mp)} (tn)^{2(\alpha-1)/(mp)+1} - nt + \sin nt, \quad (50)$$

то из выше сказанного вытекает, что G_1 также должна иметь на $[0, \pi/n]$ не менее четырех различных нулей. Из теоремы Ролля следует, что производная первого порядка

$$G_1^{(1)}(t) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{2(\alpha-1)/(mp)} n^{2(\alpha-1)/(mp)+1} \times \left(\frac{2(\alpha-1)}{mp} + 1\right) t^{2(\alpha-1)/(mp)} + n(\cos nt - 1) \quad (51)$$

обязана обращаться в ноль на интервале $(0, \pi/n)$ не менее чем в трех различных точках. Поскольку $G_1^{(1)}(0) = 0$, то на основании аналогичных соображений функция

$$G_1^{(2)}(t) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{2(\alpha-1)/(mp)} n^{2(\alpha-1)/(mp)+1} \times \left(\frac{2(\alpha-1)}{mp} + 1\right) \frac{2(\alpha-1)}{mp} t^{2(\alpha-1)/(mp)-1} - n^2 \sin nt \quad (52)$$

должна иметь на $(0, \pi/n)$ не менее трех различных нулей. В силу неравенства (43) из (52) получаем $G_1^{(2)}(0) = 0$, что будет означать наличие не менее чем трех различных нулей на интервале $(0, \pi/n)$ у функции

$$G_1^{(3)}(t) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{2(\alpha-1)/(mp)} n^{2(\alpha-1)/(mp)+1} \left(\frac{2(\alpha-1)}{mp} + 1\right) \frac{2(\alpha-1)}{mp} \times \left(\frac{2(\alpha-1)}{mp} - 1\right) t^{2(\alpha-1)/(mp)-2} - n^3 \cos nt.$$

Из неравенства (44) и последней формулы следует, что $G_1^{(3)}$ является разностью положительной выпуклой вниз монотонно убывающей степенной функции и монотонно убывающей тригонометрической функции, меняющей при переходе через точку $\pi/(2n)$ знак с плюса на минус и направление выпуклости с выпуклости вверх на выпуклость вниз. Следовательно, функция $G_1^{(3)}$ может иметь не более двух различных нулей на интервале $(0, \pi/n)$. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (45) при $0 \leq t \leq \pi/n$.

Рассмотрим теперь случай б). Рассуждая от противного, докажем, что функция (46) принимает на полусегменте $(\pi/n, t_*/n]$ положительные значения. Пусть существует некоторая точка $\eta \in (\pi/n, t_*/n]$, при переходе через которую аргумента t функция F меняет свой знак. Поскольку $F(\pi/n) = 0$, то на основании теоремы Ролля функция $F^{(1)}$, а значит и функция G_1 , определяемая формулой (50), имеет на множестве $(\pi/n, t_*/n)$ не менее одного нуля. Поскольку $G_1(\pi/n) = 0$, то на основании аналогичных соображений производная первого порядка $G_1^{(1)}$ должна иметь на интервале $(\pi/n, t_*/n)$ также не менее одного нуля. Согласно формуле (51) и неравенству (43) производная $G_1^{(1)}$ является суммой двух монотонно возрастающих выпуклых вниз функций, первая из которых принимает положительные значения, а вторая — отрицательные значения. Из сказанного следует, что

$$\min\{G_1^{(1)}(t) : \pi/n \leq t \leq t_*/n\} = G_1^{(1)}(\pi/n). \quad (53)$$

Из соотношений (51) и (43) имеем

$$G_1^{(1)}(\pi/n) = n \left(\frac{2(\alpha - 1)}{mp} - 1 \right) > 0.$$

Следовательно, согласно формуле (53) $G_1^{(1)}(t) > 0$ для любого $t \in (\pi/n, t_*/n)$. Противоречие, полученное в связи с тем, что функция $G_1^{(1)}$ должна была иметь по крайней мере один ноль в указанном интервале, доказывает справедливость неравенства (45) и в случае б).

Рассмотрим далее случай в). При $t_*/n \leq t \leq 2\pi$ функция (46) примет следующий вид:

$$F(t) = \left(\frac{tn}{\pi} \right)^\alpha - 1 - \frac{\alpha n}{\pi} \int_{\pi/n}^{t_*/n} (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^{mp/2} d\tau - \frac{\alpha n}{\pi} (1 - \operatorname{sinc} t_*)^{mp/2} \left(t - \frac{t_*}{n} \right).$$

Отсюда имеем

$$F^{(1)}(t) = \frac{\alpha n}{\pi} \left(\left(\frac{nt}{\pi} \right)^{\alpha-1} - (1 - \operatorname{sinc} t_*)^{mp/2} \right). \quad (54)$$

В силу неравенства (43) функция (54) является монотонно возрастающей и

$$\min\{F^{(1)}(t) : t_*/n \leq t \leq 2\pi\} = F^{(1)}(t_*/n). \quad (55)$$

Поскольку при $\pi \leq t \leq 2\pi$ справедливо неравенство $\sin t \geq t(1 - t/\pi)$, т.е. $\operatorname{sinc} t \geq 1 - t/\pi$, то с его помощью и на основании формулы (43) получаем

$$\begin{aligned} F^{(1)}\left(\frac{t_*}{n}\right) &= \frac{\alpha n}{\pi} \left(\left(\frac{t_*}{\pi} \right)^{\alpha-1} - (1 - \operatorname{sinc} t_*)^{mp/2} \right) \\ &> \frac{\alpha n}{\pi} \left(\left(\frac{t_*}{\pi} \right)^{mp/2} - (1 - \operatorname{sinc} t_*)^{mp/2} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

С учетом соотношения (55) это означает, что на отрезке $[t_*/n, 2\pi]$ функция F является монотонно возрастающей. Поскольку, как следует из случая б), $F(t_*/n) > 0$, то на рассматриваемом точечном множестве функция F будет положительной, что означает выполнение неравенства (45) и при $t_*/n \leq t \leq 2\pi$. Теорема 2 доказана. \square

6. Из доказанной теоремы 2 вытекают такие следствия и утверждение.

Следствие 6. Для любых чисел $n, m, r \in \mathbb{N}$; $1/r \leq p \leq 2$ имеют место следующие равенства

$$\begin{aligned} \lambda_{2n}(W_{m,p}^r(\Phi_*), L_2) &= \lambda_{2n-1}(W_{m,p}^r(\Phi_*), L_2) = E_{n-1}(W_{m,p}^r(\Phi_*)) \\ &= 2^{-m/2} \pi^{\alpha/p} n^{-r-\alpha/p} \left\{ \int_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p}, \end{aligned}$$

где мажоранта Φ_* была введена в ходе доказательства теоремы 2.

Вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций действительного переменного в разное время рассматривались, например, А. В. Ефимовым, А. Ф. Тиманом, Н. П. Корнейчуком, В. И. Бердышевым, С. Милорадовичем, С. А. Теляковским, А. И. Степанцом и многими другими (см., например, [24–27]). Следующее утверждение продолжает указанную тематику.

Утверждение 1. Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы следующие равенства

$$\begin{aligned} \sup\{|a_n(f)| : f \in W_{m,p}^r(\Phi)\} &= \sup\{|b_n(f)| : f \in W_{m,p}^r(\Phi)\} \\ &= 2^{-m/2} n^{-r} \left\{ \int_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \end{aligned}$$

где a_n и b_n есть косинус и синус-коэффициенты Фурье функции f соответственно.

Доказательство. Не уменьшая общности, проведем рассуждения для коэффициентов Фурье $b_n(f)$. Поскольку

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(t) - S_{n-1}(f, t)) \sin nt \, dt,$$

то используя неравенство Коши–Буняковского, а также соотношения (2) и (36), получаем

$$\begin{aligned} \sup\{|b_n(f)| : f \in W_{m,p}^r(\Phi)\} &\leq E_{n-1}(W_{m,p}^r(\Phi)) \\ &\leq 2^{-m/2} n^{-r} \left\{ \int_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (56) \end{aligned}$$

Для нахождения оценки снизу рассмотрим функцию

$$\tilde{f}(t) := 2^{-m/2} n^{-r} \left\{ \int_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin nt.$$

Очевидно, что функция \tilde{f} принадлежит шару \mathbb{B}_{2n+1} , введенному в ходе доказательства теоремы 2. Поскольку $\tilde{f} \in W_{m,p}^r(\Phi)$, то

$$\begin{aligned} \sup\{|b_n(f)| : f \in W_{m,p}^r(\Phi)\} &\geq |b_n(\tilde{f})| \\ &= 2^{-m/2} n^{-r} \left\{ \int_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (57) \end{aligned}$$

Сравнивая оценку сверху (56) с оценкой снизу (57), получаем требуемое равенство

$$\begin{aligned} & \sup\{|b_n(f)| : f \in W_{m,p}^r(\Phi)\} \\ &= 2^{-m/2} n^{-r} \left\{ \int_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \end{aligned}$$

чем и завершаем доказательство утверждения. \square

Следствие 7. Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} & \sup\{|a_n(f)| : f \in W_{m,p}^r(\Phi_*)\} = \sup\{|b_n(f)| : f \in W_{m,p}^r(\Phi_*)\} \\ &= 2^{-m/2} \pi^{\alpha/p} n^{-r-\alpha/p} \left\{ \int_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p}. \end{aligned}$$

Благодарности. В заключение авторы выражают благодарность Р. М. Тригубу за ряд ценных замечаний, связанных со статьей.

Литература

- [1] Н. И. Черных, *О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2* // Матем. заметки, **2** (1967), No. 2, 513–522.
- [2] Н. И. Черных, *О неравенстве Джексона в L_2* // Труды матем. ин-та АН СССР, **88** (1967), 71–74.
- [3] Л. В. Тайков, *Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывных функций из L_2* // Матем. заметки, **20** (1976), No. 3, 433–438.
- [4] Л. В. Тайков, *Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2* // Матем. заметки, **25** (1979), No. 2, 217–223.
- [5] А. А. Лигун, *Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2* // Матем. заметки, **24** (1978), No. 6, 785–792.
- [6] А. А. Лигун, *Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2* // Матем. заметки, **43** (1988), No. 6, 757–769.
- [7] В. А. Юдин, *Диофантовы приближения в экстремальных задачах* // Доклады АН СССР, **251** (1980), No. 1, 54–57.
- [8] В. И. Иванов, О. И. Смирнов, *Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p* , Тульский ун-т : Тула, 1995.
- [9] А. Г. Бабенко, *О точной константе в неравенстве Джексона в L_2* // Матем. заметки, **39** (1986), No. 5, 651–664.
- [10] М. Г. Есмаганбетов, *Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона* // Матем. заметки, **66** (1999), No. 6, 816–820.
- [11] С. Б. Вакарчук, *Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2* // Матем. заметки, **80** (2006), No. 1, 11–19.

- [12] М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов, *Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 и их применение* // Изв. АН Респ. Тадж., отдел. физ.-мат., хим., геолог. и техн. наук, (2008), No. 4, 7–19.
- [13] С. Б. Вакарчук, *Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2* Матем. заметки, **78** (2005), No. 5, 792–796.
- [14] S. B. Vakarchuk, V. I. Zabutna, *Widths of functional classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities* // East J. Approxim., **14** (2008), No. 4, 411–421.
- [15] М. Ш. Шабозов, С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, *Точные неравенства типа Джексона–Стечкина для периодических функций в L_2 и значения поперечников классов функций* // Доклады АН Российской Федерации, **451** (2013), No. 6, 625–628.
- [16] К. В. Руновский, *О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p , $0 < p < 1$* // Матем. сборник, **185** (1984), No. 8, 81–102.
- [17] К. В. Руновский, *Об одной оценке для интегрального модуля гладкости* // Изв. вузов. Матем. (1992), No. 1, 78–80.
- [18] Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд, *Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p , $0 < p < 1$* // Матем. сборник, **98** (1975), No. 140, 395–415.
- [19] Р. М. Тригуб, *Линейные методы суммирования и абсолютная сходимость рядов Фурье* // Изв. АН СССР. Сер. матем., **32** (1968), No. 1, 24–49.
- [20] R. M. Trigub, E. S. Bellinsky, *Fourier Analysis and Approximation of Functions*, Dordrecht Boston London: Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [21] A. Pinkus, *n -Widths in Approximation Theory*, Berlin Heidelberg New York Tokyo: Springer-Verlag, 1985.
- [22] В. Д. Рыбасенко, И. Д. Рыбасенко, *Элементарные функции. Формулы, таблицы, графики*, М.: Наука, 1987.
- [23] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, 3 изд. М.: Наука, 1974.
- [24] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, М.: Гостехиздат, 1960.
- [25] С. Милорадович, *О коэффициентах Фурье класса $W^r H(\delta_0)_L$* // Publication de L'institut Mathematique, **28** (1980), 129–134.
- [26] А. И. Степанец, *Точные оценки коэффициентов Фурье на классах непрерывных и дифференцируемых периодических функций многих переменных* // Доклады АН СССР, **261** (1981), No. 1, 34–38.
- [27] С. Б. Вакарчук, *О неравенствах типа Джексона в $L_2[-1, 1]$ и точных значениях n -поперечников функциональных классов* // Укр. матем. вісник, **3** (2006), No. 1, 102–119.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Сергей Борисович
Вакарчук** Университет им. Альфреда Нобеля
Днепропетровск
ул. Набережная Ленина, 18
Украина
E-Mail: sbvakarchuk@mail.ru

**Мирганд
Шабозович
Шабозов** Институт математики АН
Республики Таджикистан
ул. Айни, 299/1
Душанбе 734063
Таджикистан
E-Mail: shabozov@mail.ru

**Валентина
Ивановна
Забутная** Днепропетровский национальный
университет им. О. Гончара
Днепропетровск
Украина
E-Mail: zabutna@mail.ru