УНІВЕРСИТЕТ імені АЛЬФРЕДА НОБЕЛЯ

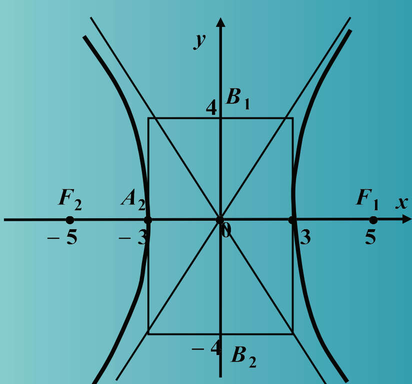
О.Є. Запорожченко
М.С. Сазонова
Л.Ф.Сушко

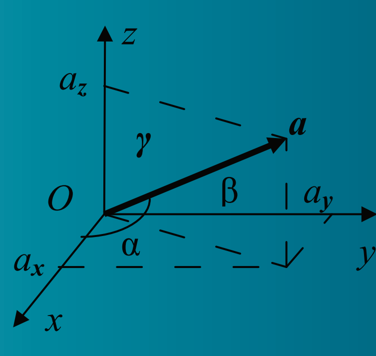
ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta(A)}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$$





УНІВЕРСИТЕТ імені АЛЬФРЕДА НОБЕЛЯ

О.Є. Запорожченко
М.С. Сазонова
Л.Ф.Сушко

ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник

Друге видання, перероблене та доповнене

Електронне видання

Дніпро
2022

УДК 514.742.2
З 333

Рекомендовано вченою радою
Університету імені Альфреда Нобеля
(протокол № 9 від 23 листопада 2021 р.)

Рецензенти:
Г.Г. Швачич, доктор фізико-математичних наук. професор (НМетАУ);
О.В. Соболенко, кандидат технічних наук, доцент (НМетАУ).

Запорожченко О.Є.

З 333 Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія: навчальний посібник. Друге видання перероблене та доповнене. [Електронний ресурс] / О.Є. Запорожченко, М.С. Сазонова, Л.Ф. Сушко. – Дніпро: Університет імені Альфреда Нобеля, 2022. –105 с.

ISBN 978-966-434-537-5

У посібнику наведено докладні теоретичні відомості щодо вивчення розділів «Елементи лінійної алгебри», «Елементи векторної алгебри», «Аналітична геометрія на площині», «Пряма та площина у просторі». Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями, а також розв’язуванням типових задач. Рекомендуються завдання для самостійної роботи з відповідями. Наприкінці кожної теми подано довідник з основними формулами.

Видання посібника обумовлено нагальними потребами у навчально-методичній літературі при викладанні спеціальних курсів дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальності 122 «Комп’ютерні науки» (друге видання, доповнене та перероблене).

УДК 514.742.2

ISBN 978-966-434-537-5

ЗМІСТ

ВСТУП...5
1. МАТРИЦІ ТА ВИЗНАЧНИКИ..6
1.1. Матриці та операції з ними..6
1.2. Визначник матриці та їх властивості..8
2. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. ФОРМУЛИ КРАМЕРА. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІНІЙНИХ РІВНЯНЬ МАТРИЧНИМ МЕТОДОМ..14
2.1. Загальний вигляд системи лінійних рівнянь..............................14
2.2. Метод Крамера...14
2.3. Розв’язування систем лінійних рівнянь матричним методом.......15
3. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ..19
3.1. Поняття вектора...19
3.2. Лінійні операції над векторами...19
3.3. Лінійна залежність векторів...21
3.4. Розкладання вектора за базисом..21
3.5. Декартова система координат..22
3.6. Ділення відрізка за даним відношенням.....................................24
3.7. Скалярний добуток двох векторів..30
3.8. Векторний добуток двох векторів...31
3.9. Мішаний добуток трьох векторів..32
3.10. Довідник з формулами векторної алгебри.................................38
4. ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ...41
4.1. Пряма лінія на площині...41
4.2. Довідник з формулами за темою «Пряма лінія на площині».......55
5. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ...56
5.1. Коло..56
5.2. Еліпс...61
5.3. Гіпербола..69

5.4. Парабола..77
6. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ..84
6.1 Площина у просторі...84
6.2. Пряма у просторі. Площина та пряма..93
6.3. Довідник з формулами за темою «Площина та пряма»...............103
ЛІТЕРАТУРА..105

ВСТУП

В останні роки за умов дистанційного навчання зростає необхідність в забезпеченні студентів якісною методичною літературою, яка відповідає робочій програмі, містить основні теоретичні та практичні положення.

Мета пропонованого посібника – допомогти студентам при вивченні дисципліни «Вища математика» розібратися у матеріалі та якісно його засвоїти.

До складу посібника увійшли розділи вищої математики: «Елементи лінійної алгебри», «Елементи векторної алгебри», «Аналітична геометрія на площині та у просторі».

Наведено основні теоретичні положення та формули, які проілюстровано детальним розв’язанням задач різного ступеня складності. Наприкінці кожної теми подано задачі для самостійної роботи з відповідями, щоб студенти мали можливість перевірити себе, а також скорочений довідник формул за темою.

Навчальний посібник може виконувати роль конспекту лекцій та посібника з практичних занять, що буде студентам корисним в процесі оволодіння новим матеріалом.

Посібник може використовуватися для самостійної роботи і підготовки до модульного контролю студентів комп’ютерних а також інших спеціальностей усіх форм навчання.

1. МАТРИЦІ ТА ВИЗНАЧНИКИ

1.1. Матриці та операції з ними

Означення. Матрицею розмірів m на n називається сукупність $m \cdot n$ чисел, які розміщені у вигляді прямокутної таблиці, що містить m рядків і n стовпців.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ або } A = \left(a_{ij}\right), \left(i = \overline{1,m},\, j = \overline{1,n}\right).$$

Числа a_{ij} називаються елементами матриці. Перший індекс i вказує номер рядка, а другий індекс j – номер стовпця, у яких знаходиться елемент.

Матриці бувають різних видів. ***Нульовою матрицею*** називається матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю.

Квадратною матрицею називають матрицю, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців.

Головною діагоналлю квадратної матриці називають сукупність елементів, які розташовані на лінії, що сполучає лівий верхній кут з правим нижнім.

Діагональною матрицею називається квадратна матриця, у якої відмінні від нуля лише елементи головної діагоналі.

Одиничною матрицею, позначаємою E, називається діагональна матриця, у якої елементи на головній діагоналі дорівнюють 1.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Транспонованою матрицею A^T називають матрицю, одержану з матриці A заміною її рядків відповідними стовпцями. Якщо $A^T = A$, то матриця A називається ***симетричною***.

Матриці однакового розміру $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ називають рівними $A=B$, якщо $a_{ij}=b_{ij}$ при всіх i, j.

Оскільки, працюючи з матрицями, будемо розглядати суми великої кількості доданків $a_1+a_2+a_3+...+a_n$, то для спрощення запису цієї суми використаємо символ

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+a_3+...+a_n.$$

Зауважимо, що замість змінного індексу k може бути записаний другий довільний індекс, тобто вираз $\sum_{k=1}^{n} a_k$ означає те саме, що й $\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Сумою (різницею) двох матриць A та B одного й того ж розміру називається матриця $C=A+B$, елементи якої $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\left(c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}\right)$, наприклад, $\tilde{N}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$.

Добутком матриці A на число α називається матриця $D=\alpha\cdot A$, елементи якої $\alpha_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$, наприклад,

$$D=\alpha\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} \\ \alpha\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22} \end{pmatrix}.$$

Розглянуті операції мають такі властивості:

1. $A+B=B+A$;
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$;
3. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
4. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha A+\beta A$;
5. $(\alpha\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta A)$,

де A, B, C – матриці, α, β – числа.

Розглянемо множення матриць. Операція множення $A\cdot B$ визначається тільки за умови, що кількість стовпців першої матриці A дорівнює кількості рядків другої матриці B.

Існування добутку $A\cdot B$ не означає, що існує $B\cdot A$.

Нехай дано матриці A розміру $m\cdot n$ і матриця B розміру $n\cdot p$.

Добутком $\boldsymbol{A \cdot B}$ називається матриця $\boldsymbol{C}$ розміру $\boldsymbol{m \cdot p}$, елементи якої визначаються:

$$\boldsymbol{c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}}, \text{ де } \boldsymbol{i = \overline{1, m}},\ \boldsymbol{k = \overline{1, p}}.$$

Отже, елемент $\boldsymbol{c_{ik}}$ визначається так: елементи $\boldsymbol{i}$-го рядка першої матриці $\boldsymbol{A}$ множаться на відповідні елементи $\boldsymbol{k}$-го стовпця другої матриці $\boldsymbol{B}$, і ці добутки додаються.

Наприклад,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} \end{pmatrix}.$$

З означення добутку матриць зрозуміло, що добуток двох прямокутних матриць – це прямокутна матриця, кількість рядків якої дорівнює кількості рядків першої матриці, а кількість стовпців дорівнює кількості стовпців другої матриці.

Крім того, якщо $\boldsymbol{A}$ можливо помножити на $\boldsymbol{B}$, то це не означає, що існує добуток $\boldsymbol{B}$ на $\boldsymbol{A}$. Тобто множення – операція не комутативна $(\boldsymbol{A \cdot B \neq B \cdot A})$. Тільки для спеціально підібраних матриць виконується рівність $\boldsymbol{A \cdot B = B \cdot A}$. Такі матриці будемо називати переставними. Наприклад, $\boldsymbol{E \cdot A = A \cdot E = A}$; $\boldsymbol{0 \cdot A = A \cdot 0 = 0}$.

Операція множення матриць має такі властивості:

1. $\boldsymbol{A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C}$;
2. $\boldsymbol{\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B}$;
3. $\boldsymbol{A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C}$;
4. $\boldsymbol{(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C}$,

де $\boldsymbol{A, B, C}$ – матриці, $\boldsymbol{\alpha}$ – число.

1.2. Визначник матриці та їх властивості

Означення. Визначником другого порядку квадратної матриці $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається число $\boldsymbol{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$.

Означення. Визначником третього порядку квадратної матриці третього порядку називається число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Якщо обчислити за означенням визначники другого порядку, отримаємо $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

Цей результат схематично можна зобразити так:

(+) (−)

Означення. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} матриці A називається визначник, утворений з матриці A викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця.

Означення. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається добуток $(-1)^{i+j} M_{ij}$, де M_{ij} – мінор цього елемента.

Отже, означення визначника третього порядку можна переформулювати так: визначник дорівнює сумі добутків елементів першого рядка на їх алгебраїчні доповнення.

Основні властивості визначників.

1. При транспонуванні матриці значення її визначника не змінюється.

2. При перестановці двох рядків (стовпців) матриці визначник змінює свій знак на протилежний, а його абсолютне значення не змінюється.

3. Якщо елементи двох рядків (стовпців) рівні, такий визначник дорівнює нулю.

4. Спільний множник всіх елементів рядка (стовпця) можна винести за знак визначника.

5. Якщо кожен елемент деякого рядка (стовпця) визначника є сумою двох доданків, то визначник можна подати у вигляді суми двох визначників за формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

6. Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати відповідні елементи другого рядка (стовпця), помножені на спільний множник.

7. Сума добутків елементів деякого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення дорівнює визначнику.

8. Сума добутків елементів деякого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення відповідних елементів другого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Зразки розв'язування задач

Задача 1. Знайти матрицю $\tilde{N} = B + 2A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Користуючись означеннями множення матриці на число та додавання матриць, маємо

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \\ -10 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 4 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Обчислити $C = B^T - A^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Знаходимо транспоновані матриці $\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}^T = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Для матриць $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ знайти $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$, якщо це можливо:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Оскільки розміри $\boldsymbol{A}\,(2 \times 3)$, а $\boldsymbol{B}\,(2 \times 2)$, перемножити $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{B}$ неможливо (кількість стовпців $\boldsymbol{A}$ не дорівнює кількості рядків $\boldsymbol{B}$). Проте існує добуток $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 & -1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 & -1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 & 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 & 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 + 8 & -3 + 10 & 1 + 0 \\ 6 + 20 & 9 + 25 & -3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 26 & 34 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Обчислити визначники за означенням:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - (-4) \cdot 3 = -10 + 12 = 2$;

б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2 - 0) -$

$- 3(1 + 3) - 4(0 - 6) = -4 - 12 + 24 = 8$.

Задача 5. Обчислити визначник, спочатку спростивши його за допомогою властивостей: а) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання

а) Зробимо у деякому рядку (стовпці) усі елементи, крім одного, рівними нулю. Нехай це буде третій рядок. Додамо елементи другого стовпця до відповідних елементів першого стовпця. Згідно з властивістю 6 визначник не зміниться.

Потім до елементів третього стовпця додамо елементи другого стовпця, помножені на (-2), та отримаємо

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{33} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot 7 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -21 \cdot (-1-1) = 42.$$

б) Зробимо нулі у другому стовпці. Для цього помножимо елементи першого рядка на (-3) і додамо до елементів другого рядка. Потім елементи першого рядка – на 2 і додамо до елементів третього рядка:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -10 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -10 & 1 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(10-9) = -1.$$

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Обчислити $2A - 3B^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 18 & -7 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Перемножити матриці, якщо це можливо, і перевірити, чи виконується рівність $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ та $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$.

а) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$.

б) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -4 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ -3 & -6 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

в) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ не існує; $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & -3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

Відповідь: а) $\mathbf{22}$; б) $\mathbf{3}$; в) $\mathbf{-26}$.

Задача 4. Обчислити $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

Відповідь: $\mathbf{-54}$.

2. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. ФОРМУЛИ КРАМЕРА. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІНЙНИХ РІВНЯНЬ МАТРИЧНИМ МЕТОДОМ

2.1. Загальний вигляд системи n лінійних рівнянь

Системою n лінійних рівнянь з n невідомими називається система, яка має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n_1}x_1 + a_{n_2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Коефіцієнти системи a_{ij} при невідомих $x_j\left(j = \overline{1,n}\right)$ називаються коефіцієнтами системи, $b_i\left(i = \overline{1,n}\right)$ називаються ***вільними членами***.

Розв'язком системи називається упорядкована сукупність чисел $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$, таких, що при підстановці цих чисел у рівняння системи отримаємо n правильних числових рівностей.

Система, що має розв'язок, називається ***сумісною***. Система, яка розв'язків не має, називається ***несумісною***.

Якщо у системи лише один розв'язок, то її називають ***визначеною системою***. Якщо розв'язків нескінченна кількість, то ***невизначеною***.

2.2. Метод Крамера

Розглянемо систему лінійних рівнянь третього порядку

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Якщо головний визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$$

де Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3} – визначники, створені з головного визначника Δ заміною відповідного стовпця $(1,2$ або $3)$ на стовпець вільних членів.

Зауваження. Якщо: а) $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$, система має безліч розв'язків; б) $\Delta = 0$ і хоча б один з визначників Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3} відмінний від нуля, система не має розв'язків.

Формули Крамера використовуються для розв'язання систем n лінійних рівнянь з n змінними $(n = 2,3,...)$.

2.3. Розв'язування систем лінійних рівнянь матричним методом

Квадратна матриця A називається ***невиродженою***, якщо її визначник відмінний від нуля, тобто $\Delta(A) \neq 0$.

Означення. Квадратна матриця A^{-1} називається оберненою до квадратної матриці A, якщо виконується рівність $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, де E – одинична матриця.

Обернена матриця існує тільки для невиродженої матриці A та знаходиться за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елементів a_{ij} матриці A.

Нехай маємо систему лінійних рівнянь третього порядку з невиродженою матрицею A з коефіцієнтів системи $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Розглянемо також матрицю-стовпець $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ з вільних членів і матрицю $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ з невідомих системи.

Використовуючи операцію множення матриць, систему можна записати у вигляді $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$.

Помноживши це матричне рівняння зліва на обернену матрицю $\boldsymbol{A}^{-1}$, дістанемо $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}$.

Це є формула матричного методу розв’язання системи.

Зразки розв’язання задач

Задача 1. Розв’язати систему другого порядку: а) методом Крамера і б) матричним методом $\begin{cases} x_1-3x_2=5 \\ 4x_1+x_2=7 \end{cases}$.

Розв’язання

а) $x_1=\dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2=\dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$, де $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=1-(-12)=13$;

$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}=5-(-21)=26$; $\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}=7-20=-13$;

$x_1=\dfrac{26}{13}=2$, $\quad x_2=\dfrac{-13}{13}=-1$.

б) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Матриця $\boldsymbol{A}$ невироджена, тому що $\Delta(\boldsymbol{A})=\Delta=13$. Для неї існує обернена матриця $\boldsymbol{A}^{-1}$. Знайдемо її. Для цього знайдемо алгебраїчні доповнення $A_{ij}\left(i,j=\overline{1,2}\right)$.

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=1$; $\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 4=-4$;

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot(-3)=3$; $\qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 1=1$.

$$A^{-1}=\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ -4 & 1\end{pmatrix}.$$

Тоді $X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ -4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ 7\end{pmatrix}=\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}5+21\\ -20+7\end{pmatrix}=\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}26\\ -13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}.$

Звідки отримуємо $x_1=2$, $x_2=-1$.

Задача 2. Розв'язати систему третього порядку двома методами.

Розв'язання

а) $\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=1\\ x_1+3x_2+2x_3=-3\\ x_1+x_2 \qquad\quad =1\end{cases}$.

За формулами Крамера $x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$, $x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$, де

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -4 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=1\cdot A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-8-2=-10;$$

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ -3 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ -3 & 6 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=1\cdot A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 6 & 2\end{vmatrix}=-4-6=-10;$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & -4 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=1\cdot A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -4 & 2\end{vmatrix}=-4+4=0;$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -4 & -2\\ 1 & 2 & -4\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=1\cdot A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}-4 & -2\\ 2 & -4\end{vmatrix}=16+4=20.$$

$$x_1=\frac{-10}{-10}=1;\quad x_2=\frac{0}{-10}=0;\quad x_3=\frac{20}{-10}=-2.$$

б) $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ -3\\ 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$.

Знайдемо обернену матрицю $A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} = \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, для цього обчислимо $A_{ij}\left(i, j = \overline{1,3}\right)$.

$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$; $\quad A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2$;

$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2$; $\quad A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-1) = 1$;

$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$; $\quad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(3+1) = -4$;

$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$; $\quad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(6-1) = -5$;

$A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 1 = 10$.

Тоді $A^{-1} = \frac{1}{-10} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & -5 \\ -2 & -4 & 10 \end{pmatrix}$.

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & -5 \\ -2 & -4 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2-3-5 \\ 2+3-5 \\ -2+12+10 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$.

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Розв’язати систему методом Крамера та матричним методом $\begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 = -3 \end{cases}$.

Відповідь: $(x_1 = -3, x_2 = -1)$.

Задача 2. Розв’язати систему методом Крамера та матричним методом $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$.

Відповідь: $(x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3)$.

Задача 3. Розв’язати систему методом Крамера та матричним методом $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -13 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$.

Відповідь: $(1;-3;1)$.

3. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

3.1. Поняття вектора

Вектором будемо називати напрямлений відрізок $\bar{a} = \overline{AB}$, де A – початок, B – кінець відрізка. Довжина вектора (модуль) позначається символом $|\bar{a}| = |\overline{AB}|$.

Нульовим вектором називається вектор, довжина якого $|\bar{a}| = 0$.

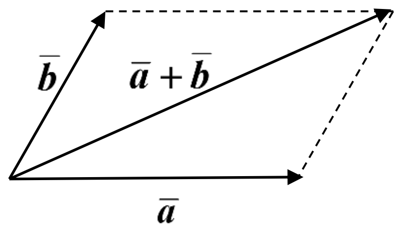
Вектори називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать на паралельних прямих (або на одній і тій самій прямій).

Вектори називаються ***компланарними***, якщо вони лежать у паралельних площинах (або в одній і тій самій площині).

Вектори називаються ***рівними***, якщо вони мають однакові довжини, колінеарні та однаково напрямлені.

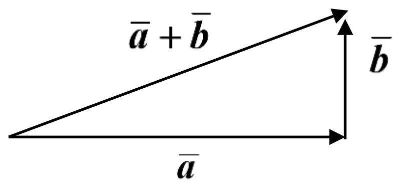
3.2. Лінійні операції над векторами

Додавання векторів. Щоб побудувати суму векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, треба відкласти ці вектори від довільної точки, побудувати на них паралелограм. Сумою векторів буде діагональ, що виходить з початку векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

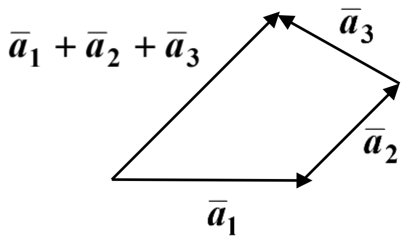


Цей спосіб побудови називається правилом паралелограма.

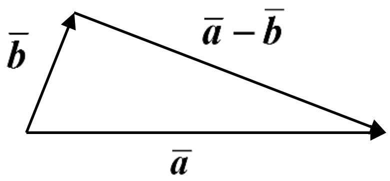
Суму двох векторів можна побудувати ще й за правилом трикутника. Відкласти вектор $\overline{b}$ від кінця вектора $\overline{a}$. Сумою векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ буде вектор, що з'єднує початок $\overline{a}$ з кінцем $\overline{b}$.



Щоб побудувати суму n даних векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, треба від довільної точки відкласти $\overline{a}_1$, потім від його кінця $\overline{a}_2$ і т.д., нарешті, від кінця $\overline{a}_{n-1}$ відкласти $\overline{a}_n$. Сумою векторів буде вектор, напрямлений від початку $\overline{a}_1$ до кінця $\overline{a}_n$.



<u>Віднімання векторів.</u> Щоб побудувати різницю векторів $\overline{a}-\overline{b}$, треба відкласти ці вектори від довільної точки, з'єднати їх кінці та обрати на цьому відрізку напрямок від кінця $\overline{b}$ до кінця $\overline{a}$.



Множення вектора на число. Добутком ненульового вектора $\bar{a}$ на число k називається вектор, довжина якого дорівнює $|k|\cdot|\bar{a}|$, напрямлений, тому що $\bar{a}$ (якщо $k>0$), протилежно напрямлений (якщо $k<0$), довільно напрямлений (якщо $k=0$, тобто $0\cdot\bar{a}=\bar{0}$).

3.3. Лінійна залежність векторів

Означення. Якщо вектор $\bar{b}=\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+...+\alpha_n\bar{a}_n$, де α_i – числа, $\bar{a}_i$ – вектори $\left(i=1,\overline{n}\right)$, то будемо говорити, що $\bar{b}$ є лінійною комбінацією векторів a_i.

Лінійна комбінація векторів називається ***тривіальною***, якщо всі її коефіцієнти $\alpha_i=0\left(i=1,\overline{n}\right)$ і ***нетривіальною***, якщо хоча б один з її коефіцієнтів відрізняється від нуля.

Означення. Вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ називаються ***лінійно незалежними***, якщо тільки їх тривіальна лінійна комбінація дорівнює нулю.

Означення. Вектори $a_i\left(i=1,\overline{n}\right)$ називаються ***лінійно залежними***, якщо існує нетривіальна комбінація цих векторів, що дорівнює нулю.

3.4. Розкладання вектора за базисом

Якщо вектор є лінійною комбінацією векторів, то кажуть, що він розкладається за даними векторами.

Означення. ***Базисом у просторі*** називають три некомпланарні вектори, взяті у визначеному порядку $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

Будь який вектор $\bar{a}$ розкладається за базисом, і це розкладання єдине:

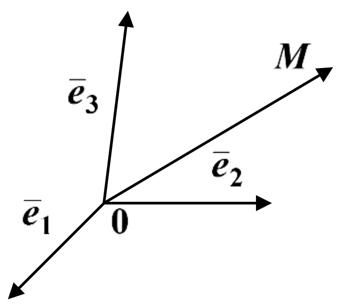
$$\bar{a} = a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \cdot \bar{e}_2 + a_3 \cdot \bar{e}_3,$$

(a_1, a_2, a_3) – числа, що називають координатами вектора $\bar{a}$ в даному базисі.

3.5. Декартова система координат

Означення. ***Декартовою системою координат*** називається сукупність точки та базису.

Точка називається початком координат. Прямі, що проходять через початок координат у напрямку базисних векторів, називаються ***осями координат*** (вісь абсцис, вісь ординат, вісь аплікат).



Радіусом вектора точки M називається вектор $\bar{r} = \overline{OM}$.

Означення. Координатами точки M у системі координат називаються координати вектора $\overline{\text{OM}}$.

Означення. ***Декартовою прямокутною системою координат*** називається система координат, базис якої створюють взаємно перпендикулярні вектори одиничної довжини.

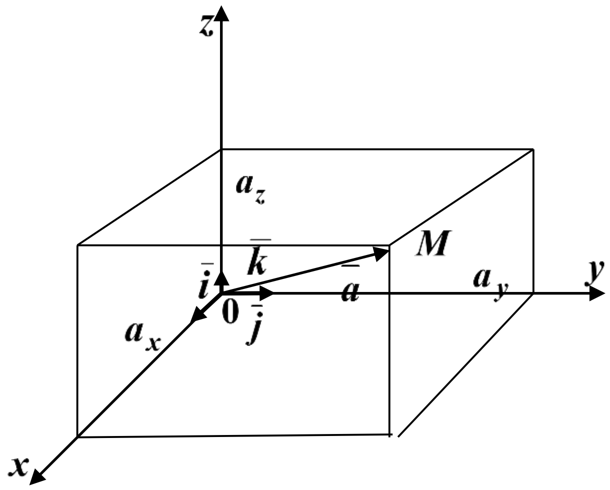
У цьому випадку базисні вектори $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ заведено позначати $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ (орти). Осі координат, які збігаються з напрямом $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, позначаються O_x, O_y, O_z. Координати точки M позначаються x, y, z .

Кожен вектор $\bar{a}$ може бути розкладеним за базисом $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, тобто для кожного вектора $\bar{a}$ знайдеться єдина трійка чисел (a_x, a_y, a_z) така, що справедлива рівність $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} = (a_x, a_y, a_z)$.

Числа a_x, a_y, a_z – декартові прямокутні координати вектора $\bar{a}$.

Декартові прямокутні координати (a_x, a_y, a_z) вектора $\bar{a}$ дорівнюють проекціями цього вектора на осі O_x, O_y, O_z відповідно.

Позначимо α, β, γ кути нахилу вектора $\bar{a}$ до осей O_x, O_y, O_z. Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називають напрямними косинусами вектора.



Для обчислення довжини вектора $\bar{a}$ та його напрямних косинусів будемо користуватися формулами:

$$|a_x| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,;\ \cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|},\cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}\,;$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Для обчислення координат вектора $\overline{M_1M_2}$, де $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, користуємось правилом $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Якщо задані вектори $\bar{a}(a_x; a_y; a_z)$ і $\bar{b}(b_x; b_y; b_z)$, то координати їх суми, різниці та добутку вектор $\bar{a}$ на число k обчислюємо за формулами:

$\bar{a} \pm \bar{b}\,\left(a_x \pm b_x ; a_y \pm b_y ; a_z \pm b_z\right)$;

$k \cdot \bar{a}\,\left(k a_x ; k a_y ; k a_z\right)$.

3.6. Ділення відрізка за даним відношенням

Нехай точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ з'єднані відрізком M_1M_2 і точка M ділить його у відношенні λ, тобто $M_1M : MM_2 = \lambda$. Тоді координати цієї точки знаходяться за формулами:

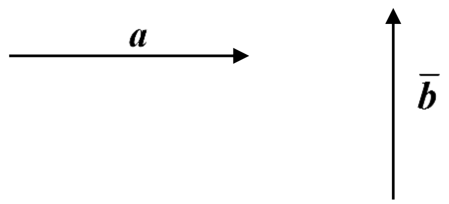
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Якщо M – середина відрізка M_1M_2, тобто $M_1M : MM_2 = 1$, то маємо формули :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

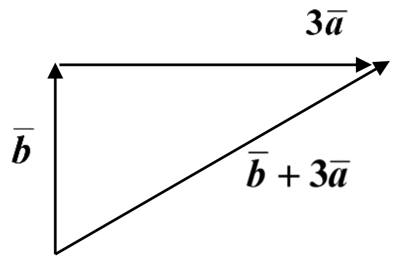
Зразки розв'язування задач

Задача 1. Дано ненульові вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Побудувати вектори $\bar{b} + 3\bar{a}$; $a - 2\bar{b}$.

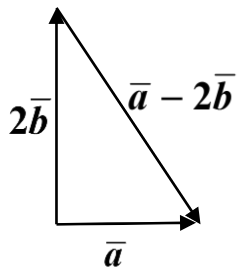


Розв'язання

Знайдемо суму за правилом трикутника.



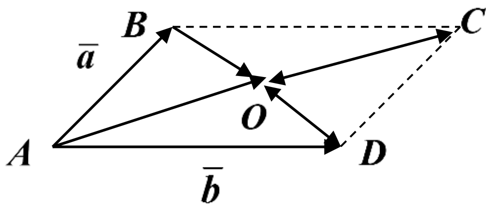
За означенням знайдемо різницю $\bar{a} - 2\bar{b}$.



Задача 2. Паралелограм побудований на векторах $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{AD} = \bar{b}$. Знайти вектори $\overline{AO}$, $\overline{CO}$, $\overline{BO}$, $\overline{DO}$.

Розв'язання

За правилом паралелограма $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} = \bar{a} + \bar{b}$, тоді $\overline{AO} = \dfrac{1}{2}\overline{AC} =$



$= \dfrac{1}{2}\left(\bar{a} + \bar{b}\right)$; $\overline{CO} = -\overline{AO} = -\dfrac{1}{2}\left(\bar{a} + \bar{b}\right)$.

За означенням різниці векторів:

$\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = \bar{b} - \bar{a}$.

Тоді $\overline{BO} = \dfrac{1}{2}\overline{BD} = \dfrac{1}{2}\left(\bar{b} - \bar{a}\right)$; $\overline{DO} = -\overline{BO} = -\dfrac{1}{2}\left(\bar{b} - \bar{a}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\bar{a} - \bar{b}\right)$.

Задача 3. Знайти довжину та напрямні косинуси радіус-вектора точки $M(1;0;-1)$. Обчислити кути нахилу вектора до координатних осей.

Розв'язання

$\bar{r} = \overline{OM}\ (1;0;-1)$.

$|\bar{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

$\cos\alpha = \dfrac{r_x}{|\bar{r}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$;

$\cos\beta = \dfrac{r_y}{|\bar{r}|} = \dfrac{0}{\sqrt{2}} = 0$, $\beta = \arccos 0 = 90^\circ$;

$$\cos\gamma=\frac{r_z}{|\bar r|}=\frac{-1}{\sqrt2}=-\frac{\sqrt2}{2},\quad \gamma=\arccos\left(-\frac{\sqrt2}{2}\right)=135^\circ.$$

Задача 4. Обчислити довжину вектора $\bar c=2\bar a-\bar b$, якщо $\bar a=\bar i-2\bar k$, $\bar b=3\bar j-\bar i-\bar k$.

Розв'язання

Знайдемо координати векторів: $\bar a(1;0;-2)$; $\bar b(-1;3;-1)$; $2\bar a(2;0;-4)$; $\bar c=2\bar a-\bar b=(2-(-1);0-3;-4-(-1))=(3;-3;-3)$.

Довжина вектора $|\bar c|=\sqrt{3^2+(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{27}=3\sqrt3$.

Задача 5. Знайти квадрат довжини медіани AM трикутника ABC, якщо $A(3;-2;1)$, $B(3;1;5)$, $C(4;0;3)$.

Розв'язання

Оскільки M – середина відрізка BC, то $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3+4}{2}=3{,}5$, $y_M=\frac{1+0}{2}=0{,}5$, $z_M=\frac{5+3}{2}=4$, $M(3{,}5;\,0{,}5;\,4)$.

Знайдемо координати вектора $\overline{AM}$, для чого від координат кінця M віднімемо координати початку A: $\overline{AM}(3{,}5;\,0{,}5+2;\,4-1)=(0{,}5;\,2{,}5;\,3)$.

Довжина вектора $|\overline{AM}|=\sqrt{(0{,}5)^2+(2{,}5)^2+3^2}=\sqrt{0{,}25+6{,}25+9}=\sqrt{15{,}5}$,

$|\overline{AM}|^2=15{,}5$.

Задача 6. На осі ординат знайти точку M таку, що $A(-4;2;0)$, рівновіддалена від неї і від початку координат.

Розв'язання

Будь-яка точка M на осі ординат має координати $x=z=0$, тобто $M(0;y;0)$. Початок координат $O(0;0;0)$. Згідно з умовою задачі $|\overline{AM}|=|\overline{OA}|$.

$$|\overline{AM}|=\sqrt{(0+4)^2+(y-2)^2+0^2};\quad |\overline{OA}|=\sqrt{(-4)^2+2^2+0^2}=\sqrt{20};$$

$$\sqrt{16+(y-2)^2}=\sqrt{20};\quad (y-2)^2=4;\quad y-2=\pm2;$$

$y_1 = 4$, $y_2 = 0$ (відкидаємо, тому що інакше A збігається з початком координат). $A(0;4;0)$.

Задача 7. Точки $A(0;1;-2)$, $B(3;-1;4)$, $C(2;-3;0)$ – послідовні вершини паралелограма. Знайти координати четвертої вершини D та довжини діагоналей.

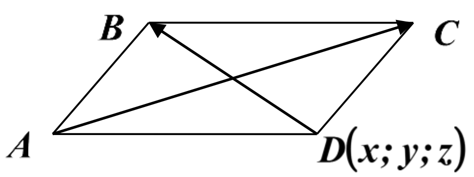
Розв'язання

Оскільки $\overline{AD} = \overline{BC}$, то координати цих векторів рівні:

$\overline{AD}(x-0; y-1; z+1)$; $\overline{BC}(2-3;-3+1;0-4) = (-1;-2;-4)$;

$x = -1$; $y - 1 = -2$; $z + 2 = -4$;

$y = -1$; $z = -6$.



$D(-1;-1;-6)$.

Обчислимо координати діагоналей та їх довжини

$\overline{AC}(2-0;-3-1;0+2) = (2;-4;2)$,

$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$,

$\overline{DB}(3+1;-1+1;4+6) = (4;0;10)$,

$\left|\overline{DB}\right| = \sqrt{4^2 + 10^2} = 2\sqrt{29}$.

Задача 8. Знайти координати вектора $\bar{a}$, якщо його довжина дорівнює $4\sqrt{3}$, а кути нахилу до Oy, Oz дорівнюють 150^0 і 60°.

Розв'язання

Відомо, що $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Звідки $\cos^2\alpha = 1 - \cos^2\beta -$

$$-\cos^2\gamma = 1 - \cos^2 150^\circ - \cos^2 60^\circ = 1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 0,$$

$\cos\alpha = 0$, $\alpha = \arccos 0 = 90^\circ$.

З формул $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\bar{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\bar{a}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\bar{a}|}$ отримаємо:

$a_x = |\bar{a}| \cdot \cos\alpha = 4 \cdot \sqrt{3} \cdot 0 = 0$,

$$a_y = |\bar{a}| \cdot \cos\beta = 4\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\cdot 3 = -6, \quad a_z = 4\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = 2\sqrt{3}.$$

$\bar{a}\left(0;-6;2\sqrt{3}\right)$ – шуканий вектор.

Задача 9. Дано вектор $\bar{b} = 5\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}$. Розкласти його за базисом, що утворюють три вектори $\bar{a}_1 = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{a}_2 = -\bar{i} + 3\bar{k}$, $\bar{a}_3 = \bar{i} - \bar{j}$.

Розв'язання

Розкладання вектора $\bar{b}$ за базисом $(\bar{a}_1;\bar{a}_2;\bar{a}_3)$ має вигляд:

$$\bar{b} = c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + c_3\bar{a}_3 = c_1(2;1;-1) + c_2(-1;0;3) + c_3(1;-1;0) =$$
$$= (2c_1 - c_2 + c_3; c_1 - c_3; -c_1 + 3c_2) = (5;-2;-1).$$

Рівні вектори мають рівні координати, тому має виконуватися:

$$\begin{cases} 2c_1 - c_2 + c_3 = 5 \\ c_1 \qquad\quad - c_3 = -2 \\ -c_1 + 3c_2 \qquad = -1 \end{cases}$$

Знайдемо розв'язок цієї системи (c_1, c_2, c_3) за формулами Крамера:

$$c_1 = \frac{\Delta_{c_1}}{\Delta}, \quad c_2 = \frac{\Delta_{c2}}{\Delta}, \quad c_3 = \frac{\Delta_{c3}}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8,$$

$$\Delta_{c_1} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8,$$

$$\Delta_{c_2} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0,$$

$$\Delta_{c_3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & 14 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 14 \end{vmatrix} = 14 + 10 = 24.$$

$$c_1 = \frac{8}{8} = 1, \quad c_2 = \frac{0}{8} = 0, \quad c_3 = \frac{24}{8} = 3.$$

Тоді $\bar{b} = 1 \cdot \bar{a}_1 + 0 \cdot \bar{a}_2 + 3 \cdot \bar{a}_3$ – розкладання за базисом.

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Дано вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Побудувати вектори $2\bar{a} + 3\bar{b}$, $2\bar{b} - \bar{a}$, $\bar{a} + \dfrac{\bar{b}}{2}$.

Задача 2. Знайти довжину і напрямні косинуси радіус-вектора точки $M(0;3;-4)$.

Відповідь: $|\bar{r}| = 5$; $\cos\alpha = 0$; $\cos\beta = \dfrac{3}{5}$; $\cos\gamma = -\dfrac{4}{5}$.

Задача 3. Обчислити довжину і напрямні косинуси вектора $\overline{AB}$, якщо $A(1;-2;0)$, $B(2;-3;0)$, а також кути α, β, γ.

Відповідь: $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{2}$; $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\beta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\gamma = 0$;

$\alpha = 45^\circ$; $\beta = 135^\circ$; $\gamma = 90^\circ$.

Задача 4. Обчислити довжину вектора $\bar{c} = 3\bar{b} - \bar{a}$, якщо $\bar{a} = \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - 2\bar{k}$.

Відповідь: $|\bar{c}| = 2\sqrt{5}$.

Задача 5. Знайти довжину сторони BC і медіани CM трикутника $A(1;0;-1)$, $B(2;1;-2)$, $C(0;2;1)$.

Відповідь: $\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{14}$; $\left|\overline{CM}\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{43}$.

Задача 6. На осі абсцис знайти точку $\boldsymbol{M}$, рівновіддалену від точки $\boldsymbol{A(3;-2;1)}$ і від початку координат.

Відповідь: $\boldsymbol{M\left(2\frac{2}{3};0;0\right)}$.

Задача 7. Точки $\boldsymbol{A(1;-1;0)}$, $\boldsymbol{B(3;0;1)}$, $\boldsymbol{C(2;1;-1)}$ – послідовні вершини паралелограма. Знайти координати четвертої вершини паралелограма $\boldsymbol{D}$ та координати точки перетину його діагоналей.

Відповідь: $\boldsymbol{D(0;0;-2)}$, $\boldsymbol{O(1{,}5;0;-0{,}5)}$.

Задача 8. Дано вектор $\boldsymbol{\bar{b} = 5\bar{i} + 6\bar{j} + 4\bar{k}}$. Розкласти його за базисом, що утворюють три вектори $\boldsymbol{\bar{a}_1 = \bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}}$, $\boldsymbol{\bar{a}_2 = -\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}}$, $\boldsymbol{\bar{a}_3 = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}}$.

Відповідь: $\boldsymbol{\bar{b} = 3 \cdot \bar{a}_1 - 1 \cdot \bar{a}_2 + 1\bar{a}_3}$.

3.7. Скалярний добуток двох векторів

Означення. ***Скалярним добутком двох векторів*** є число, яке дорівнює добутку довжини цих векторів на косинус кута між ними:

$$\boldsymbol{\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot cos(\bar{a},\wedge\, \bar{b})}.$$

Очевидні властивості скалярного добутку:

1 $\boldsymbol{\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}}$;

2. $\boldsymbol{\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2}$ (скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини);

3. $\boldsymbol{\bar{a} \cdot \bar{b} = 0}$ тоді і тільки тоді, коли вектори ортогональні ($\boldsymbol{(\bar{a},\wedge\, \bar{b}) = 0}$), або хоч один з них дорівнює нулю;

4. $\boldsymbol{(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}) \cdot \bar{c} = \alpha(\bar{a} \cdot \bar{c}) + \beta(\bar{b} \cdot \bar{c})}$, де $\boldsymbol{\bar{a}}$, $\boldsymbol{\bar{b}}$, $\boldsymbol{\bar{c}}$ – вектори, $\boldsymbol{\alpha, \beta}$ – числа.

Використовуючи властивості 3 і 2, дістаємо:

$\boldsymbol{\bar{i} \cdot \bar{j} = j \cdot i = 0}$; $\boldsymbol{\bar{i} \cdot \bar{k} = \bar{k} \cdot \bar{i} = 0}$; $\boldsymbol{\bar{j} \cdot \bar{k} = \bar{k} \cdot \bar{j} = 0}$; $\boldsymbol{\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 = 1}$.

Якщо вектори задано в координатному вигляді $\bar{a}(a_x; a_y; a_z)$, $\bar{b}(b_x; b_y; b_z)$, то $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$.

Кут між векторами обчислюється за формулою:

$$\cos(\bar{a},\wedge\ \bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Проекція вектора $\bar{a}$ на напрям вектора $\bar{b}$: $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}$.

Умова ортогональності векторів: $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

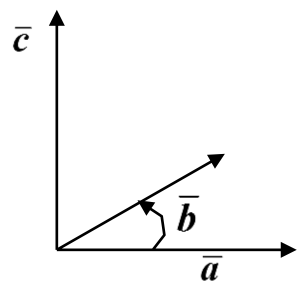
3.8. Векторний добуток двох векторів

Означення. ***Векторним добутком вектора*** $\bar{a}$ ***на вектор*** $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, який позначається $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ і задовольняє трьом умовам:

1. $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\bar{a},\wedge\ \bar{b})$;

2. $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$;

3. $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ утворюють праву трійку векторів, тобто третій вектор має такий напрям, що при спостереженні з його кінця найближчий поворот від $\bar{a}$ до $\bar{b}$ виконується проти годинникової стрілки:



Основні властивості векторного добутку:

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \cdot \bar{a}$;

2. $\bar{a} \times \bar{a} = \mathbf{0}$;

3. $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$ тоді і тільки тоді, коли $\bar{a}$ і $\bar{b}$ колінеарні, або хоча б один є нульовий вектор;

4. $\left(\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\alpha\left(\bar{a}\times\bar{c}\right)+\beta\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)$.

Через те, що $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – правий ортонормований базис, маємо:

$\bar{i}\times\bar{i}=\bar{j}\times\bar{j}=\bar{k}\times\bar{k}=\bar{0}$; $\quad \bar{i}\times\bar{j}=\bar{k}$; $\quad \bar{j}\times\bar{k}=\bar{i}$; $\quad \bar{k}\times\bar{i}=\bar{j}$.

Векторний добуток векторів, заданих своїми координатами, обчислюється за формулою:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Векторний добуток використовується при знаходженні площі паралелограма і трикутника, побудованих на $\bar{a}$ і $\bar{b}$ як на сторонах:

$$S_{\text{паралел.}}=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|;\quad S_{\text{трик.}}=\frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|,$$

а також в умові колінеарності двох векторів:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0} \text{ або } \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

3.9. Мішаний добуток трьох векторів

Означення. ***Мішаним добутком трьох векторів*** називається добуток $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}$, який частіше позначається $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$.

Основні властивості мішаного добутку такі:

1. При циклічній перестановці співмножників мішаний добуток не зміниться $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{a}=\bar{c}\,\bar{a}\,\bar{b}$.

2. $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=0$ тоді і тільки тоді, коли $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – компланарні.

Використання мішаного добутку в задачах геометрії для обчислення об’єму паралелепіпеда і трикутної піраміди:

$$V_{\textit{паралелепіпеда}}=\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c},\qquad V_{\textit{піраміди}}=\frac{1}{6}\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c},$$

якщо відомі координати векторів, то мішаний добуток дорівнює

$$\bar a\,\bar b\,\bar c=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Зразки розв'язування задач

Задача 1. Знайти скалярний добуток векторів $\bar a = 2\bar i - 3\bar j + \bar k$ і $\bar b = 3\bar k - \bar i$.

Розв'язання

Знайдемо координати векторів $\bar a(2;-3;1)$, $\bar b(-1;0;3)$.

Тоді $\bar a\cdot\bar b = 2\cdot(-1)+(-3)\cdot 0 + 1\cdot 3 = -2+3=1$.

Задача 2. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\bar a = \bar j - 2\bar k$ і $\bar b = \bar k - \bar i - 2\bar j$.

Розв'язання

Діагоналі паралелограма $\bar d_1 = \bar a + \bar b$ і $\bar d_2 = \bar a - \bar b$. Знайдемо їх координати:

$\bar d_1 = (\bar j - 2k) + (\bar k - \bar i - 2\bar j) = -\bar i - \bar j - \bar k = (-1;-1;-1)$,

$$\bar d_2 = (\bar j - 2\bar k) - (\bar k - \bar i - 2\bar j) = \bar i + 3\bar j - 3\bar k = (1;3;-3).$$

Тоді $cos(d_1,\wedge\, d_2) = \dfrac{\bar d_1\cdot\bar d_2}{|\bar d_1|\cdot|\bar d_2|} = \dfrac{(-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 3 + (-1)\cdot(-3)}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{1+9+9}} =$

$$= \frac{-1-3+3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{19}} = -\frac{1}{\sqrt{57}} = -\frac{\sqrt{57}}{57}.$$

Кут між діагоналями $(\bar d_1,\wedge\,\bar d_2) = arccos\left(-\dfrac{\sqrt{57}}{57}\right)$.

Задача 3. Дано вектори $\bar a(2;3;1)$ і $\bar b(-1;0;3)$. Знайти: а) $cos(\bar b,\wedge\, 3\bar a - 2\bar b)$; б) $ïð_{\bar b - 2\bar a}\,\bar a$.

Розв'язання

а) Позначимо через $\bar c$ вектор $3\bar a - 2\bar b$, знайдемо його координати $\bar c = 3\cdot(2;3;1) - 2\cdot(-1;0;3) = (6;9;3) - (-2;0;6) = (8;9;-3)$.

Тоді $\boldsymbol{cos\left(\bar{b},^{\wedge}\, c\right) = \frac{\bar{b}\cdot\bar{c}}{|\bar{b}|\cdot|\bar{c}|} = \frac{-1\cdot 8+0\cdot 9+3\cdot(-3)}{\sqrt{1+0+9}\cdot\sqrt{64+81+9}} = \frac{-17}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{154}}}$.

б) Нехай $\boldsymbol{\bar{d} = \bar{b} - 2\bar{a} = (-1;0;3) - 2\cdot(2;3;1) = (-1;0;3) - (4;6;2) =}$ $\boldsymbol{= (-5;-6;1)}$. Тоді $np_{\bar{d}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{d}}{|\bar{d}|} = \frac{2\cdot(-5)+3\cdot(-6)+1\cdot 1}{\sqrt{25+36+1}} = \frac{-27}{\sqrt{62}}$.

Задача 4. Встановити, при якому $\boldsymbol{\alpha}$ будуть ортогональні вектори $\boldsymbol{\bar{a} = \alpha\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}}$ і $\boldsymbol{\bar{b} = 2\bar{j} - 3\bar{i} + \alpha\bar{k}}$.

Розв'язання

Використаємо умову ортогональності: $\boldsymbol{\bar{a}\cdot\bar{b} = 0}$. $\boldsymbol{\bar{a}\cdot\bar{b} = -3\cdot\alpha - 2 + 4\alpha = 0}$, $\boldsymbol{\alpha = 2}$.

Задача 5. Знайти площу паралелограма, побудованого на $\boldsymbol{\bar{a} = 4\bar{j} - 2\bar{i}}$ і $\boldsymbol{\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}}$.

Розв'язання

Координати векторів: $\boldsymbol{\bar{a} = (-2;4;0)}$, $\boldsymbol{\bar{b} = (1;1;-1)}$. $\boldsymbol{S_{ïàðàë.} = |\bar{a}\times\bar{b}|}$.

Обчислимо векторний добуток: $\boldsymbol{\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i}\cdot(-4-0) -}$ $\boldsymbol{- \bar{j}\cdot(2-0) + \bar{k}\cdot(-2-4) = -4\bar{i} - 2\bar{j} - 6\bar{k}}$.

Тоді $\boldsymbol{V_{ïàðàë.} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{16+4+36} = \sqrt{56}}$.

Задача 6. Обчислити площу трикутника $\boldsymbol{ABC}$, якщо $\boldsymbol{A(0;1;2)}$, $\boldsymbol{B(-1;0;4)}$, $\boldsymbol{C(1;3;3)}$.

Розв'язання

Трикутник побудовано на векторах $\boldsymbol{\bar{a} = \overline{AB}(-1-0;0-1;4-2) =}$ $\boldsymbol{= (-1;-1;2)}$ і $\boldsymbol{\bar{b} = \overline{AC}(1-0;3-1;3-2) = (1;2;1)}$.

$$\boldsymbol{S_{\Delta} = \frac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}|}.$$

Обчислимо

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot(-1-4)-\bar{j}\cdot(-1-2)+\bar{k}\cdot(-2+1)=$$

$$=-5\bar{i}+3\bar{j}-\bar{k}.$$

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-5)^2+3^2+(-1)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{35}.$$

Задача 7. При яких значеннях α і β вектори $\bar{a}=\alpha\bar{i}-2\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}+4\bar{j}+\beta\bar{k}$ колінеарні?

Розв'язання

Умова колінеарності: $\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$. Тобто $\frac{\alpha}{2}=\frac{-2}{4}=\frac{3}{\beta}$.

Звідки $\alpha=\frac{2\cdot(-2)}{4}=-1$; $\beta=\frac{4\cdot 3}{-2}=-6$.

Задача 8. Знайти об'єм піраміди $OKLM$, де O – початок координат, $K(2;1;3)$, $L(-1;0;2)$, $M(0;1;1)$.

Розв'язання

Піраміда побудована на векторах $\bar{a}=\overline{OK}(2;1;3)$, $\bar{b}=\overline{OL}(-1;0;2)$, $\bar{c}=\overline{OM}(0;1;1)$.

Об'єм піраміди $V_{\text{пір.}}=\frac{1}{6}\left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right|$.

Обчислимо $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -2 & 3\\ -1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ -1 & -2\end{vmatrix}=-4-2=-6$.

$$V_{\text{ïₒð}.}=\frac{1}{6}\left|-6\right|=\frac{6}{6}=1.$$

Задача 9. Обчислити $(3\bar{i}\times\bar{j}-2\bar{k}\times\bar{k})\cdot(\bar{j}-4\bar{k})$.

Розв'язання

Враховуючи, що $\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k}$, $\bar{k}\times\bar{k}=\bar{0}$, маємо $\left(3\bar{i}\times\bar{j}-2\bar{k}\times\bar{k}\right)\cdot\left(\bar{j}-4\bar{k}\right)=$ $=3\bar{k}\cdot\left(\bar{j}-4\bar{k}\right)=3\bar{k}\cdot\bar{j}-12\bar{k}^2=3\cdot 0-12\cdot 1=-12$.

Задача 10. Паралелограм побудовано на векторах $\bar{a}=2\bar{m}+\bar{n}$ і $\bar{b}=\bar{m}-3\bar{n}$, де $|\bar{m}|=1$, $|\bar{n}|=2$, $\left(\bar{m},\wedge\,\bar{n}\right)=60^\circ$. Обчислити довжини векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ та косинус кута між ними.

Розв'язання

Відомо, що $|\bar{a}|^2=\bar{a}^2$, тоді $|\bar{a}|^2=\left(2\bar{m}+\bar{n}\right)^2=4\bar{m}^2+4\bar{m}\cdot\bar{n}+\bar{n}^2=$ $=4\cdot 1^2+4\cdot 1\cdot 2\cdot\cos 60^\circ+2^2=4+4\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}+4=12$, $|\bar{a}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

$|\bar{b}|^2=\bar{b}^2=\left(\bar{m}-3\bar{n}\right)^2=\bar{m}^2-6\bar{m}\cdot\bar{n}+9\bar{n}^2=1^2-6\cdot 1\cdot 2\cdot\cos 60^\circ+9\cdot 2^2=$ $=1-6+36=31$, $|\bar{b}|=\sqrt{31}$.

$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left(2\bar{m}+\bar{n}\right)\cdot\left(\bar{m}-3\bar{n}\right)=2\bar{m}^2-6\bar{m}\cdot\bar{n}+\bar{n}\cdot\bar{m}-3\bar{n}^2=2\bar{m}^2-5\bar{m}\cdot\bar{n}-$ $-3\bar{n}^2=2\cdot 1^2-5\cdot 1\cdot 2\cdot\cos 60^\circ-3\cdot 2^2=2-5-12=-15$.

Тоді $\cos\left(\bar{a},\wedge\,\bar{b}\right)=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\dfrac{-15}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{31}}$.

Задача 11. Перевірити, чи є вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ компланарними, якщо $\bar{a}=3\bar{j}-\bar{i}+\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{c}=\bar{j}-2\bar{k}$.

Розв'язання

Перевіримо, чи виконується умова компланарності трьох векторів $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=0$.

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-\left(-2-2\right)=4\neq 0.$$

Вектори не є компланарними.

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Знайти кут ABC у трикутнику з вершинами $A(0;-1;2)$, $B(1;0;4)$, $C(-1;-1;3)$.

Відповідь: $\arccos\frac{5}{6}$.

Задача 2. Знайти проекцію вектора $\bar{b}+3\bar{a}$ на вектор $\bar{a}$, якщо $\bar{a}=\bar{k}-2\bar{i}$, $\bar{b}=\bar{j}-\bar{i}-\bar{k}$.

Відповідь: $\frac{11\sqrt{5}}{5}$.

Задача 3. Дано вектори $\bar{a}=2\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{b}=3\bar{i}+\bar{j}-4\bar{k}$, $\bar{c}=2\bar{k}+4\bar{i}-4\bar{j}$.

Перевірити, чи будуть:

1) $\bar{a}$ і $\bar{b}$ ортогональні.

2) $\bar{a}$ і $\bar{c}$ колінеарні.

3) $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарні.

Задача 4. Знайти площу трикутника з вершинами $A(2;0;1)$, $B(3;-1;1)$, $C(1;1;0)$, а також довжину висоти BD.

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Задача 5. При яких значеннях α і β вектор $\bar{a}=\bar{i}+\alpha\bar{j}-3\bar{k}$ буде ортогональним $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}-3\bar{k}$ і колінеарним $\bar{c}=2\bar{i}+2\bar{j}+\beta\bar{k}$?

Відповідь: $\alpha=1$, $\beta=-6$.

Задача 6. Знайти об'єм паралелепіпеда $OKLM$, де $K(1;1;1)$, $L(2;0;-1)$, $M(-3;0;1)$.

Відповідь: 1.

Задача 7. Обчислити $(2\bar{k}\times 3\bar{j}-4\bar{i}\times\bar{j})\cdot(2\bar{i}-\bar{j})$.

Відповідь: -12.

Задача 8. При якому значенні α вектори $\bar{a}=\alpha\bar{m}-\bar{n}$ і $\bar{b}=m+2\bar{n}$ будуть ортогональними, якщо $|\bar{m}|=2$, $|\bar{n}|=1$, і кут між $\bar{m}$, $\bar{n}$ дорівнює 120°.

Відповідь: $\alpha = 0,5$.

Задача 9. Сторони трикутника $\boldsymbol{ABC}$ збігаються з векторами $\overline{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{m} + 2\overline{\boldsymbol{n}}$ і $\overline{\boldsymbol{AC}} = 2\overline{\boldsymbol{m}} + \overline{\boldsymbol{n}}$. Обчислити довжину сторони $\boldsymbol{CB}$, якщо $|\overline{\boldsymbol{m}}| = \sqrt{2}$, $|\overline{\boldsymbol{n}}| = 2$ і кут між векторами $\overline{\boldsymbol{m}}$, $\boldsymbol{n}$ дорівнює 45°.

Відповідь: $\sqrt{26}$.

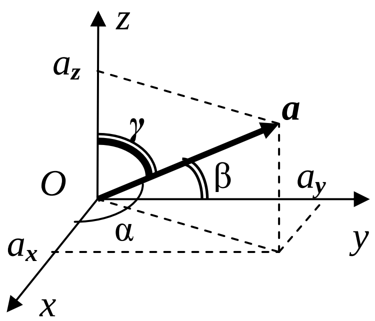
Задача 10. Паралелограм побудовано на векторах $\overline{\boldsymbol{AB}} = 2\overline{\boldsymbol{m}} - \overline{\boldsymbol{n}}$ та $\overline{\boldsymbol{AD}} = \boldsymbol{m} + 3\overline{\boldsymbol{n}}$. Обчислити довжину діагоналі $\overline{\boldsymbol{AC}}$, якщо $|\overline{\boldsymbol{m}}| = 1$, $|\overline{\boldsymbol{n}}| = 2$ та кут між $\overline{\boldsymbol{m}}$, $\overline{\boldsymbol{n}}$ дорівнює 120°.

Відповідь: $\sqrt{13}$.

Задача 11. З'ясувати, чи будуть ортогональними вектори $\overline{\boldsymbol{a}} = 3\overline{\boldsymbol{m}} - 2\overline{\boldsymbol{n}}$ та $\overline{\boldsymbol{b}} = \overline{\boldsymbol{m}} - \overline{\boldsymbol{n}}$, якщо $|\overline{\boldsymbol{m}}| = 2$; $|\overline{\boldsymbol{n}}| = 3$ і кут між векторами $\overline{\boldsymbol{m}}$ та $\overline{\boldsymbol{n}}$ дорівнює 60°

Відповідь: Ні.

3.10. Довідник з формулами векторної алгебри



$\overline{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a_x} \cdot \overline{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{a_y} \cdot \overline{\boldsymbol{j}} + \boldsymbol{a_z} \cdot \overline{\boldsymbol{k}} = (\boldsymbol{a_x}; \boldsymbol{a_y}; \boldsymbol{a_z})$

$|\overline{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{\boldsymbol{a_x^2} + \boldsymbol{a_y^2} + \boldsymbol{a_z^2}}$

СКАЛЯРНИЙ ТА ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Добуток	**скалярний**	**векторний**
Позначка	$\vec{a}\cdot\vec{b}$, $(\vec{a},\vec{b})$	$\vec{a}\times\vec{b}$, $[\vec{a},\vec{b}]$
Тип величини	**число**	**вектор**
Визначення	$\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert\cos(\vec{a},\vec{b})$	$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, **якщо** **1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;** **2) $\lvert\vec{c}\rvert=\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert\sin(\vec{a},\vec{b})$;** **3) трійка векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ права**
Властивості	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ $\vec{a}\cdot\vec{a}=\lvert\vec{a}\rvert^2$	$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ $\vec{a}\times\vec{a}=0$
Добутки ортів	$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$ $\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0$	$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$ $\to+\quad\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}\ \vec{i}\ \vec{j}\quad\leftarrow-$
Обчислення у ДСК	$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$	$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$
Основні задачі	**довжина вектора** $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ **косинус кута між векторами** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}$ **проекція вектора на другий вектор** $np_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{b}\rvert}$ **умова перпендикулярності** $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$	**площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$** $S=\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert$ **площа трикутника** $S_\Delta=\dfrac{\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert}{2}$ **висота паралелограма** $h_a=\dfrac{S}{\lvert\vec{a}\rvert}=\dfrac{\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert}$ **висота трикутника** $h_a=\dfrac{2S_\Delta}{\lvert\vec{a}\rvert}=\dfrac{\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert}$

$$\overline{AB} = \left(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\right)$$

$$\bar{a} + \bar{b} = \left(a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z\right)$$
$$\bar{a} - \bar{b} = \left(a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z\right)$$
$$\lambda\bar{a} = \left(\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\right)$$

Умова колінеарності векторов $\quad \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$

МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРОВ

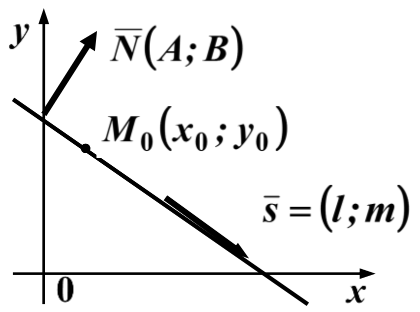
Позначка	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ **або** $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$
Визначення	$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$
Властивості	$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$
Обчислення в декартовій системі координат	$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$
Основні задачі	**умова компланарності трьох векторов** $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ **орієнтація трійки векторів** $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$ **-права трійка** $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$ **-ліва трійка** **об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах** $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ $V_{паралелепіпеда} = \left\|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right\|$ **об'єм піраміди, побудованої на векторах** $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ $V_{піраміди} = \dfrac{1}{6}\left\|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right\|$ **висота паралелепіпеда, яка опущена на грань, що побудована на векторах** $\vec{a},\vec{b}$

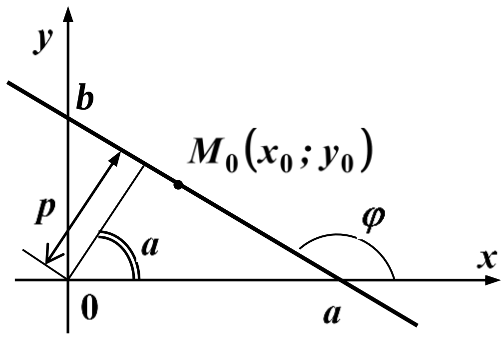
	$h=\dfrac{V_{паралелепіпеда}}{S_{грані}}=\dfrac{\left\|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right\|}{\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|}$ **висота піраміди, яка опущена на грань, що побудована на векторах $\vec{a},\vec{b}$** $h=\dfrac{3V_{піраміды}}{S_{грані}}=\dfrac{\left\|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right\|}{\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|}$

4. ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ

4.1. ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ

Розглянемо рівняння прямої в площині Oxy.





Слід знати такі рівняння прямої:

1) $Ax+By+C=0$ – загальне рівняння; вектор $\overline{N}(A;B)$ перпендикулярний до прямої і називається її нормальним вектором;

2) $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ – найпростіше рівняння; $(x_0;y_0)$ – координати точки, що належить прямій;

3) $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$ – канонічне рівняння; вектор $\bar{s}(l;m)$ називається напрямним вектором прямої;

4) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ – рівняння прямої, яка проходить через дві точки: $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$;

5) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ – рівняння у відрізках на осях, де $(a;0)$ і $(b;0)$ – точки перетину прямої з осями координат;

6) $y=kx+b$ – рівняння з кутовим коефіцієнтом, $k=tg\varphi$ – кутовий коефіцієнт прямої, φ – кут між прямою та віссю Ox;

7) $y-y_0=k(x-x_0)$ – рівняння прямої, яка проходить у заданому напрямку;

8) $x\cdot\cos\alpha+y\cdot\sin\alpha-p=0$ – нормальне рівняння; p – довжина перпендикуляра до прямої, проведеного з початку координат; α – кут між цим перпендикуляром і віссю Ox. Перехід від загального рівняння до нормального здійснюється за допомогою множника $M=\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, знак якого обирають протилежним знаку C в загальному рівнянні.

Розглянемо окремі випадки рівняння прямої.

Вид рівняння	***Розташування прямої на рисунку***
$Ax+By=0$	Проходить через початок координат
$By+C=0$	Паралельна осі Ox
$Ax+C=0$	Паралельна осі Oy
$y=0$	Збігається з віссю Ox
$x=0$	Збігається з віссю Oy

Під час розв'язування задач використовуються такі формули:

1) $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$; $k=tg\varphi$ – кутовий коефіцієнт;

2) $k_2=k_1$; $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$ – умова паралельності прямих;

3) $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$; $k_1\cdot k_2+1=0$; $A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0$ – умова перпендикулярності прямих;

4) $tg\theta=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|=\left|\dfrac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right|$ – гострий кут між прямими (якщо знаменники в цих формулах дорівнюють 0, кут $\theta=90^\circ$);

5) $d(M)=\left|x_M \cdot \cos\alpha + y_M \cdot \sin\alpha - p\right|$;

$d(M)=\dfrac{\left|Ax_M + By_M + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ – відстань від точки M до прямої;

6) $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ – довжина відрізка AB, $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.

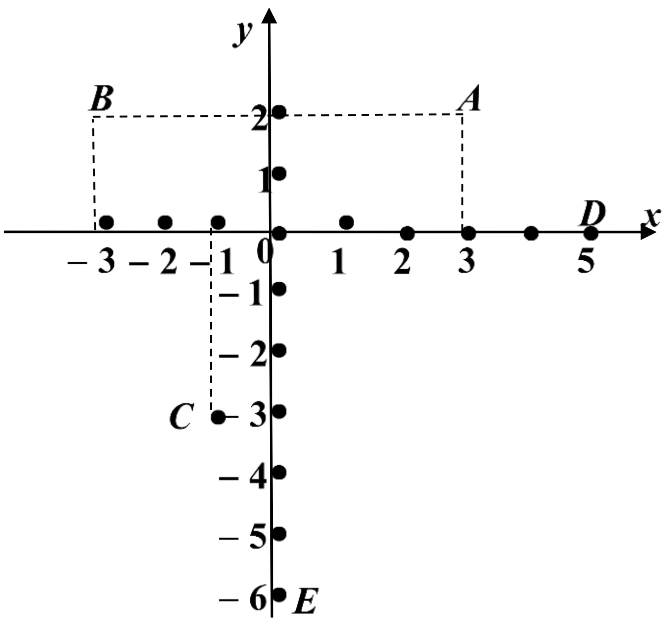
Зразки розв'язування задач

Задача 1. Побудувати точки $A(3;2)$, $B(-3;2)$, $C(-1;-3)$, $D(5;0)$, $E(0;-6)$.

Розв'язання

Оберемо одиницю масштабу на осях координат. Позначимо точку $x = 3$ і через неї проведемо перпендикуляр до осі Ox. На осі Oy позначимо точку $y = 2$ і через неї проведемо перпендикуляр до осі Oy. Точка перетину цих перпендикулярів і є шукана точка $A(3;2)$.

Користуючись аналогічними міркуваннями, будуємо інші точки.



Задача 2. Побудувати прямі:

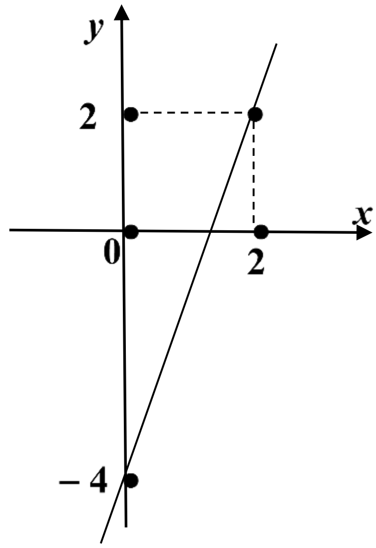
а) $y = 3x - 4$; б) $2x - 3y + 6 = 0$; в) $2x - 3y = 0$; г) $y = 5$; д) $2x + 5 = 0$.

Розв'язання

а) Для того, щоб побудувати пряму лінію, достатньо знати координати двох точок, які належать цій прямій. Нехай $x_1 = 0$, тоді $y_1 = 3 \cdot 0 - 4 = -4$;

$x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 3 \cdot 2 - 4 = 2$. Отримані результати для зручності можна занести в таблицю:

x	y
0	**– 4**
2	**2**

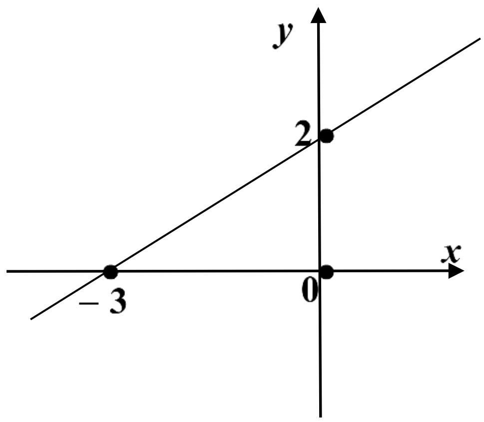


б) Якщо рівняння прямої записане у загальному вигляді $(Ax + By + C = 0)$, найбільш раціональним розв'язком буде приведення його до вигляду у відрізках на осях $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\right)$.

$$2x - 3y + 6 = 0 \Rightarrow 2x - 3y = -6 \Rightarrow \frac{2x}{-6} - \frac{3y}{-6} = \frac{-6}{-6} \Rightarrow \frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1.$$

Отримали $a = -3$; $b = 2$.

Таким чином, пряма проходить через точки $(-3;0)$ та $(0;2)$.

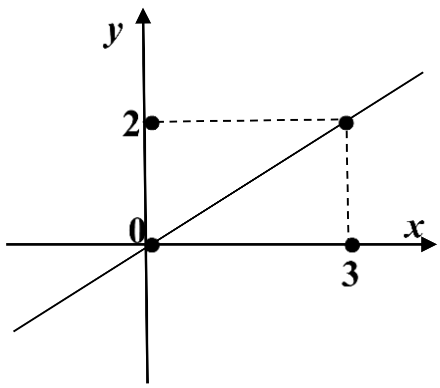


в) Рівняння $2x-3y=0$ також записане в загальному вигляді. Але його не можна привести до рівняння у відрізках на осях тому, що відсутній вільний член рівняння $(C=0)$. Перетворимо рівняння до вигляду $y=k\,x+b$.

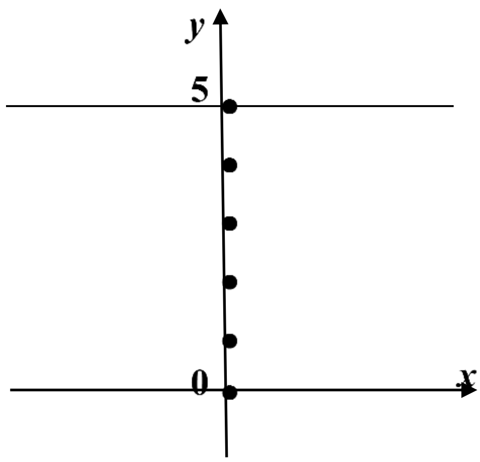
$$2x-3y=0 \Rightarrow -3y=-2x \Rightarrow y=\frac{-2x}{-3} \Rightarrow y=\frac{2x}{3}.$$

Оскільки $C=0$, пряма проходить через початок координат. Нехай $x_1=3 \Rightarrow y_1=\frac{2\cdot 3}{3}=2$.

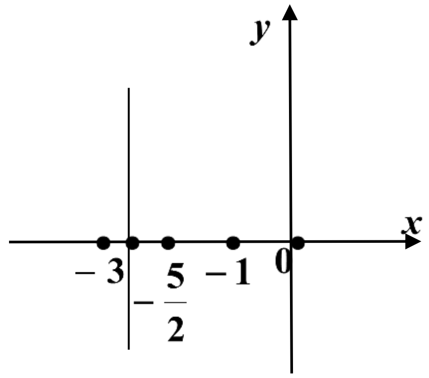
Через точки $(0;0)$ та $(3;2)$ проведемо пряму.



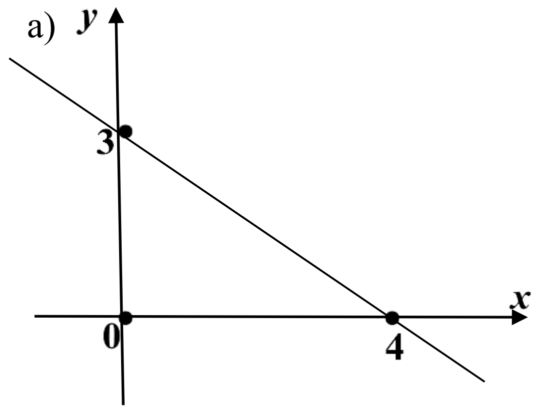
г) Пряма $y=5$ проходить через точку $(0;5)$ паралельно осі Ox.

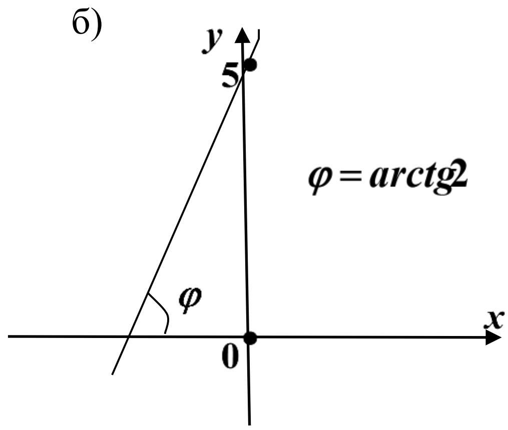


д) Пряма $2x+5=0$ паралельна осі Oy і проходить через точку $\left(-\frac{5}{2};0\right)$.



Задача 3. Записати рівняння прямої, зображеної на рисунку. Обчислити відстань від початку координат до цієї прямої:





Розв'язання

а) З рисунка видно, що відомі точки перетину прямої з координатними осями $(4;0)$ та $(0;3)$. Тому для розв'язування задачі будемо користуватися формулою $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

$$a=4;\quad b=3\Rightarrow \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1.$$

Приведемо це рівняння до загального вигляду $(Ax+By+C=0)$.

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1\Rightarrow \frac{x}{4}+\frac{y}{3}-1=0\Rightarrow \frac{3x+4y-4\cdot 3}{4\cdot 3}=0\Rightarrow 3x+4y-12=0.$$

Для обчислення відстані від початку координат до прямої $3x+4y-12=0$ використаємо формулу $d(M)=\frac{|Ax_M+By_M+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, де $A=3$; $B=4$; $C=-12$; $x_M=0$; $y_M=0$.

$$d=\frac{|3\cdot 0+4\cdot 0-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-12|}{\sqrt{9+16}}=\frac{12}{\sqrt{25}}=\frac{12}{5}=2{,}4.$$

б) З рисунка видно, що пряма проходить через точку $(0;5)$ і нахилена до осі Ox під кутом $\varphi = arctg\,2$. Розглянемо формулу $y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$, де $k = tg\varphi = tg(arctg2) = 2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 5$.

Отримаємо: $y - 5 = 2 \cdot (x = 0) \Rightarrow\ y - 5 = 2x \Rightarrow 2x - y + 5 = 0$.

Ми отримали загальне рівняння прямої, де $A = 2$, $B = -1$, $C = 5$.

Відстань від початку координат (тобто точки $(0;0)$) до прямої $2x - y + 5 = 0$:

$$d = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 0 - 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{4+1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5})^2}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Задача 4. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-7;2)$ і $B(3;9)$.

Розв'язання

Використовуючи рівняння $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, де $x_1 = -7$, $y_1 = 2$; $x_2 = 3$, $y_2 = 9$, отримаємо:

$$\frac{x - (-7)}{3 - (-7)} = \frac{y - 2}{9 - 2} \Rightarrow \frac{x + 7}{10} = \frac{y - 2}{7} \Rightarrow 7 \cdot (x + 7) = 10 \cdot (y - 2) \Rightarrow 7x + 49 =$$

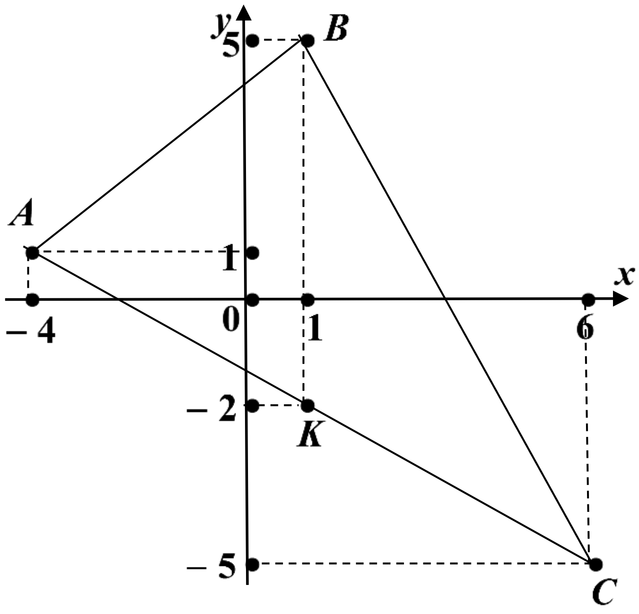
$$= 10y - 20 \Rightarrow 7x - 10y + 49 + 20 = 0 \Rightarrow 7x - 10y + 69 = 0.$$

Задача 5. В трикутнику з вершинами $A(-4;1)$, $B(1;5)$, $C(6;-5)$ знайти рівняння та довжину медіани BK.

Розв'язання

Точка K є серединою відрізка AC, тому:

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1; \quad y_k = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2.$$



Нам відомі дві точки, які з'єднують медіану BK: $B\left(\underset{x_1}{1};\underset{y_1}{5}\right)$ та $K\left(\underset{x_2}{1};\underset{y_2}{-2}\right)$.

Будемо використовувати формулу:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\Rightarrow\frac{x-1}{1-1}=\frac{y-5}{-2-5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x-1}{0}=\frac{y-5}{-7}.$$

Отримали канонічне рівняння прямої з напрямним вектором $\bar{s}(0;-7)$.

Загальне рівняння цієї прямої: $x-1=0$. Довжина медіани BK:

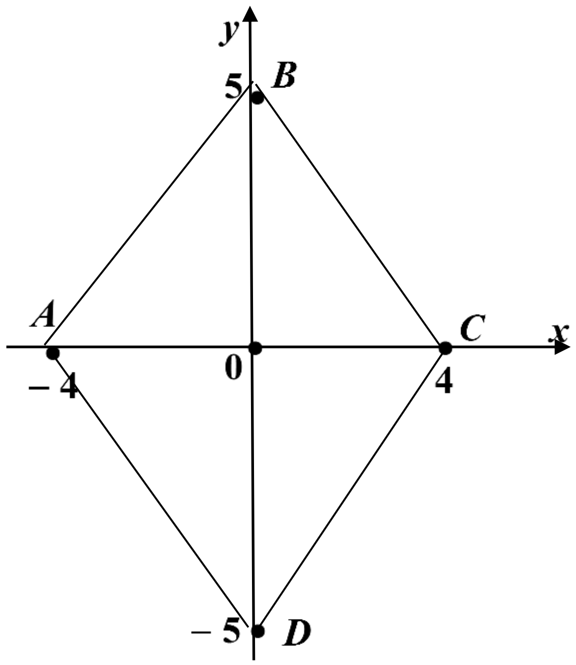
$$|BK|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(1-1)^2+(-2-5)^2}=\sqrt{0+(-7)^2}=$$

$$=\sqrt{49}=7.$$

Задача 6. Діагоналі ромба, які дорівнюють 8 та 10 одиницям, лежать на координатних осях Ox та Oy відповідно. Записати рівняння сторін ромба.

Розв'язання

Зі шкільного курсу геометрії відомо, що діагоналі ромба точкою перетину діляться навпіл, тому $d_1:2=8:2=4$; $d_2:2=10:2=5$.



Використовуючи рівняння прямої у відрізках на осях $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, запишемо рівняння сторін ромба:

AB: $\frac{x}{-4}+\frac{y}{5}=1$; BC: $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$;

CD: $\frac{x}{4}+\frac{y}{-5}=1$; AD: $\frac{x}{-4}+\frac{y}{-5}=1$.

Задача 7. Знайти точку перетину прямих $x-5y+7=0$ та $x+y+1=0$.

Розв'язання

Щоб знайти точку перетину прямих, розв'яжемо систему рівнянь методом Крамера: $\begin{cases} x-5y=-7; \\ x+y=-1. \end{cases}$

$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1-(-5)=6$; $\qquad \Delta_x=\begin{vmatrix} -7 & -5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-7-5=-12$;

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1+7=6$; $\qquad x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}=\dfrac{-12}{6}=-2$; $y=\dfrac{\Delta y}{y}=\dfrac{6}{6}=1$.

Точка $(-2;1)$ є точкою перетину прямих.

Задача 8. З'ясувати, чи будуть паралельними прямі $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{7}=1$ та AB, якщо $A(2;-3)$, $B(6;-10)$.

Розв'язання

Перетворимо рівняння $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{7}=1$ до вигляду $y=kx+b$ і знайдемо кутовий коефіцієнт k цієї прямої.

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{7}=1 \Rightarrow \frac{y}{7}=-\frac{x}{4}+1 \,|\cdot 7 \Rightarrow y=-\frac{7}{4}x+7 \Rightarrow k_1=-\frac{7}{4}.$$

Кутовий коефіцієнт прямої AB обчислимо за формулою:

$$k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-10-(-3)}{6-2}=\frac{-10+3}{4}=-\frac{7}{4} \Rightarrow k_2=-\frac{7}{4}.$$

Умова паралельності прямих $k_1=k_2 \Rightarrow -\dfrac{7}{4}=-\dfrac{7}{4}$ виконується, отже, прямі паралельні.

Задача 9. З'ясувати, чи будуть перпендикулярними прямі $4x-5y+2=0$ та AB, якщо $A(-1;4)$ і $B(3;9)$.

Розв'язання

Перетворимо рівняння прямої $4x-5y+2=0$ до вигляду $y=kx+b$ і знайдемо кутовий коефіцієнт (k) цієї прямої:

$$4x-5y+2=0 \Rightarrow -5y=-4x-2 \,|:(-5) \Rightarrow y=\frac{4}{5}x+\frac{2}{5} \Rightarrow k_1=\frac{4}{5}.$$

Обчислимо кутовий коефіцієнт прямої AB:

$$k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{9-4}{3-(-1)}=\frac{5}{4}\Rightarrow k_2=\frac{5}{4}.$$

Умова перпендикулярності прямих $k_1\cdot k_2=-1\Rightarrow\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}=1\neq-1$ не виконується, отже, прямі не перпендикулярні.

Задача 10. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(-4;5)$ паралельно прямій $7x+2y-1=0$.

Розв'язання

Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої $7x+2y-1=0$:

$$7x+2y-1=0\Rightarrow 2y=-7x+1\,|:2\Rightarrow y=-\frac{7}{2}x+\frac{1}{2}\Rightarrow k_1=-\frac{7}{2}.$$

Шукана пряма проходить через точку $M(-4;5)$ і має кутовий коефіцієнт $k_2=k_1=-\frac{7}{2}$ (за умовою паралельності прямих). Скористаємось рівнянням прямої, що проходить у заданому напряму:

$$y-y_0=k\cdot(x-x_0)\Rightarrow y-5=-\frac{7}{2}\cdot(x+4)\,|\cdot 2\Rightarrow 2y-10=-7\cdot(x+4)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7\cdot(x+4)+2y-10=0\Rightarrow 7x+14+2y-10=0\Rightarrow 7x+2y+4=0.$$

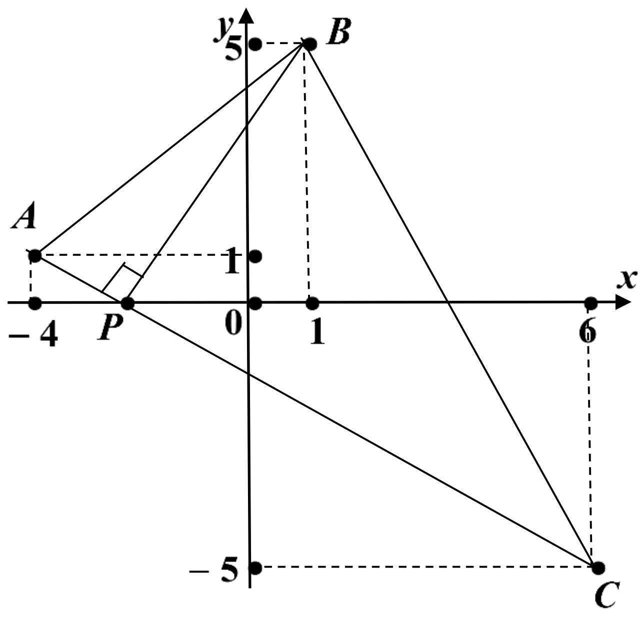
Задача 11. У трикутнику з вершинами $A(-4;1)$, $B(1;5)$, $C(6;-5)$ знайти:

а) рівняння сторони AC; б) рівняння висоти BP; в) довжину висоти BP.

Розв'язання

а) Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки $A(-4;1)$ і $C(6;-5)$:

$$\frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_C}\Rightarrow\frac{x+4}{6+4}=\frac{y-1}{-5-1}\Rightarrow\frac{x+4}{10}=\frac{y-1}{-6}\Rightarrow-6\cdot(x+4)=$$
$$=10(y-1)\,|:(-2)\Rightarrow 3\cdot(x+4)=-5(y-1)\Rightarrow 3(x+4)+5(y-1)=0\Rightarrow$$
$$3x+12+5y-5=0\Rightarrow\ 3x+5y+7=0$$ – рівняння прямої AC.



б) Висота BP – це пряма, що проходить через точку $B(1;5)$ перпендикулярно прямій AC $(3x+5y+7=0)$.

Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої AC :

$3x+5y+7=0 \Rightarrow 5y=-3x-7 \,|:5$

$$\Rightarrow y=-\frac{3}{5}x-\frac{7}{5} \Rightarrow k_{AC}=-\frac{3}{5}.$$

За умовою перпендикулярності прямих :

$$k_{BP}=-\frac{1}{k_{AC}}=-\frac{1}{-3/5}=\frac{5}{3}.$$

Скористаємось рівнянням прямої, що проходить у заданому напряму:

$$y-y_B=k_{BP}\cdot(x-x_B)\Rightarrow y-5=\frac{5}{3}(x-1)\,|\cdot 3\Rightarrow 3y-15=5(x-1)\Rightarrow$$

$\Rightarrow 3y-15=5x-5 \Rightarrow 5x-3y-5+15=0 \Rightarrow 5x-3y+10=0$ – рівняння висоти BP .

в) Довжина висоти BP обчислюється як відстань від точки $B(1;5)$ до прямої $AC(3x+5y+7=0)$:

$$d(B)=\frac{|Ax_B+By_B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|3\cdot 1+5\cdot 5+7|}{\sqrt{3^2+5^2}}=\frac{|3+25+7|}{\sqrt{9+25}}=\frac{35}{\sqrt{34}}=\frac{35\cdot\sqrt{34}}{(\sqrt{34})^2}=$$

$$=\frac{35\sqrt{34}}{34}.$$

Задача 12. Знайти гострий кут між прямими $\frac{x}{4}+\frac{y}{7}=1$ та $3x-2y+5=0$.

Розв’язання

Кожне з рівнянь перетворимо до вигляду рівняння з кутовим коефіцієнтом $(y=kx+b)$ і знайдемо кутові коефіцієнти цих прямих.

$$3x-2y+5=0 \Rightarrow -2y=-3x-5 \,|\,:(-2) \Rightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2} \Rightarrow k_1=\frac{3}{2};$$

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{7}=1 \Rightarrow \frac{y}{7}=-\frac{x}{4}+1 \,|\,\cdot 7 \Rightarrow y=-\frac{7}{4}x+7 \Rightarrow k_2=-\frac{7}{4}.$$

Обчислимо кут між прямими:

$$tg\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|=\left|\frac{-\frac{7}{4}-\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{7}{4}\right)}\right|=\left|\frac{\frac{-7-6}{4}}{1-\frac{21}{8}}\right|=\left|\frac{-\frac{13}{4}}{\frac{8-21}{8}}\right|=\left|\frac{-\frac{13}{4}}{-\frac{13}{8}}\right|=$$

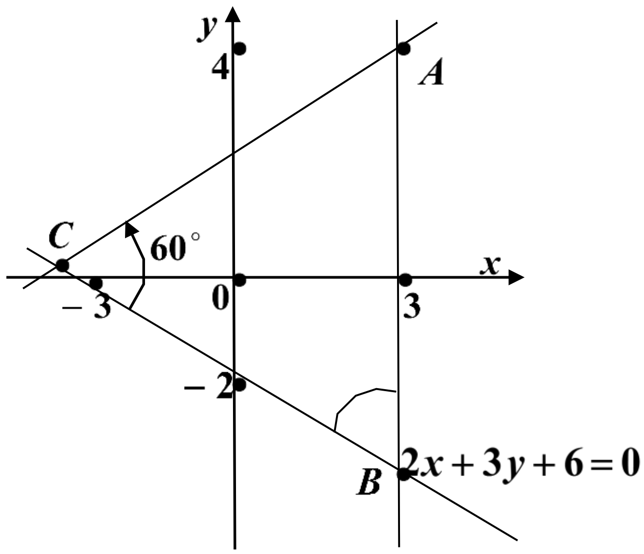
$$=\left|\frac{13}{4}\cdot\frac{8}{13}\right|=2.$$

Кут між прямими $\theta = arctg\,2$.

Задача 13. Знайти рівняння прямих, що проходять через точку $A(3;4)$ під кутом 60° до прямої $2x+3y+6=0$.

Розв'язання

Для розв'язання задачі необхідно згадати, що кут між прямими обчислюється за формулою $tg\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$, де θ – кут, на який треба повернути першу пряму (навколо точки перетину цих прямих) проти годинникової стрілки до поєднання її з другою прямою.



Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої BC: $2x+3y+6=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3y=-2x-6 \Rightarrow y=-\frac{2}{3}x-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{BC}=-\frac{2}{3}.$$

Розглянемо кут C.

$$tg\angle C=\frac{k_{AC}-k_{BC}}{1+k_{AC}\cdot k_{BC}} \Rightarrow$$

$$tg\,60^\circ = \frac{k_{AC} - \left(-\frac{2}{3}\right)}{1 + k_{AC}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{k_{AC} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}\cdot k_{AC}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\frac{3\cdot k_{AC} + 2}{3}}{\frac{3 - 2k_{AC}}{3}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{3} = \frac{3k_{AC} + 2}{3 - 2k_{AC}} \Rightarrow \sqrt{3}\cdot\left(3 - 2k_{AC}\right) = 3k_{AC} + 2 \Rightarrow 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}k_{AC} = 3k_{AC} + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{3} - 2 = k_{AC}\cdot\left(3 + 2\sqrt{3}\right) \Rightarrow k_{AC} = \frac{3\sqrt{3} - 2}{2\sqrt{3} + 3} = \frac{\left(3\sqrt{3} - 2\right)\cdot\left(2\sqrt{3} - 3\right)}{\left(2\sqrt{3} + 3\right)\cdot\left(2\sqrt{3} - 3\right)} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} - 2\cdot 2\sqrt{3} - 3\cdot 3\sqrt{3} + 6}{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - 3^2} = \frac{18 - 4\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 6}{4\cdot 3 - 9} = \frac{24 - 13\sqrt{3}}{3}.$$

Пряма AC проходить через точку $A(3;4)$. Її кутовий коефіцієнт $k_{AC} = \frac{24 - 13\sqrt{3}}{3}$. Застосовуючи рівняння $y - y_A = k_{AC}\cdot\left(x - x_A\right)$, отримаємо: $y - 4 = \frac{24 - 13\sqrt{3}}{3}\cdot\left(x - 3\right)$ – рівняння прямої AC.

Для кута B:

$$tg\angle B = \frac{k_{CB} - k_{AB}}{1 + k_{CB}\cdot k_{AB}} \Rightarrow tg60^\circ = \frac{-\frac{2}{3} - k_{AB}}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot k_{AB}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{-\frac{2}{3} - k_{AB}}{1 - \frac{2}{3}\cdot k_{AB}}.$$

Виконуючи перетворення, аналогічні тим, які розглядали для кута C, отримаємо: $k_{AB} = \frac{24 + 13\sqrt{3}}{3}$.

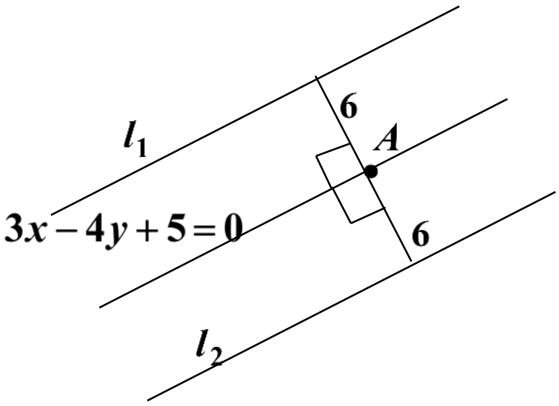
Рівняння прямої AB має вигляд:

$$y - y_A = k_{AB}\cdot\left(x - x_A\right) \Rightarrow y - 4 = \frac{24 + 13\sqrt{3}}{3}\cdot\left(x - 3\right).$$

Задача 14. Записати рівняння прямих, паралельних до прямої $3x - 4y + 5 = 0$ та віддалених від неї на шість одиниць.

Розв'язання

За умовою прямі l_1 і l_2 паралельні прямій $3x - 4y + 5 = 0$, тому їх вектори нормалі $\overline{N}_1 = \overline{N}_2 = \overline{N}(3;-4)$ і рівняння має вигляд: $3x - 4y + C = 0$.



На прямій $3x-4y+5=0$ оберемо довільну точку $A(x_A; y_A)$. Якщо $x_A=1$, тоді $3-4y+5=0 \Rightarrow -4y=-8 \Rightarrow y_A=2$.

Відстань від точки $A(1;2)$ до прямих l_1 і l_2 обчислюється за формулою: $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

$$6=\frac{|3\cdot 1-4\cdot 2+C|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} \Rightarrow 6=\frac{|C-5|}{5} \Rightarrow |C-5|=30 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C-5=30; \\ C-5=-30; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c=35; \\ c=-25. \end{array}\right.$$

Рівняння шуканих прямих мають вигляд: $3x-4y+35=0$; $3x-4y-25=0$.

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Знайти кутові коефіцієнти прямих $y=-2x+1$; $4x-3y+7=0$; $\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{5}=1$.

Відповідь: -2; $\dfrac{4}{3}$; $\dfrac{5}{2}$.

Задача 2. Обчислити площу трикутника, створеного осями координат і прямою $5x-2y+10=0$. Зробити рисунок.

Відповідь: 5.

Задача 3. З'ясувати, чи будуть паралельними прямі $4x-7y+9=0$ та AB, якщо $A(7;1)$, $B(5;0)$.

Відповідь: ні, прямі не паралельні.

Задача 4. У трикутнику з вершинами $A(-3;4)$, $B(5;2)$, $C(2;-4)$ знайти:

а) рівняння медіани CK; б) довжину медіани CK;

в) рівняння прямої AB; г) рівняння висоти CP;

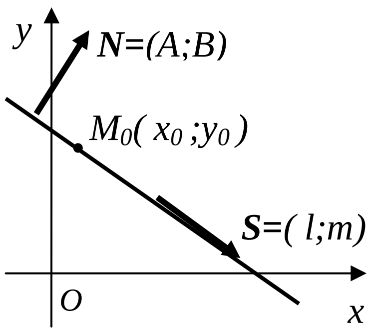
д) довжину висоти CP; є) кут між медіаною CK і висотою CP.

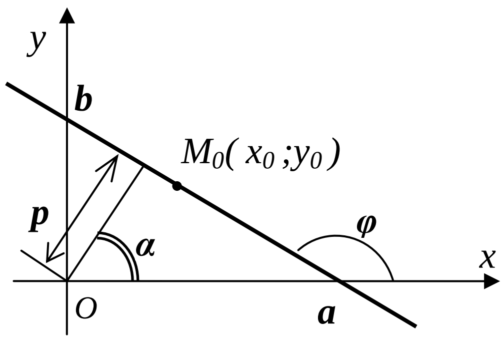
Відповідь: а) $7x+y-10=0$; б) $\sqrt{50}$; в) $x+4y-13=0$; г) $4x-y-12=0$; д) $\dfrac{27\sqrt{17}}{17}$; є) $\angle C=arctg\dfrac{11}{27}$.

Задача 5. Скласти рівняння прямих, які проходять через початок координат під кутом 60° до прямої $y = x - 1$.

Відповідь: $y = -\left(2 + \sqrt{3}\right)\cdot x$; $y = -\left(2 - \sqrt{3}\right)\cdot x$.

4.2. Довідник з формулами за темою «Пряма лінія на площині»





Найпростіше рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Загальне рівняння

$$Ax + By + C = 0$$

Канонічне рівняння

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

Рівняння з кутовим коефіцієнтом

$$y = kx + b \quad , \quad k = tg\,\varphi$$

Рівняння прямої, яка проходить у заданому напрямку

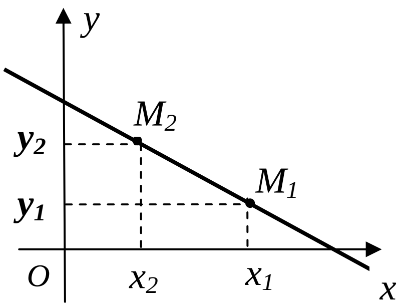
$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Рівняння у відрізках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Нормальне рівняння

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$



Рівняння прямої, яка проходить через дві точки $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$;

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Умова паралельності прямих $k_2 = k_1$

Умова перпендикулярності прямих $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$

Кут між прямими (гострий) $tg\phi = \left| \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$

Відстань від точки М до прямої $d(M) = \left| x_M \cos\alpha + y_M \sin\alpha - p \right|$

або $d(M) = \dfrac{\left| A x_M + B y_M + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

5. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Рівняння кривої другого порядку має вигляд

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + + Ey + F = 0, \qquad (6.1)$$

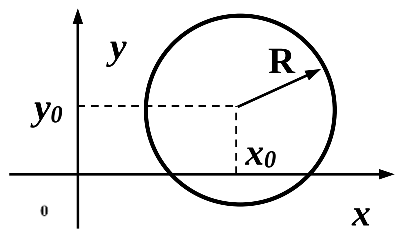
де A, B, C, D, E, F – сталі; A, B, C не дорівнюють нулю одночасно.

5.1. Коло

Коло – геометричне місце точок площини, рівновіддалених від однієї і тієї ж точки, яка називається його центром. Загальне рівняння кола має вигляд:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (A = C, B = 0).$$

Рівняння кола з центром в точці $\tilde{N}(x_0; y_0)$ і радіусом R має вигляд:



$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = R^2$$

і називається ***канонічним рівнянням.***

Якщо центр кола – початок координат, рівняння кола має вигляд: $x^2 + y^2 = R^2$.

Зразки розв'язування задач

Задача 1. Побудувати лінії, задані рівнянням:

а) $x^2 + y^2 = 9$; б) $x^2 + (y-1)^2 = 1$;

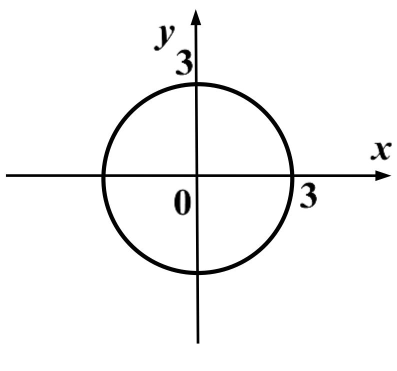
в) $(x+2)^2 + y^2 = 4$; г) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$;

д) $x^2 + y^2 + 6y = 0$; є) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$.

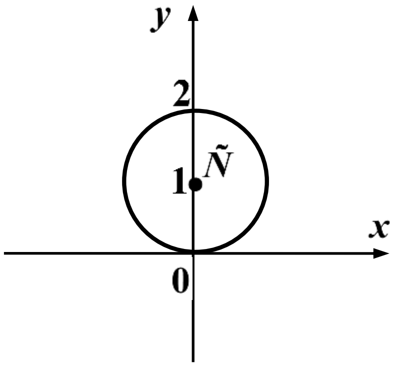
Розв'язання

Згадаємо рівняння кола $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, де $(x_0; y_0)$ координати центра кола, R – радіус.

а) $x^2 + y^2 = 9$ – рівняння кола з центром в точці $O(0;0)$ і радіусом $R = \sqrt{9} = 3$.

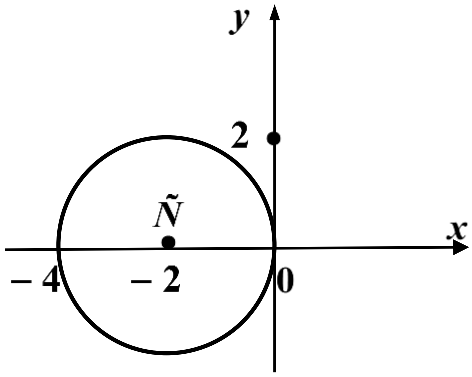


б) $x^2 + (y-1)^2 = 1$ – рівняння кола з центром в точці $C(0;1)$ і радіусом $R = 1$.

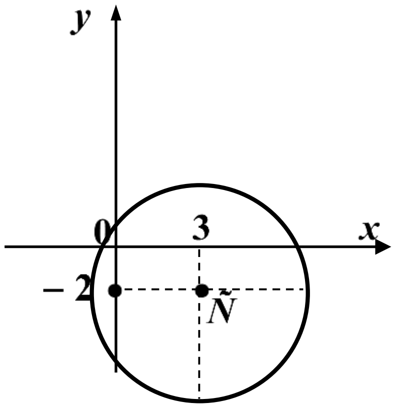


Як видно з рисунка, коло проходить через початок координат.

в) $(x+2)^2 + y^2 = 4$ – рівняння кола з центром в точці $C(-2;0)$ і радіусом $R = 2$. Це коло також проходить через початок координат.

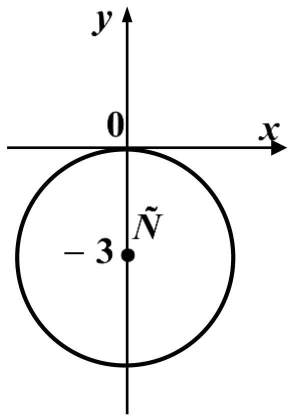


г) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ – рівняння кола з центром в точці $C(3;-2)$ і радіусом $R = 4$.



д) Загальне рівняння кола $x^2 + y^2 + 6y = 0$ необхідно привести до канонічного вигляду $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Для цього скористаємось формулою скороченого множення $y^2 + 2y \cdot a + a^2 = (y + a)^2$.

Виконаємо перетворення: $x^2 + y^2 + 6y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2y \cdot 3 = 0 \Rightarrow$
$x^2 + \left(y^2 + 2y \cdot 3 + 3^2\right) - 3^2 = 0 \Rightarrow$ $x^2 + (y + 3)^2 = 3^2$. Ми отримали канонічне рівняння кола з центром в точці $C(0;-3)$ і радіусом $R = 3$.



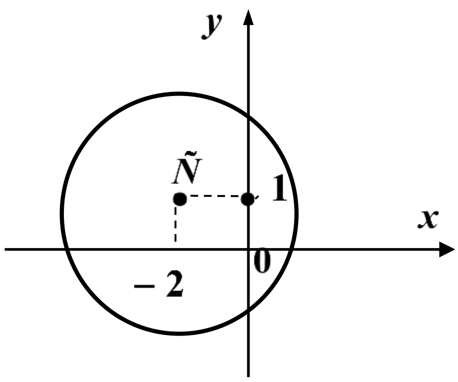
є) Перетворимо загальне рівняння кола $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ до канонічного вигляду $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Скористаємось формулами скороченого множення:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2.$$

$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + y^2 - 2y - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x \cdot 2 +$
$+ y^2 - 2y \cdot 1 - 4 = 0 \Rightarrow \left(x^2 + 2x \cdot 2 + 2^2\right) - 2^2 + \left(y^2 - 2y \cdot 1 + 1^2\right) - 1^2 - 4 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 - 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

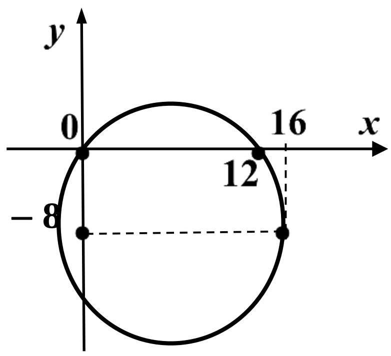
Це рівняння задає коло з центром в точці $C(-2;1)$ і радіусом $R = 3$.



Зауваження. Під час перетворень, аналогічних тим, які виконано в пунктах д) і є), інколи припускаються помилок: $-2^2=4$. Це не правильно. Правильно: $(-2)^2=4$; $-2^2=-4$.

Задача 2. Скласти рівняння кола, зображеного на рисунку. Знайти радіус і координати центру.

Розв'язання



У загальне рівняння кола x^2+y^2+ax+ $+by+c=0$ послідовно будемо підставляти координати точок, які належать заданій лінії.

$(0;0)\Rightarrow 0^2+0^2+a\cdot 0+b\cdot 0+c=0\Rightarrow c=0$;

$(12;0)\Rightarrow 12^2+0^2+a\cdot 12+b\cdot 0+c=0\Rightarrow 144+$ $+12a+c=0$;

$(16;-8)\Rightarrow 16^2+(-8)^2+a\cdot 16+b\cdot(-8)+c=0\Rightarrow 320+16a-8b+c=0$.

Оскільки $c=0$, останні два рівняння утворюють систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases}144+12a=0;\\16a-8b=-320;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}12a=-144;\\2a-b=-40;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-144:12=-12;\\2\cdot(-12)-b=-40;\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-12;\\b=16;\\c=0.\end{cases}$$

Загальне рівняння кола має вигляд:

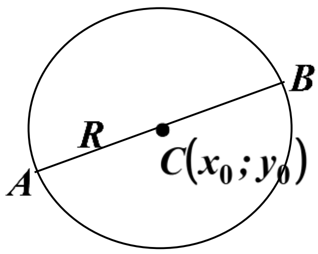
$x^2+y^2+ax+by+c=0\Rightarrow\ x^2+y^2-12x+16y=0$.

Скористаємось формулами скороченого множення $a^2\pm 2ab+b^2=$ $=(a\pm b)^2$ і отримаємо канонічне рівняння $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

$x^2+y^2-12x+16y=0\Rightarrow x^2-12x+y^2+16y=0\Rightarrow x^2-2x\cdot 6+y^2+$ $+2y\cdot 8=0\Rightarrow\left(x^2+2x\cdot 6+6^2\right)-6^2+\left(y^2+2y\cdot 8+8^2\right)-8^2=0\Rightarrow(x-6)^2-36+$ $+(y+8)^2-64=0\Rightarrow(x-6)^2+(y+8)^2=100$.

Центр заданого кола має координати $C(6;-8)$, радіус $R=10$.

Задача 3. Записати рівняння кола, для якого точки $\boldsymbol{A}(-2;5)$ і $\boldsymbol{B}(4;-1)$ є кінцями діаметра.



Розв'язання

Відрізок $\boldsymbol{AB}$ – діаметр кола, точка $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x_0};\boldsymbol{y_0})$ – центр кола і середина цього відрізка, тому

$$\boldsymbol{x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1};$$

$$\boldsymbol{y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2}.$$

Обчислимо радіус:

$$\boldsymbol{R = |AC| = \sqrt{(x_0 - x_A)^2 + (y_0 - y_A)^2} = \sqrt{(1-(-2))^2 + (2-5)^2} =}$$

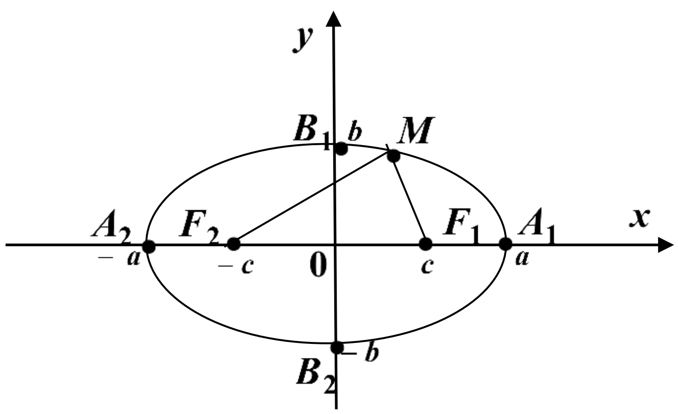
$$\boldsymbol{= \sqrt{(1+2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} \Rightarrow R^2 = \left(\sqrt{18}\right)^2 = 18}.$$

Запишемо канонічне рівняння кола: $\boldsymbol{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \Rightarrow}$ $\boldsymbol{(x-1)^2 + (y-2)^2 = 18}$.

5.2. Еліпс

Еліпс – геометричне місце точок площини, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок $\boldsymbol{F_1}$ і $\boldsymbol{F_2}$ (фокусів) є сталою величиною, більшою за відстань між фокусами.

Загальне рівняння кривих другого порядку (6.1) визначає еліпс, якщо $\boldsymbol{A \neq C}$ і $\boldsymbol{A \cdot C > 0}$.



Канонічне рівняння еліпса з фокусами на осі $\boldsymbol{Ox}$ має вигляд:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad \boldsymbol{(a > b)},$$

де $\boldsymbol{a}$ – велика напіввісь, $\boldsymbol{b}$ – мала напіввісь.

Точки $\boldsymbol{A_1(a;0)}$, $\boldsymbol{A_2(-a;0)}$, $\boldsymbol{B_1(0;b)}$, $\boldsymbol{B_2(b;0)}$ називають вершинами, а $F_1(c;0)$ і $F_2(-c;0)$ – фокусами еліпса. Координати фокусів еліпса обчислюються за формулою:

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Ексцентриситетом еліпса називається відношення відстані між фокусами цього еліпса до його великої осі:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}, \qquad (\varepsilon < 1).$$

Ексцентриситет характеризує форму еліпса: чим ближче ексцентриситет до одиниці, тим більше еліпс витягнутий вздовж фокальної осі. Якщо $a = b$ і $\varepsilon = 0$, отримаємо рівняння кола з центром на початку координат і радіусом a: $x^2 + y^2 = a^2$.

Відрізки F_1M і F_2M називають фокальними радіусами і обчислюються за формулами:

$$F_1M = r_1 = a - \varepsilon \cdot x_M; \qquad F_2M = r_2 = a + \varepsilon \cdot x_M.$$

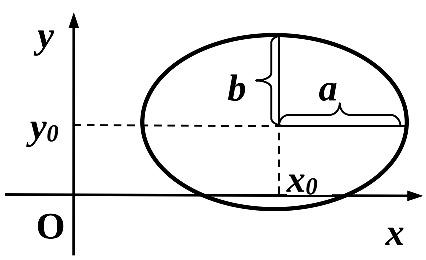
Прямі лінії, розташовані перпендикулярно до фокальної осі на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від центра, називаються директрисами і описуються рівняннями:

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}.$$

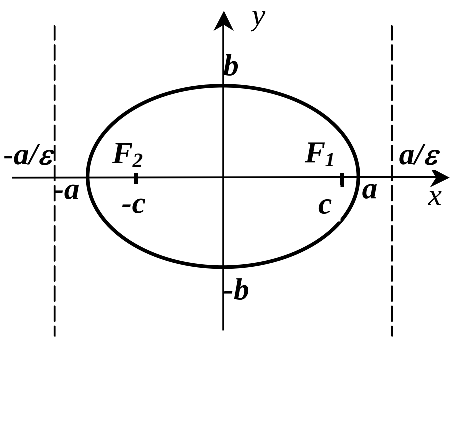
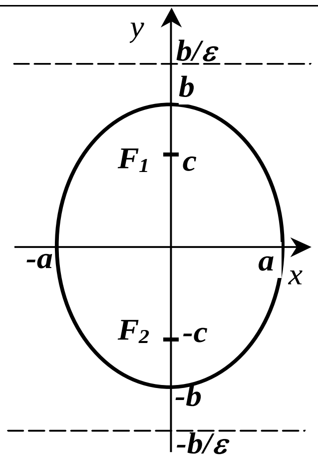
Якщо в канонічному рівнянні еліпса $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ $b > a$, фокуси лежать на осі Oy. Для більшої зручності всі формули наведено в табл. 5.1.

Рівняння еліпса з центром в точці $C(x_0; y_0)$ має вигляд:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$



Таблиця 5.1

	Фокуси на осі Ox	Фокуси на осі Oy
Рівняння	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a<b$
Напівосі ($2a$, $2b$ –вісі)	a –велика b –мала	a – мала b – велика
Відстань від центру до фокусів	$c=\sqrt{a^2-b^2}$	$c=\sqrt{b^2-a^2}$
Координати фокусів	$F_1(c;\,0);\ F_2(-c;\,0)$	$F_1(0;c);F_2(0;\,-c)$
Ексцентриситет	$\varepsilon=\frac{c}{a}\quad(\varepsilon<1)$	$\varepsilon=\frac{c}{b}\quad(\varepsilon<1)$
Рівняння директрис	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}\quad\left(x=\pm\frac{a^2}{c}\right)$	$x=\pm\frac{b}{\varepsilon}\quad\left(x=\pm\frac{b^2}{c}\right)$
Відстані від точки М до фокусів	$F_1M=r_1=a-\varepsilon\,x_M$ $F_2M=r_2=a+\varepsilon\,x_M$	$F_1M=r_1=b-\varepsilon\,y_M$ $F_2M=r_2=b+\varepsilon\,y_M$
Рисунок		

Зразки розв'язування задач

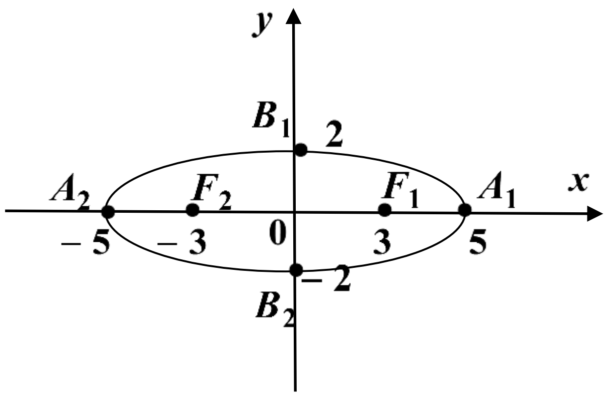
Задача 1. Побудувати еліпс $4x^2+25y^2-100=0$. Знайти його осі, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис.

Розв'язання

Для розв'язання задачі необхідно перетворити рівняння $4x^2+25y^2-100=0$ до канонічного виду еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

$$4x^2+25y^2-100=0 \Rightarrow 4x^2+25y^2=100 \Rightarrow \frac{4x^2}{100}+\frac{25y^2}{100}=\frac{100}{100} \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1.$$

$a^2=25 \Rightarrow a=5$; $b^2=4 \Rightarrow b=2$; $(a>b)$.



Побудуємо систему координат, на осі Ox відкладаємо точки $A_1(5;0)$ і $A_2(-5;0)$, на осі Oy $B_1(0;2)$ і $B_2(0;-2)$. З'єднаємо ці точки плавною кривою і отримаємо еліпс, велика вісь якого $2a=2\cdot5=10$; мала вісь $2b=2\cdot2=4$.

Оскільки $a>b$, фокуси еліпса розташовані на осі Ox, і їх координати обчислюються за формулою:

$$c^2=a^2-b^2.$$

$c^2=5^2-4^2=25-16=9 \Rightarrow c=\sqrt{9}=3$. Фокуси мають координати $F_1(3;0)$ і $F_2(-3;0)$.

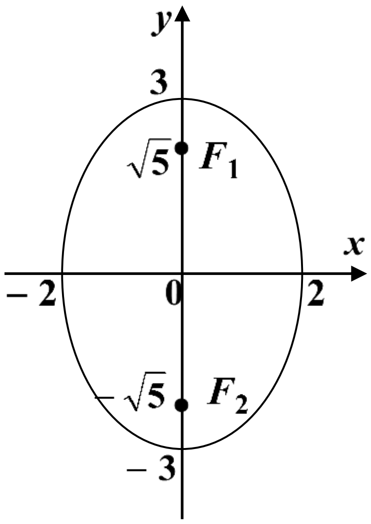
Ексцентриситет обчислимо за формулою $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$, $(\varepsilon<1)$. Отримаємо рівняння директрис: $x=\pm\frac{a}{\varepsilon} \Rightarrow x=\pm\frac{5}{3/5} \Rightarrow x=\pm\frac{25}{3}$.

Задача 2. Побудувати еліпс $9x^2+4y^2-36=0$. Знайти координати фокусів та ексцентриситет.

Розв'язання

Перетворимо рівняння еліпса до канонічного вигляду: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

$$9x^2+4y^2-36=0 \Rightarrow 9x^2+4y^2=36 \Rightarrow \frac{9x^2}{36}+\frac{4y^2}{36}=\frac{36}{36} \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$



Отримали $a^2=4 \Rightarrow a=2$; $b^2=9 \Rightarrow b=3$, $a<b$, отже фокуси лежать на осі Oy.

$c^2=b^2-a^2=9-4=5 \Rightarrow c=\sqrt{5} \Rightarrow F_1\left(0;\sqrt{5}\right)$; $F_2\left(0;-\sqrt{5}\right)$.

Ексцентриситет обчислимо за формулою $\varepsilon=\dfrac{c}{b}$, отримаємо $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ $\left(\varepsilon<1\right)$.

Задача 3. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо відстань між ними $2c=6$, велика вісь $2a=30$.

Розв'язання

З умови задачі отримаємо: $c=\dfrac{6}{2}=3$; $a=\dfrac{30}{2}=15$. Обчислимо малу напіввісь за формулою: $c^2=a^2-b^2 \Rightarrow b^2=a^2-c^2=15^2-3^2=225-9=216$.

Канонічне рівняння еліпса: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{225}+\dfrac{y^2}{216}=1$.

Задача 4. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо $a=10$, $\varepsilon=0{,}8$.

Розв'язання

Скористуємось формулою $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$. За умовою задачі $a=10 \Rightarrow \varepsilon=\dfrac{c}{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}8=\dfrac{c}{10} \Rightarrow c=0{,}8\cdot 10=8$.

Обчислимо величину малої напівосі: $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 =$ $= 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$; $b = 6$.

Канонічне рівняння еліпса має вигляд: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.

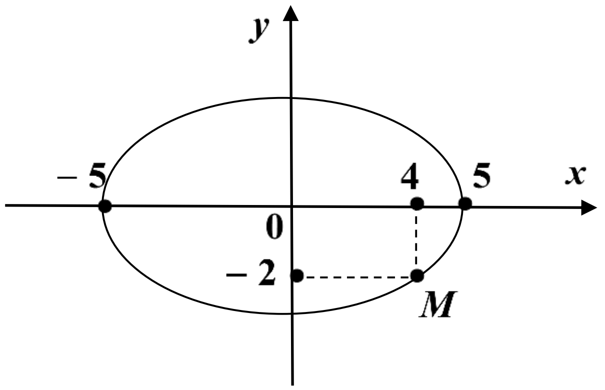
Задача 5. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Oy, якщо мала вісь $2a = 24$, відстань між фокусами $2c = 10$.

Розв'язання

За умови задачі $a = \frac{24}{2} = 12$; $c = \frac{10}{2} = 5$. Оскільки фокуси розташовані на осі Oy, велику напіввісь обчислимо за формулою $c^2 = b^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = c^2 +$ $+ a^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$; $b = 13$.

Канонічне рівняння еліпса має вигляд: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$.

Задача 6. Скласти рівняння еліпса, зображеного на рисунку.



Розв'язання

Канонічне рівняння еліпса має вигляд: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. З рисунка видно, що $a = 5$.

Необхідно знайти величину b.

Точка $M(4;-2)$ належить еліпсу, тому її координати мають задовольняти рівнянню цього еліпса:

$$\frac{4^2}{5^2} + \frac{(-2)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{16}{25} + \frac{4}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{b^2} = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{4}{b^2} = \frac{25-16}{25} \Rightarrow$$

$$\frac{4}{b^2} = \frac{9}{25} \Rightarrow b^2 = \frac{4 \cdot 25}{9} \Rightarrow b^2 = \frac{100}{9}.$$

Рівняння еліпса має вигляд: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100/9} = 1$.

Задача 7. Скласти рівняння еліпса, який проходить через точки $M\left(\sqrt{3};-2\right)$ і $N\left(-2\sqrt{3};1\right)$.

Розв'язання

Точки $M\left(\sqrt{3};-2\right)$ і $N\left(-2\sqrt{3};1\right)$ належать еліпсу, тому їх координати задовольняють рівнянню:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{a^2}+\dfrac{(-2)^2}{b^2}=1;\\[2mm] \dfrac{\left(-2\sqrt{3}\right)^2}{a^2}+\dfrac{1^2}{b^2}=1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1;\\[2mm] \dfrac{12}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1.\end{cases}$$

Введемо нові змінні: $\dfrac{1}{a^2}=p$; $\dfrac{1}{b^2}=t$. Тоді система рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases}3p+4t=1;\\ 12p+t=1.\end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь методом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 12 & 1\end{vmatrix}=3-48=-45;\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1-4=-3;\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 12 & 1\end{vmatrix}=3-12=-9.$$

$$p=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-3}{-45}=\frac{1}{15};\quad t=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-9}{-45}=\frac{1}{5}.\quad \left[\begin{array}{l}p=\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{15};\\[2mm] t=\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{5};\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a^2=15;\\ b^2=5.\end{array}\right.$$

Канонічне рівняння еліпса має вигляд: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

Задача 8. Звести рівняння $9x^2+5y^2+36x-10y-4=0$ до канонічного вигляду. Побудувати еліпс.

Розв'язання

Рівняння еліпса в точці $c\left(x_0;y_0\right)$ має вигляд: $\dfrac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2}+\dfrac{\left(y-y_0\right)^2}{b^2}=1$.

Виконаємо перетворення за допомогою формул скороченого множення: $a^2\pm 2ab+b^2=\left(a\pm b^2\right)$.

$9x^2+5y^2+36x-10y-4=0$;

$$9x^2+36x+5y^2-10y-4=0;$$

$$9\left(\underline{x^2+4x}\right)+5\left(y^2-2y\right)-4=0; \quad (*)$$

$$\underline{x^2+4x}=x^2+2x\cdot 2=x^2+2x\cdot 2+2^2-2^2=\underline{(x+2)^2-4};$$

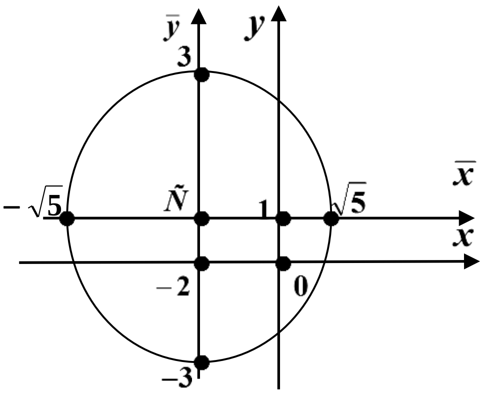
$$y^2-2y=y^2-2y\cdot 1=y^2-2y\cdot 1+1^2-1^2=(y-1)^2-1;$$

Повернемося до рівняння (*):

$$9\left(\underline{(x+2)^2-4}\right)+5\left((y-1)^2-1\right)-4=0;$$

$$9(x+2)^2-36+5(y-1)^2-5-4=0;$$

$$9(x+2)^2+5(y-1)^2=45;$$



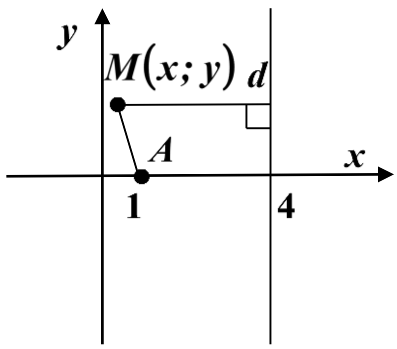
$$\frac{9(x+2)^2}{45}+\frac{5(y-1)^2}{45}=1 \Rightarrow \frac{(x+2)^2}{5}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

– канонічне рівняння еліпса.

Центр еліпса має координати: $C(-2;1)$; мала вісь $a=\sqrt{5}$; велика вісь $b=3$.

Задача 9. Скласти рівняння геометричного місця точок, для яких відношення відстані до прямої $x-4=0$ та відстані до точки $A(1;0)$ дорівнює 2.

Розв'язання



Припустимо, що точка $M(x;y)$ належить шуканій лінії. Відстань між точками $A(1;0)$ і $M(x;y)$ обчислюється за формулою:

$$|AM|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2};$$

$$|AM|=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2} \Rightarrow |AM|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}.$$

Відстань від точки $M(x;y)$ до прямої $x-4=0$:

$$d=\frac{|Ax_M+By_M+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|x-4|}{\sqrt{1^2+0^2}}=|x-4|.$$

.

За умовою задачі: $\dfrac{d}{|AM|}=2 \Rightarrow 2|AM|=d \Rightarrow 2\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x-4| \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(2\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)^2=(x-4)^2 \Rightarrow 4\left(x^2-2x+1+y^2\right)=x^2-8x+4^2 \Rightarrow$

$4x^2-8x+4+4y^2-x^2+8x-16=0 \Rightarrow 3x^2+4y^2-12=0 \Rightarrow 3x^2+4y^2=12 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ – канонічне рівняння еліпса.

5.3. Гіпербола

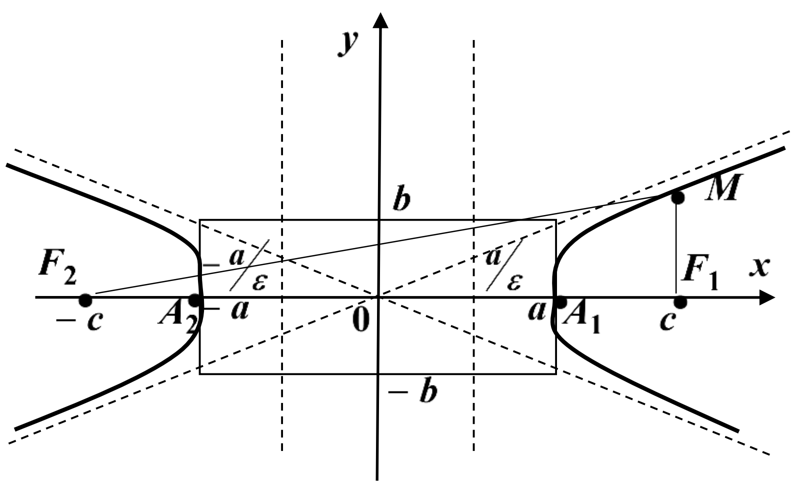
Гіпербола – множина точок площини, для яких абсолютна величина різниці відстаней до двох фіксованих точок F_1 і F_2 (фокусів) є сталою величиною, меншою за $|F_1F_2|$.

Загальне рівняння кривих другого порядку $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+$ $+F=0$ визначає гіперболу, якщо $A\cdot C<0$.

Канонічне рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

де a – дійсна напіввісь, b – уявна напіввісь.



Точки $A_1(a;0)$ і $A_2(-a;0)$ називають вершинами, а $F_1(c;0)$ і $F_2(-c;0)$ – фокусами гіперболи. Координати фокусів гіперболи обчислюються за формулою: $c^2 = a^2 + b^2$.

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення відстані між фокусами до дійсної осі: $\varepsilon = \dfrac{2c}{2a} = \dfrac{c}{a}$, $(\varepsilon > 1)$.

Ексцентриситет характеризує форму гіперболи: чим ближче ексцентриситет до одиниці, тим більше гілки гіперболи «притиснуті» до фокальної осі.

Відрізки F_1M і F_2M називають фокальними радіусами і обчислюються за формулами: $F_1M = r_1 = |a - \varepsilon \cdot x_M|$; $F_2M = r_2 = |a + \varepsilon \cdot x_M|$.

Прямі лінії, розташовані перпендикулярно до фокальної осі на відстані $\dfrac{a}{\varepsilon}$ від центра, називаються директрисами і мають рівняння:

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}.$$

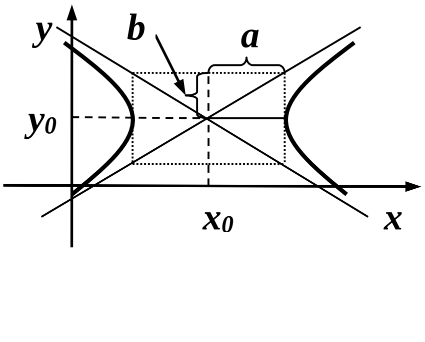
Прямі, визначені рівняннями $y = \pm\dfrac{b}{a}x$, називають асимптотами гіперболи (якщо точка на гіперболі віддаляється від початку координат, то відстань від цієї точки до однієї з асимптот наближається до нуля).

Якщо $b = a$, гіпербола називається рівнобічною, її рівняння має вигляд $x^2 - y^2 = a^2$, а асимптот $y = \pm x$.

Якщо фокуси гіперболи лежать на осі Oy, її рівняння має вигляд:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

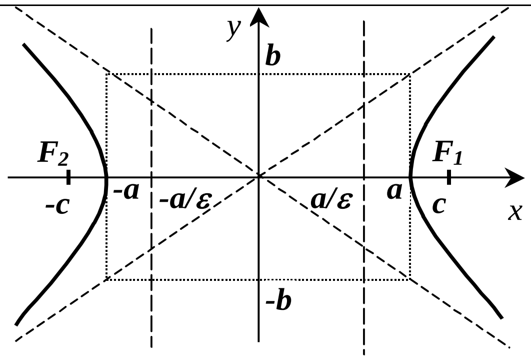
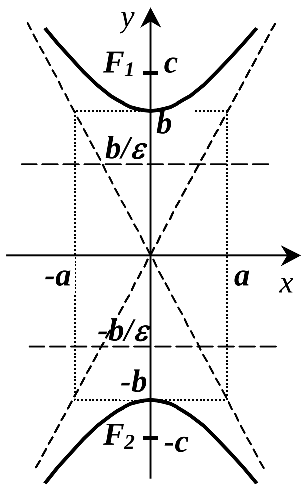
де b – дійсна напіввісь, a – уявна напіввісь. Для більшої зручності всі формули наведено в табл. 5.2.



Рівняння гіперболи з центром в точці $C(x_0; y_0)$ має вигляд:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Таблиця 5.2

	Фокуси на осі Ox	Фокуси на осі Oy
Рівняння	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
Півосі (2*a*, 2*b* –осі)	a – дійсна b – уявна	a – уявна b –дійсна
Відстань від центра до фокусів	$c=\sqrt{a^2+b^2}$	$c=\sqrt{a^2+b^2}$
Координати фокусів	$F_1(c;\,0);\ F_2(-c;\,0)$	$F_1(0;c);F_2(0;\,-c)$
Ексцентриситет	$\varepsilon=\frac{c}{a}\quad(\varepsilon>1)$	$\varepsilon=\frac{c}{b}\quad(\varepsilon>1)$
Рівняння директрис	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}\quad\left(x=\pm\frac{a^2}{c}\right)$	$x=\pm\frac{b}{\varepsilon}\quad\left(x=\pm\frac{b^2}{c}\right)$
Рівняння асимптот	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{b}{a}x$
Відстані від точки М до фокусів	$F_1M=r_1=\lvert a-\varepsilon\,x_M\rvert$ $F_2M=r_2=\lvert a+\varepsilon\,x_M\rvert$	$F_1M=r_1=\lvert b-\varepsilon\,y_M\rvert$ $F_2M=r_2=\lvert b+\varepsilon\,y_M\rvert$
Рисунок		

Зразки розв'язування задач

Задача 1. Побудувати гіперболу $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$. Знайти її осі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння асимптот і директрис.

Розв'язання

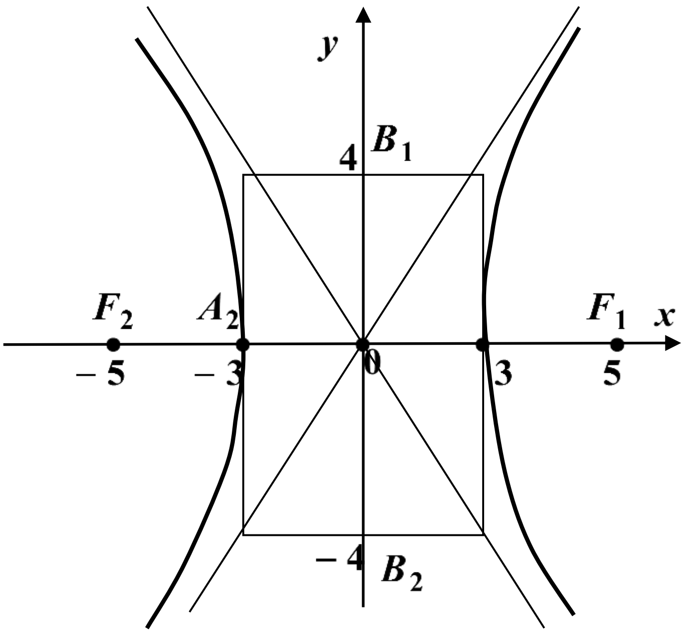
Перетворимо рівняння гіперболи $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$ до канонічного вигляду $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$16x^2 - 9y^2 - 144 = 0 \Rightarrow 16x^2 - 9y^2 = 144 \Rightarrow \frac{16x^2}{144} - \frac{9y^2}{144} = \frac{144}{144} \Rightarrow$$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Отримали рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox.

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow 2a = 2 \cdot 3 = 6$ – дійсна вісь;

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow 2b = 2 \cdot 4 = 8$ – уявна вісь.



Побудуємо систему координат, на осі Ox відкладаємо точки $A_1(3;0)$ і $A_2(-3;0)$, на осі Oy: $B_1(0;4)$ і $B_2(0;-4)$. Через ці точки проводимо прямі, паралельні осям координат. Отримали прямокутник з центром в точці $O(0;0)$ і сторонами $2a = 6$ та $2b = 8$. Цей прямокутник називається основним прямокутником гіперболи.

Побудуємо асимптоти гіперболи. Вони збігаються з діагоналями основного прямокутника і визначаються рівняннями: $y = \pm \frac{b}{a} x \Rightarrow y = \pm \frac{4}{3} x$.

Точка $A_1(3;0)$ є вершиною правої гілки. Від цієї точки проводимо плавну лінію в I і IV чвертях площини симетрично відносно осі Ox таким чином, що при $x \to \infty$ відстань між лінією і асимптотами зменшується і прямує до нуля, але лінія не торкається асимптоти. Точка $A_2(-3;0)$ є вершиною лівої гілки, яку проводимо в II і III чвертях площини. Ліва гілка симетрична правій відносно осі Oy.

Координати фокусів гіперболи обчислимо за формулою:

$\tilde{n}^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = 5$.

Фокуси знаходяться в точках $F_1(5;0)$ і $F_2(-5;0)$.

Ексцентриситет: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$, $(\varepsilon > 1)$.

Отримаємо рівняння директрис: $x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \Rightarrow x = \pm \frac{3}{5/3} \Rightarrow x = \pm \frac{9}{5}$.

Задача 2. Побудувати гіперболу $x^2 - 4y^2 + 16 = 0$. Знайти координати фокусів, ексцентриситет.

Розв'язання

Для розв'язання задачі необхідно рівняння $x^2 - 4y^2 + 16 = 0$ перетворити до канонічного вигляду:

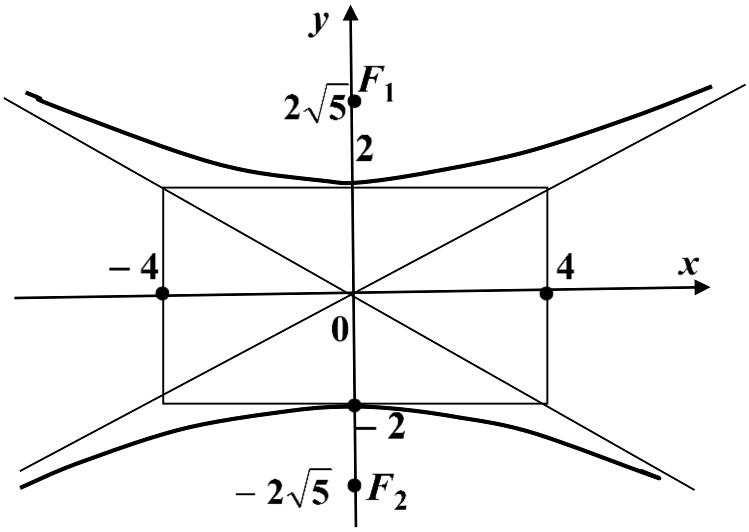
$$x^2 - 4y^2 + 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 4y^2 = -16 \Rightarrow \frac{x^2}{-16} - \frac{4y^2}{-16} = \frac{-16}{16} \Rightarrow -\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\left(-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ôîêóñè ³ âåðøèíè íà îñ³ } Oy\right); a^2 = 16 \Rightarrow a = 4; b^2 = 4 \Rightarrow b = 2.$$

Координати фокусів обчислимо за формулою $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 4 = \; = 20 \Rightarrow c = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$.

Оскільки фокуси лежать на осі Oy: $F_1(0;2\sqrt{5})$, $F_2(0;-2\sqrt{5})$.

Ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{b} \Rightarrow \varepsilon = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$, $(\varepsilon > 1)$.



Задача 3. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox, якщо дійсна вісь $2a = 8$; відстань між фокусами $2c = 10$.

Розв'язання

За умовою задачі $2a = 8 \Rightarrow a = 4$; $2c = 10 \Rightarrow c = 5$. Обчислимо уявну напіввісь за формулою: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 3$. Канонічне рівняння гіперболи: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Задача 4. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox, якщо відстань між фокусами $2c = 6$, рівняння асимптот $y = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2} \cdot x$.

Розв'язання

Рівняння асимптот $y = \pm\dfrac{b}{a}x \Rightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow b = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. (Ми використали основну властивість пропорції $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{d} \Rightarrow d \cdot b = c \cdot a$; $b = \dfrac{c \cdot a}{d}$).

Оскільки $2\tilde{n} = 6$, $\tilde{n} = \dfrac{6}{2} = 3$.

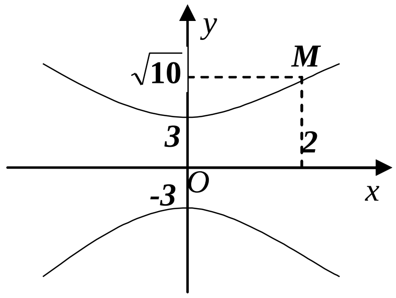
Між параметрами a; b; c існує зв'язок:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 3^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Rightarrow 9 = a^2 + \frac{5a^2}{4} \,/\cdot 4 \Rightarrow 36 = 4a^2 + 5a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36 = 9a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{36}{9} = 4 \Rightarrow a = 2; \quad b = \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \Rightarrow b^2 = 5.$$

Канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

Задача 5. Скласти рівняння гіперболи, зображеної на рисунку:



Розв'язання

Канонічне рівняння гіперболи з вершинами на осі Oy має вигляд: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

З рисунка видно, що $b=3$, необхідно знайти величину a. Точка $M\left(2;\sqrt{10}\right)$ належить гіперболі, тому її координати мають задовольняти рівнянню цієї гіперболи:

$$-\frac{2^2}{a^2}+\frac{\left(\sqrt{10}\right)^2}{3^2}=1 \Rightarrow -\frac{4}{a^2}+\frac{10}{9}=1 \Rightarrow \frac{10}{9}-1=\frac{4}{a^2} \Rightarrow \frac{1}{9}=\frac{4}{a^2} \Rightarrow a^2=$$
$$=9\cdot 4=36.$$

Рівняння гіперболи має вигляд: $-\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$.

Задача 6. Привести до канонічного вигляду рівняння гіперболи: $9x^2-25y^2-18x-100y-316=0$.

Розв'язання

Рівняння гіперболи з центром в точці $C\left(x_0;y_0\right)$ має вигляд: $\frac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2}-\frac{\left(y-y_0\right)^2}{b^2}=1$.

$$9x^2-25y^2-18x-100y-316=0 \Rightarrow 9x^2-18x-25y^2-100y-316=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9\left(x^2-2x\right)-25\left(y^2+4y\right)-316=0. \ (**)$$

За допомогою формул скороченого множення $a^2 \pm 2ab+b^2=\left(a\pm b\right)^2$ виконаємо перетворення:

$$x^2-2x=x^2-2x\cdot 1=x^2-2x\cdot 1+1^2-1^2=\left(x-1\right)^2-1;$$
$$y^2+4y=y^2+2y\cdot 2=y^2+2y\cdot 2+2^2-2^2=\left(y+2\right)^2-4.$$

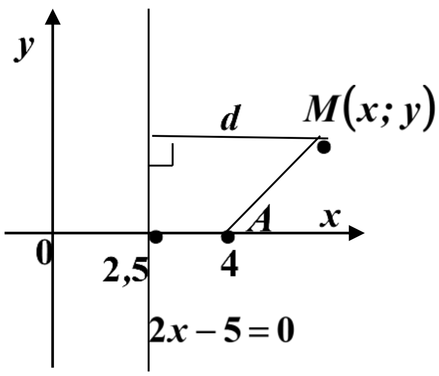
Повернемося до рівняння (**):

$$9\left(\left(x-1\right)^2-1\right)-25\left(\left(y+2\right)^2-4\right)-316=0\Rightarrow 9\left(x-1\right)^2-9-25\left(y+2\right)^2+$$

$$+100-316=-\Rightarrow 9\left(x-1\right)^2-25\left(y+2\right)^2=225\Rightarrow \frac{9\left(x-1\right)^2}{225}-\frac{25\left(y+2\right)^2}{225}=\frac{225}{225}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{\left(x-1\right)^2}{25}-\dfrac{\left(y+2\right)^2}{9}=1$ – канонічне рівняння гіперболи, центр якої в точці $C\left(1;-2\right)$; дійсна напіввісь $a=5$; уявна напіввісь $b=3$.

Задача 8. Скласти рівняння геометричного місця точок, для яких відношення відстані до точки $A\left(4;0\right)$ та відстані до прямої $2x-5=0$ дорівнює 2. Побудувати лінію.



Розв'язання

Припустимо, що точка $M\left(x;y\right)$ належить шуканій лінії. Відстань між точками $A\left(4;0\right)$ і $M\left(x;y\right)$ обчислюється за формулою:

$$\left|AM\right|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2};$$

$$\left|AM\right|=\sqrt{\left(x-4\right)^2+\left(y-0\right)^2};$$

$$\left|AM\right|=\sqrt{\left(x-4\right)^2+y^2}.$$

Відстань від точки $M\left(x;y\right)$ до прямої $2x-5=0$:

$$d=\frac{\left|Ax_M+By_M+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\left|2x-5\right|}{\sqrt{2^2+0^2}}=\frac{\left|2x-5\right|}{2}.$$

За умовою задачі $\dfrac{\left|AM\right|}{d}=2\Rightarrow\left|AM\right|=2d\Rightarrow\sqrt{\left(x-4\right)^2+y^2}=2\cdot\dfrac{\left|2x-5\right|}{2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\sqrt{\left(x-4\right)^2+y^2}=\left|2x-5\right|\Rightarrow\left(\sqrt{\left(x-4\right)^2+y^2}\right)^2=\left(2x-5\right)^2\Rightarrow\left(x-4\right)^2+y^2=$$

$$=\left(2x-5\right)^2\Rightarrow\left|\left(a-b\right)^2=a^2-2ab+b^2\right|\Rightarrow x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2+y^2=\left(2x\right)^2-$$

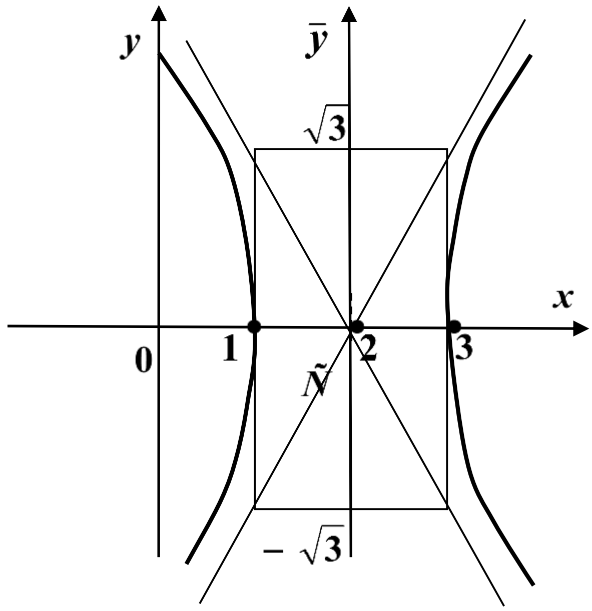
$$-2\cdot 2x\cdot 5+5^2\Rightarrow x^2-8x+16+y^2=4x^2-20x+25\Rightarrow x^2-8x+16+y^2-$$

$$-4x^2+20x-25=0\Rightarrow -3x^2+12x+y^2-9=0\Rightarrow -3\left(x^2-4x\right)+y^2-9=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\left(x^2-2x\cdot 2\right)+y^2-9=0\Rightarrow -3\left(x^2-2x\cdot 2+2^2-2^2\right)+y^2-9=0\Rightarrow$$

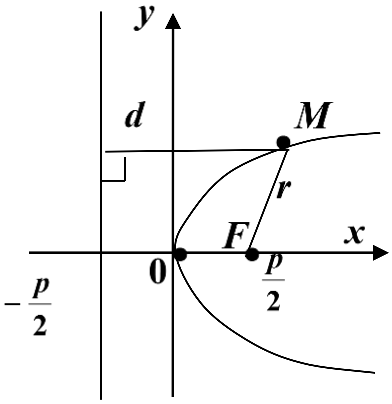
$$\Rightarrow -3\left(\left(x-2\right)^2-4\right)+y^2-9=0 \Rightarrow -3\left(x-2\right)^2+12+y^2-9=0 \Rightarrow -3\left(x-2\right)^2+$$

$$+y^2=-3 \Rightarrow \frac{-3\left(x-2\right)^2}{-3}+\frac{y^2}{-3}=\frac{-3}{-3} \Rightarrow \frac{\left(x-2\right)^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1$$ – канонічне рівняння гіперболи з центром в точці $C(2;0)$; дійсною напіввіссю $a=1$ і уявною $b=\sqrt{3}$.



5.4. Парабола

Парабола – множина точок, рівновіддалених від фіксованої прямої (директриси) і фіксованої точки (фокуса), яка не належить цій прямій. Загальне рівняння (6.1) визначає параболу, коли $B=0$; $A\cdot C=0$.



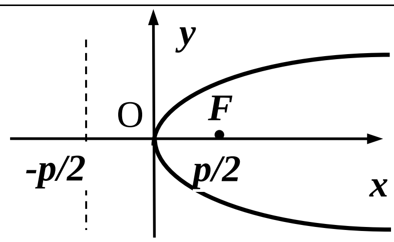
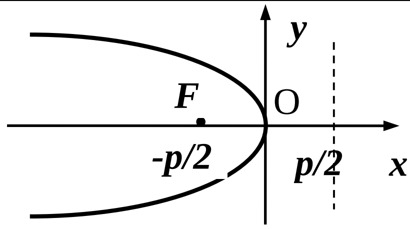
Якщо вісь Ox провести через фокус $F\left(p/2\,;0\right)$ перпендикулярно до директриси $x=-\frac{p}{2}$, обравши додатний напрямок від директриси до фокуса, то канонічне рівняння параболи має вигляд: $y^2=2px$.

Вершина цієї параболи на початку координат. Параметр p означає відстань між фокусом і директрисою $(p>0)$. За означенням $\frac{r}{d}=1$, тому $\varepsilon=1$.

Під час розв’язування задач зручно користуватись табл. 5.3 і 5.4.

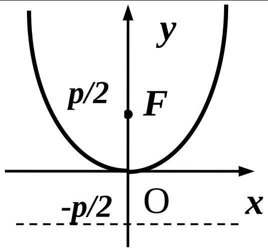
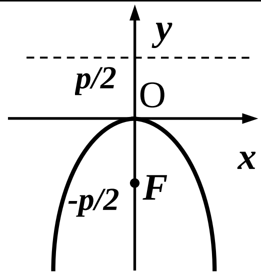
Таблиця 5.3

Параболи, симетричні відносно осі Ox

Рівняння	$y^2 = 2px$	$y^2 = -2px$
Координати фокуса	$F\left(\dfrac{p}{2};0\right)$	$F\left(-\dfrac{p}{2};0\right)$
Рівняння директриси	$x = -\dfrac{p}{2}$	$x = \dfrac{p}{2}$
Рисунок		

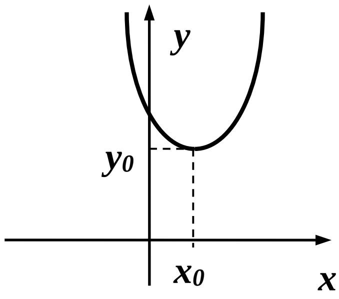
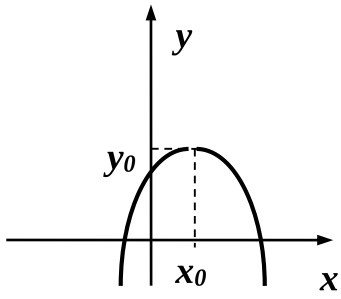
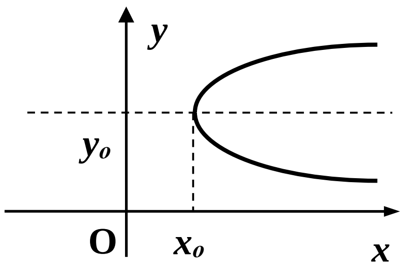
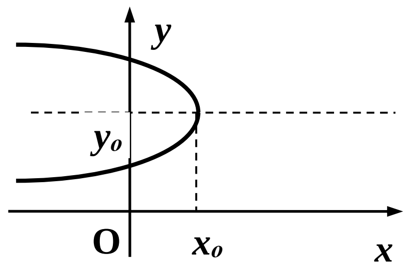
Таблиця 5.4

Параболи, симетричні відносно осі Oy

Рівняння	$x^2 = 2py$	$x^2 = -2py$
Координати фокуса	$F\left(0;\dfrac{p}{2}\right)$	$F\left(0;-\dfrac{p}{2}\right)$
Рівняння директриси	$y = -\dfrac{p}{2}$	$y = \dfrac{p}{2}$
Рисунок		

Рівняння параболи з вершиною в точці $\tilde{N}(x_0; y_0)$ і осями симетрії, паралельними координатним осям, а також схематичні рисунки цих ліній наведені в табл. 5.5.

Таблиця 5.5

Параболи $(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$ 	$(x-x_0)^2 = -2p(y-y_0)$ 
$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$ 	$(y-y_0)^2 = -2p(x-x_0)$ 

Зразки розв'язування задач

Задача 1. Побудувати параболу $3x^2 + 4y = 0$. Знайти координати фокуса, рівняння директриси, відстань між фокусом і директрисою.

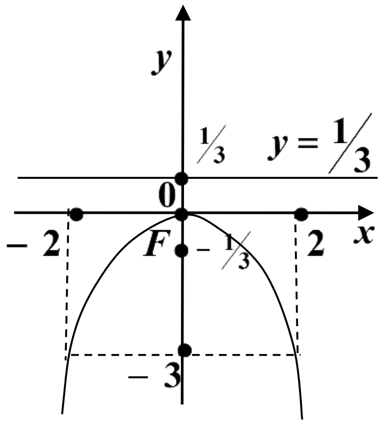
Розв'язання

Перетворимо рівняння параболи до канонічного вигляду:

$$3x^2 + 4y = 0 \Rightarrow 3x^2 = -4y \Rightarrow x^2 = -\frac{4}{3}y.$$

Це рівняння визначає параболу з вершиною в точці $O(0;0)$, віссю симетрії Oy (див. табл. 6.4).

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = -\frac{4}{3}y \\ x^2 = -2py \end{array}\right. \Rightarrow 2p = \frac{4}{3} \Rightarrow p = \frac{4}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$$ – відстань між фокусом і директрисою.



Парабола має фокус $F\left(0;-\dfrac{p}{2}\right) \Rightarrow F\left(0;-\dfrac{1}{3}\right)$ і рівняння директриси: $y=\dfrac{p}{2} \Rightarrow y=\dfrac{1}{3}$.

Для більш точного рисунка, обчислимо координати двох точок, які належать цій параболі.

Припустимо, $y_0=-3 \Rightarrow x^2=-\dfrac{4}{3}\cdot(-3) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x_{1,2}=\pm 2$.

Задача 2. Скласти рівняння параболи з вершиною в точці $O(0;0)$ і фокусом $F(-6;0)$.

Розв'язання

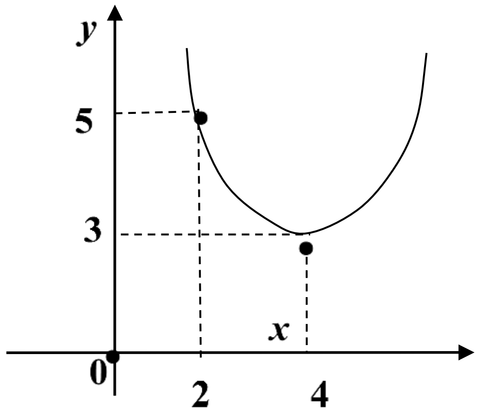
Фокус $F(-6;0)$, тому рівняння цієї параболи має вигляд: $y^2=-2px$ (див. табл. 6.3).

$$\begin{cases} F(-6;0) \\ F\left(-\dfrac{p}{2};0\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{p}{2}=6 \Rightarrow p=6\cdot 2=12.$$

Отримаємо рівняння параболи:

$$y^2=-2px \Rightarrow y^2=-2\cdot 12\cdot x \Rightarrow y^2=-24x.$$

Задача 3. Скласти рівняння параболи, зображеної на рисунку.



Розв'язання

Рівняння цієї параболи має вигляд: $(x-x_0)^2= \;=2p(y-y_0)$, де $C(x_0;y_0)$ - вершина (див. табл. 6.5).

З рисунка видно, що вершина $C(4;3)$, тому отримаємо рівняння:

$$(x-4)^2=2p(y-3).$$

Точка $(2;5)$ належить параболі, тому її координати задовольняють щойно отриманому рівнянню: $(2-4)^2 = 2p(5-3) \Rightarrow (-2)^2 = 2p \cdot 2 \Rightarrow 4 = 4p \Rightarrow$ $\Rightarrow p = \dfrac{4}{4} = 1$. Шукане рівняння має вигляд:

$(x-4)^2 = 2 \cdot 1 \cdot (y-3)$ або $(x-4)^2 = 2 \cdot (y-3)$.

Задача 4. Побудувати параболу $y^2 - 4y + 3x - 11 = 0$.

Розв'язання

Рівняння параболи необхідно привести до канонічного вигляду $(y-y_0)^2 = \pm 2p(x-x_0)$.

$$y^2 - 4y + 3x - 11 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y = -3x + 11 \Rightarrow y^2 - 2 \cdot y \cdot 2 = -3x + 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \right| \Rightarrow y^2 - 2y \cdot 2 + 2^2 - 2^2 = -3x + 11 \Rightarrow (y-2)^2 - 4 =$$

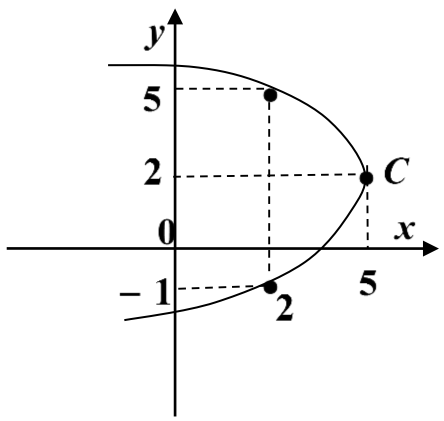
$$= -3x + 11 \Rightarrow (y-2)^2 = -3x + 11 + 4 \Rightarrow (y-2)^2 = -3x + 15 \Rightarrow (y-2)^2 = -3(x-5)$$

Вершина параболи $C(5;2)$, вісь симетрії паралельна осі Ox, гілки спрямовані «вліво» (див. табл. 5.5). Для більш точного рисунку обчислимо координати двох точок, які належать параболі.

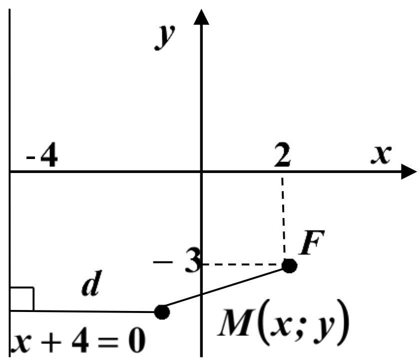
Припустимо $x_0 = 2 \Rightarrow (y-2)^2 = -3(2-5) \Rightarrow (y-2)^2 = -3 \cdot (-3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (y-2)^2 = 9 \Rightarrow y - 2 = \pm 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = 2 + 3 = 5; \\ y_2 = +2 - 3 = -1. \end{array} \right.$$

Отримали точки з координатами $(2;5)$ і $(2;-1)$.



Задача 5. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки $F(2;-3)$ та від прямої $x+4=0$. Побудувати криву.



Розв'язання

Відстань від точки $F(2;-3)$ до точки $M(x;y)$, яка належить шуканій кривій, обчислимо за формулою: $|FM|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\Rightarrow$

$\Rightarrow |FM|=\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}$.

Відстань від точки $M(x;y)$ до прямої $x+4=0$:

$$d=\frac{|Ax_M+By_M+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|x+4|}{\sqrt{1^2+0^2}}=\frac{|x+4|}{1}=|x+4|.$$

За умовою задачі

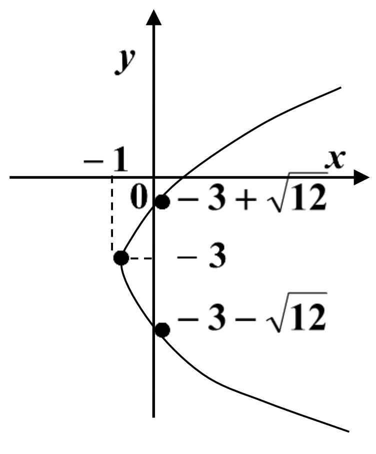
$$|FM|=d\Rightarrow\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}=|x+4|\Rightarrow\left(\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}\right)^2=$$

$$=(x+4)^2\Rightarrow(x-2)^2+(y+3)^2=(x+4)^2\Rightarrow\left|(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2\right|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2+(y+3)^2=x^2+2x\cdot 4+4^2\Rightarrow x^2-4x+4+(y+3)^2=$$

$$=x^2+8x+16\Rightarrow(y+3)^2=x^2+8x+16-x^2+4x-4\Rightarrow(y+3)^2=12x+12\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(y+3)^2=12(x+1).$$



Ми отримали рівняння параболи з вершиною $C(-1;-3)$, вісь симетрії якої паралельна осі Ox і гілки спрямовані «вправо» (див. табл. 6.5). Обчислимо координати двох точок, які належать параболі (для більш точного рисунку); наприклад точки перетину лінії з віссю Oy.

$$\begin{cases}(y+3)^2=12(x+1)\\ x=0\end{cases}\Rightarrow(y+3)^2=12\cdot(0+1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(y+3)^2=12\Rightarrow y+3==\pm\sqrt{12}\Rightarrow\begin{cases}y_1=-3-\sqrt{12};\\ y_2=-3+\sqrt{12}.\end{cases}$$

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Знайти координати центра і радіуса кола $x^2+y^2-8x+6y+$ $+21=0$.

Відповідь: $C(4;-3)$; $R=2$.

Задача 2. Скласти рівняння кола, якому належать точки $A(0;2)$, $B(1;1)$, $C(2;-2)$.

Відповідь: $(x+3)^2+(y+2)^2=25$.

Задача 3. Знайти координати фокусів та ексцентриситет еліпса $25x^2+169y^2-4225=0$.

Відповідь: $F_1(12;0)$; $F_2(-12;0)$; $\varepsilon = {}^{12}\!/_{13}$.

Задача 4. Скласти рівняння директрис еліпса $36x^2+20y^2-720=0$.

Відповідь: $y=\pm 9$.

Задача 5. Знайти рівняння еліпса, мала вісь якого дорівнює 8 і прямі $x=\pm 8$ є директрисами цього еліпса.

Відповідь: $\dfrac{x^2}{32}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

Задача 6. Привести рівняння еліпса $x^2+4y^2+4x-16y-8=0$ до канонічного вигляду.

Відповідь: $\dfrac{(x+2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$.

Задача 7. Для гіперболи $x^2-4y^2-36=0$ знайти осі, координати фокусів, ексцентриситет і рівняння асимптот.

Відповідь: $2a=12$; $2b=6$; $F_1(3\sqrt{5};0)$; $F_2(-3\sqrt{5};0)$; $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$; $y=\pm\dfrac{1}{2}x$

.

Задача 8. Обчислити ексцентриситет гіперболи $5x^2-16y^2+16=0$.

Відповідь: $\varepsilon=\sqrt{{}^{21}\!/_{5}}$.

Задача 9. Скласти рівняння гіперболи, якщо її дійсна вісь $2a=6$ і точка $M(9;-4)$ належать цій гіперболі.

Відповідь: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=1$.

Задача 10. Привести рівняння гіперболи $16x^2-9y^2-64x-18y-89=0$ до канонічного вигляду.

Відповідь: $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{16}=1$.

Задача 11. Знайти рівняння директриси та координати фокуса параболи $5y^2-8x=0$.

Відповідь: $x=-\frac{2}{5}$; $F\left(\frac{2}{5};0\right)$.

Задача 12. Привести рівняння параболи $x^2-6x-4y+29=0$ до канонічного вигляду.

Відповідь: $(x-3)^2=4(y-5)$.

Задача 13. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки $F(-2;4)$ та від прямої $y-5=0$.

Відповідь: $(x+2)^2=-2(y-4{,}5)$.

Задача 14. Знайти відстань від фокуса лінії $y^2+12x+2y+61=0$ до прямої $3x+4y=2$.

Відповідь: 6.

Задача 15. Знайти відстань від початку координат до директриси лінії $x^2+4x-4y-8=0$.

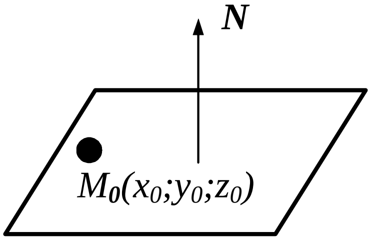
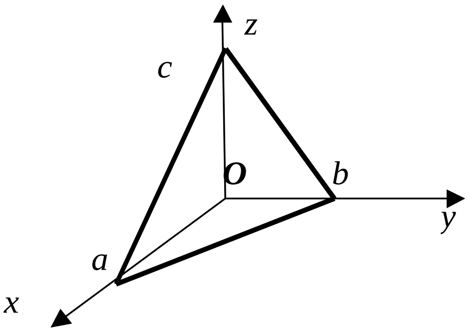
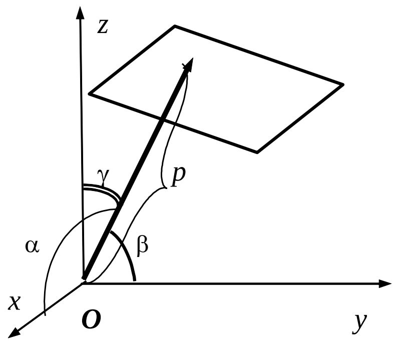
Відповідь: 4.

6. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ

6.1 ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ

Будь-яке лінійне рівняння зі змінними x, y, z можна розглядати як рівняння у декартових координатах площини у просторі. Різні форми рівняння площини наведено у табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Назва	**Загальний вигляд**	**Геометричний зміст параметрів**
Канонічне (рівняння площини, яка проходить через задану точку)	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 	A, B, C – координати вектора нормалі до площини; x_0, y_0, z_0 – координати точки, яка належить площині
Загальне	$Ax+By+Cz+D=0$	A, B, C – координати вектора нормалі до площини
У відрізках на осях	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 	a, b, c – координати точок перетину площини з осями Ox, Oy та Oz відповідно
Нормальне	$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ 	α, β, γ – кути, які створює з осями Ox, Oy та Oz, проведена з початку координат до площини нормаль
Рівняння площини, яка проходить через три точки	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$	(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) та (x_3, y_3, z_3) – координати трьох точок, які належать площині

Якщо у рівнянні відсутній доданок з якою-небудь змінною, то площина паралельна відповідній координатній осі; наприклад, площина, яку задано рівнянням $Ax + Cz + D = 0$, паралельна осі Oy .

Якщо у рівнянні відсутні доданки з двома змінними, то площина паралельна відповідній координатній площині; наприклад, площина, яку задано рівнянням $Ax + D = 0$, паралельна площині Oyz.

Якщо у загальному або у нормальному рівнянні площини відсутній вільний член, тобто рівняння має вигляд $Ax + By + Cz = 0$, площина проходить через початок координат.

Наведемо рівняння координатних площин :

$Oxy - \ z = 0$; $Oyz - x = 0$; $Oxz - y = 0$.

Кут між площинами α та β дорівнює гострому куту між їх нормалями

$\overline{N}_\alpha$ та $\overline{N}_\beta$, тобто $cos(\alpha \hat{;} \beta) = \dfrac{\left|\overline{N}_\alpha \ \overline{N}_\beta\right|}{\left|\overline{N}_\alpha\right| \left|\overline{N}_\beta\right|} = \dfrac{\left|A_\alpha A_\beta + B_\alpha B_\beta + C_\alpha C_\beta\right|}{\sqrt{A_\alpha^2 + B_\alpha^2 + C_\alpha^2} \cdot \sqrt{A_\beta^2 + B_\beta^2 + C_\beta^2}}$.

Умовою паралельності двох площин є колінеарність їх нормалей:

$\alpha || \beta \Leftrightarrow \overline{N}_\alpha || \overline{N}_\beta$, тобто $\dfrac{A_\alpha}{A_\beta} = \dfrac{B_\alpha}{B_\beta} = \dfrac{C_\alpha}{C_\beta}$.

Умовою перпендикулярності двох площин є перпендикулярність їх нормалей : $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \overline{N}_\alpha \perp \overline{N}_\beta$,тобто $\overline{N}_\alpha \cdot \overline{N}_\beta = 0$.

Відстань від точки M до площини, заданої за допомогою рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$, обчислюється за формулою

$$d(M) = \frac{\left|Ax_M + By_M + Cz_M + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

Зразки розв’язування задач

Задача 1. Побудувати площини та вказати нормалі до них:

а) $3x - 2y + 6z - 12 = 0$;

б) $2x + 3y - 6 = 0$;

в) $z - 4 = 0$;

Розв'язання

При побудові будемо користуватися рівнянням у відрізках на осях.

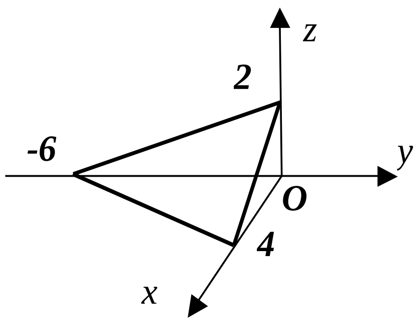
а) $3x - 2y + 6z - 12 = 0$;

$3x - 2y + 6z = 12$;

$\frac{x}{4} + \frac{y}{-6} + \frac{z}{2} = 1$.

Площина перетинає координатні осі Ox, Oy та Oz у точках з відповідними координатами $a = 4$, $b = -6$ та $c = 2$.

Нормаль до площини – вектор $\overline{N} = (3\,; -2\,; 6)$.



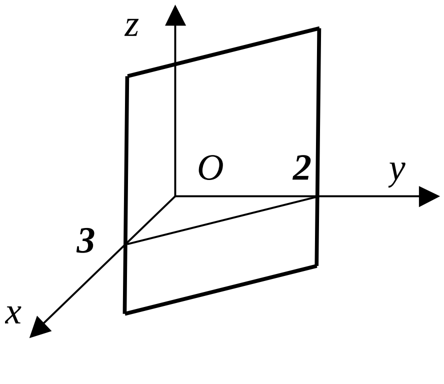
б) $2x + 3y - 6 = 0$;

$2x + 3y = 6$;

$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

Площина перетинає координатні осі Ox і Oy у точках з відповідними координатами $a = 3$ та $b = 2$ і паралельна осі Oz , тобто проходить через прямі, паралельні цій осі.

Нормаль до цієї площини – вектор $\overline{N} = (2; 3; 0)$.

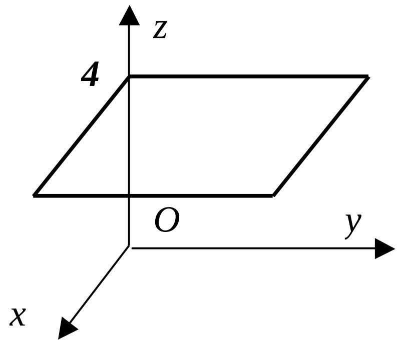


в) $z - 4 = 0$;

$z = 4$.

Площина перетинає координатну вісь $\boldsymbol{Oz}$ у точці з координатою $\boldsymbol{c = 4}$ та паралельна координатній площині $\boldsymbol{Oxy}$, отже, проходить через прямі, паралельні осям $\boldsymbol{Ox}$ та $\boldsymbol{Oy}$ (див. рис.).

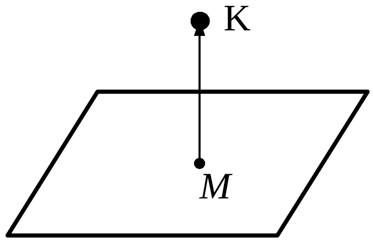
Нормаль до цієї площини – вектор $\overline{\boldsymbol{N}} = (\mathbf{0}\,;\,\mathbf{0}\,;\,\mathbf{4})$.



Задача 2. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{M}(\mathbf{3;4;5})$ перпендикулярно до вектора $\overline{\boldsymbol{MK}}$ **,** де $\boldsymbol{K}(\mathbf{-2;1;3})$.

Розв'язання

Нормаль до площини – це вектор $\overline{\boldsymbol{MK}} = (\mathbf{-2-3\,;\,1-4\,;\,3-5}) =$
$= (\mathbf{-5\,;-3\,;-2})$.



Запишемо канонічне рівняння площини:

$\boldsymbol{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$;

$\boldsymbol{-5(x-3)-3(y-4)-2(z-5)=0}$;

$\boldsymbol{5x+3y+2z-37=0}$.

Задача 3. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $\boldsymbol{M}(\mathbf{1;2;-1})$ та відтинає на осях $\boldsymbol{Ox}$ та $\boldsymbol{Oy}$ відрізки $\mathbf{-3}$ та $\mathbf{4}$ відповідно.

Розв'язання

Запишемо рівняння площини у відрізках на осях $\boldsymbol{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$. За умовою задачі $\boldsymbol{a=-3}$ та $\boldsymbol{b=4}$, отже $\boldsymbol{\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{c}=1}$.

Площина проходить через точку M, отже координати цієї точки перетворюють рівняння площини у вірну рівність: $\frac{1}{-3}+\frac{2}{4}+\frac{-1}{c}=1$; $c=-\frac{5}{6}$.

Таким чином, рівняння площини має вигляд $\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{-\frac{5}{6}}=1$, або $20x-15y+72z+60=0$.

Задача 4. Записати рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;2;3)$, $M_2(3;1;1;)$та $M_3(2;1;3)$.

Розв'язання

Скористаємося рівнянням площини, яка проходить через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0; \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Обчислимо визначник розкладанням за елементами першого рядка:

$$(x-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=0.$$

Після обчислень отримаємо $2x+2y+z-9=0$.

Задача 5. Знайти кут між площинами $3x+2y-5z+11=0$ та $2x-3y+z=0$.

Розв'язання

Нормалями до площин є вектори $\overline{N}_1=(3\,;2\,;-5)$ та $\overline{N}_2=(2\,;-3\,;1)$.

Кут φ між площинами знайдемо з умови

$$\cos\varphi=\frac{\left|\overline{N}_1\,\overline{N}_2\right|}{\left|\overline{N}_1\right|\left|\overline{N}_2\right|}=\frac{|3\cdot 2+2\cdot(-3)-5\cdot 1|}{\sqrt{3^2+2^2+(-5)^2}\,\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{532}},$$

тобто $\varphi=\arccos\frac{5}{\sqrt{532}}$.

Задача 6. Чи будуть перпендикулярними площини $3x+2y+4z-1=0$ та $2x+3y-z=0$?

Розв'язання

Обчислимо скалярний добуток нормалей до площин $\overline{N}_1 = (3\,;2\,;4)$ та $\overline{N}_2 = (2\,;3\,;-1)$: $\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2 = 3\cdot 2 + 2\cdot 3 + 4\cdot(-1) = 8 \neq 0$.

Отже, за ознакою перпендикулярності площин задані площини не будуть перпендикулярними.

Задача 7. Чи будуть паралельними площини $4x + 6y - 2z + 5 = 0$ та $2x + 3y - z = 0$?

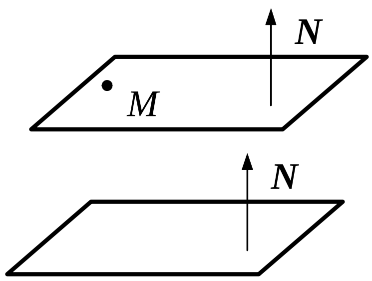
Розв'язання

Перевіримо, чи будуть колінеарними нормалі до площин $\overline{N}_1 = (4\,;6\,;-2)$ та $\overline{N}_2 = (2\,;3\,;-1)$: $\dfrac{4}{2} = \dfrac{6}{3} = \dfrac{-2}{-1} \Rightarrow 2 = 2 = 2$.

Нормалі колінеарні, отже, площини є паралельними.

Задача 8. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M(3;-1;0)$ паралельно площині $2x - 3y + 5z - 4 = 0$.

Розв'язання



Нормаль до площини, рівняння якої потрібно записати, повинна бути колінеарною вектору $\overline{N} = (2\,;-3\,;5)$, отже, може й дорівнювати цьому вектору.

Запишемо рівняння площини, яка проходить через точку M та має нормаль $\overline{N}$:

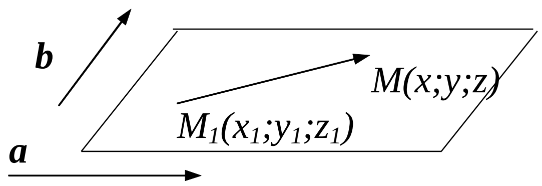
$A(x - x_M) + B(y - y_M) + C(z - z_M) = 0$; $2(x-3) - 3(y+1) + 5(z-0) = 0$; $2x - 3y + 5z - 9 = 0$.

Задача 9. Довести, що рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ паралельно векторам $\overline{a} = (a_x\,; a_y\,; a_z)$та $\overline{b} = (b_x; b_y; b_z)$, може мати вигляд: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$.

Розв'язання

Оберемо на розглядуваній площині довільну точку $M(x;y;z)$, тоді вектор $\overline{M_1M}=(x-x_1\,;\,y-y_1\,;\,z-z_1)$ лежить у цій площині, тобто вектори $\overline{M_1M}=(x-x_1\,;\,y-y_1\,;\,z-z_1)$, $\bar{a}=(a_x\,;a_y\,;a_z)$ та $\bar{b}=(b_x;b_y;b_z)$ будуть компланарними.

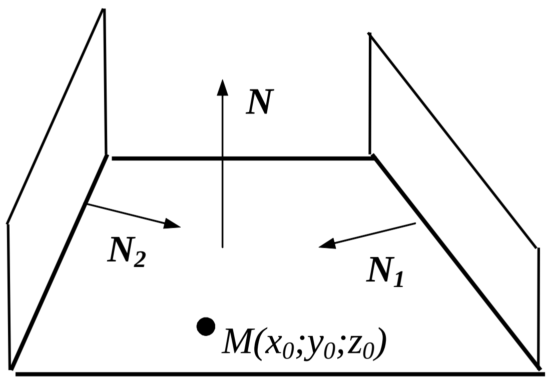
Запишемо умову компланарності трьох векторів $(\overline{M_1M}\times\bar{a})\cdot\bar{b}=0$ у координатній формі та отримаємо:



$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0.$$

Задача 10. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M(2;3;1)$ перпендикулярно до площин $3x-y+6=0$ та $2x+y+5z-1=0$.

Розв'язання



Шукана площина буде перпендикулярною площинам $3x-y+6=0$ та $2x+y+5z-1=0$, отже, нормаль до неї повинна бути перпендикулярною векторам $\overline{N}_1=(3\,;-1\,;0)$ та $\overline{N}_2=(2\,;1\,;5)$. Можна вважати, що ця нормаль дорівнює векторному добутку векторів $\overline{N}_1$ та $\overline{N}_2$:

$$\overline{N}=\overline{N}_1\times\overline{N}_2=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-5\bar{i}-15\bar{j}+5\bar{k}.$$

Тоді канонічне рівняння шуканої площини має вигляд:

$-5(x-2)-15(y-3)+5(z-1)=0$;

$x+3y-z-10=0$.

Задача 11. Знайти відстань між паралельними площинами $2x+3y+z-1=0$ та $2x+3y+z+4=0$.

Розв'язання

Відстань між паралельними площинами може обчислюватися як відстань від точки на одній площині до іншої площини.

Оберемо будь-яку точку на першій площині. Для цього дві координати оберемо довільно, а третю визначимо з рівняння площини: $x_M = y_M = 0$; $2\cdot 0+3\cdot 0+z_M-1=0$; $z_M=1$.

Знайдемо відстань від точки $M(0;0;1)$ до площини $2x+3y+z+4=0$:

$$d(M)=\frac{|2x_M+3y_M+z_M+4|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\frac{|2\cdot 0+3\cdot 0+1\cdot 1+4|}{\sqrt{14}}=\frac{5}{\sqrt{14}}=\frac{5\sqrt{14}}{14} \text{ (од.)}.$$

Отримана величина й буде відстанню між двома площинами.

Зауваження. При розв'язуванні цієї задачі часто припускаються прикрої помилки: обирають точку на площині та обчислюють відстань до цієї ж площини. У разі правильних підрахунків отримують нульовий результат, який видається парадоксальним.

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(3;-1;2)$ перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_2}$, де $M_2(4;-2;-1)$.

Відповідь: $x-y-3z+2=0$.

Задача 2. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(3;4;-5)$ паралельно векторам $\overline{a_1}=(3;1;-1)$ та $\overline{a_2}=(1;-2;1)$.

Відповідь: $x+4y+7z+16=0$.

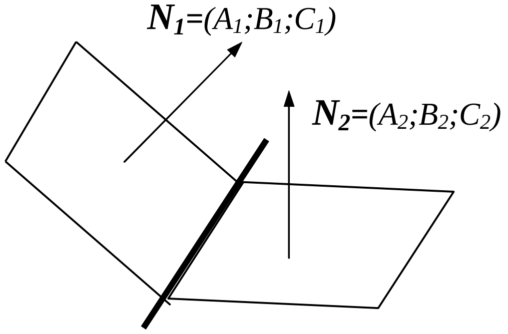
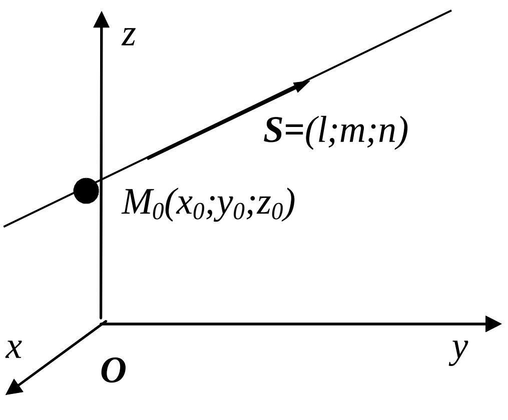
Задача 3. Знайти точку перетину трьох площин $x-2y+z-7=0$, $2x+y-z+2=0$ та $x-3y+2z-11=0$.

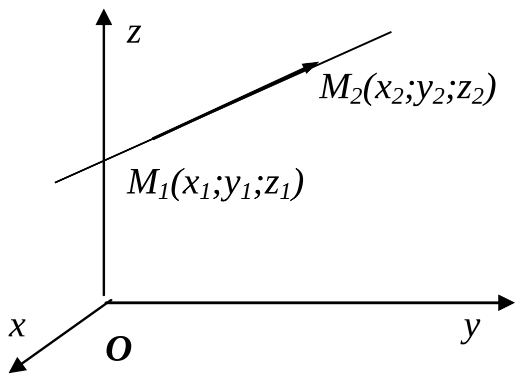
Відповідь: $(1;-2;2)$.

6.2. ПРЯМА У ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА ТА ПРЯМА

Пряму у просторі ми будемо розглядати як лінію перерізу двох площин; лінію, будь-які точки якої задають вектор, колінеарний заданому, або траєкторію руху зі сталою швидкістю заданої точки. Різні форми рівнянь прямої наведено у табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Назва	***Загальний вигляд рівнянь***	***Геометричний зміст параметрів***
Загальні	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 	Пряма розглядається як лінія перерізу двох площин з нормалями $\overline{N}_1=(A_1;B_1;C_1)$ та $\overline{N}_2=(A_2;B_2;C_2)$
Канонічні	$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 	l,m,n – координати напрямного вектора прямої; (x_0,y_0,z_0) – координати точки, яка належить прямій

<table>
<tr>
<td>Параметричні</td>
<td>$$\begin{cases} x = x_0 + l\,t \\ y = y_0 + m\,t \\ z = z_0 + n\,t \end{cases}$$</td>
<td>l, m, n– координати напрямного вектора прямої; (x_0, y_0, z_0) – координати точки, яка належить прямій;
з механічної точки зору параметричні рівняння – це рівняння рівномірного руху зі швидкістю $\bar{v} = (l, m, n)$ точки, яка у момент часу $t_0 = 0$ займає положення (x_0, y_0, z_0)</td>
</tr>
<tr>
<td>Рівняння прямої, яка проходить через дві точки</td>
<td>$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

</td>
<td>(x_1, y_1, z_1) та (x_2, y_2, z_2) – координати двох точок, які належать прямій</td>
</tr>
</table>

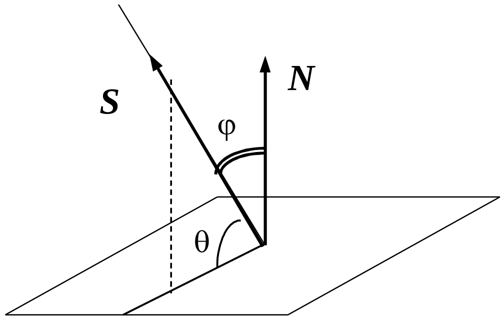
Кут між двома прямими – це гострий кут, який створено напрямними векторами цих прямих $cos\,\varphi = \dfrac{\left|\overline{S_1} \cdot \overline{S_2}\right|}{\left|\overline{S_1}\right|\left|\overline{S_2}\right|}$.

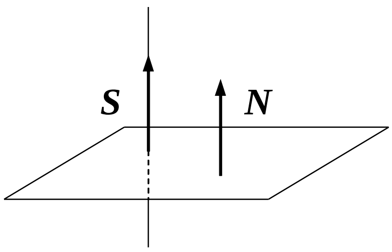
Умовою ***паралельності*** двох прямих є колінеарність їх напрямних векторів : $s_1 || s_2 \Leftrightarrow \overline{S_1} || \overline{S_2}$, тобто $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$.

Умовою ***перпендикулярності*** двох прямих є перпендикулярність їх напрямних векторів : $s_1 \perp s_2 \Leftrightarrow \overline{S_1} \perp \overline{S_2}$,тобто $\overline{S_1} \cdot \overline{S_2} = 0$.

Гострий кут φ, який створений нормаллю до площини, заданої рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, та напрямним вектором прямої, доповнює кут θ між прямою та площиною до 90^0 :

$$\sin\theta = \cos\varphi = \frac{|\overline{S} \cdot \overline{N}|}{|\overline{S}|\,|\overline{N}|} = \frac{|A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$



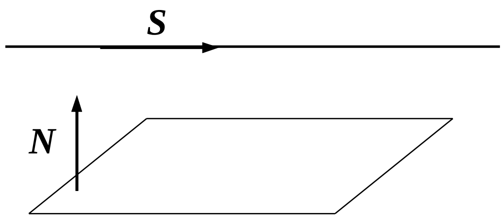


Умовою ***перпендикулярності*** прямої та площини є колінеарність нормалі до площини та напрямного вектора прямої :

$$s \perp \alpha \Leftrightarrow \overline{S} \,||\, \overline{N}, \text{ тобто } \frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}.$$

Умовою ***паралельності*** прямої та площини є перпендикулярність нормалі до площини та напрямного вектора прямої :

$$s \,||\, \alpha \Leftrightarrow \overline{S} \perp \overline{N}, \text{ тобто } \overline{S} \cdot \overline{N} = 0 .$$

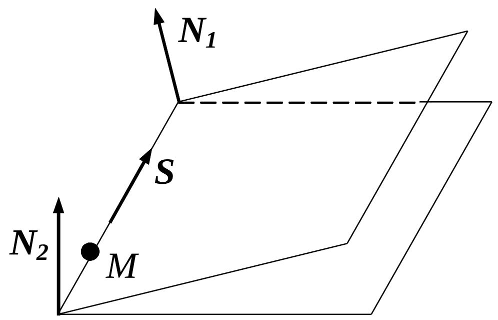


Зразки розв'язування задач

Задача 1. Записати канонічні та параметричні рівняння прямої. $\begin{cases} 3x+5y+z-4=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}.$

Розв'язання

Пряма належить двом площинам, отже, вона буде перпендикулярною нормалям до цих площин $\overline{N_1}=(3;5;1)$ та $\overline{N_2}=(1;1;1)$.



Тоді напрямний вектор прямої можна обчислити як векторний добуток векторів $\overline{N_1}$ та $\overline{N_2}$:

$$\overline{S}=\overline{N_1}\times\overline{N_2}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=4\bar{i}-2\bar{j}-2\bar{k}.$$

Оберемо будь-яку точку, що належить прямій. Для цього одну з координат оберемо довільно, інші визначимо з рівнянь прямої:

$$x_M=0,\ \begin{cases} 3\cdot 0+5y_M+z_M-4=0 \\ 0+y_M+z_M=0 \end{cases},\ \begin{cases} y_M=1 \\ z_M=-1 \end{cases}.$$

Точка $M(0;1;-1)$ належить прямій.

Тоді канонічні рівняння прямої мають вигляд $\frac{x}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-2}$ або $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{-1}$.

Параметричні рівняння цієї прямої – $\begin{cases} x = 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ або $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 - t \end{cases}$.

Задача 2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $M(3\,;2\,;-1)$ та $N(4;-1;2)$.

Розв'язання

Рівняння прямої, яка проходить через точки M та N, мають вигляд $\frac{x - x_M}{x_N - x_M} = \frac{y - y_M}{y_N - y_M} = \frac{z - z_M}{z_N - z_M}$; $\frac{x-3}{4-3} = \frac{y-2}{-1-2} = \frac{z-(-1)}{2-(-1)}$, або $\frac{x-3}{1} =$ $= \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{3}$.

Задача 3. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1\,;3\,;-5)$ паралельно прямій $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{2} = z + 1$.

Розв'язання

Напрямним вектором шуканої прямої можна вважати напрямний вектор заданої прямої $\overline{S} = (4\,;2\,;1)$. Отже, канонічні рівняння мають вигляд

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2} = z + 5 .$$

Задача 4. Знайти точку перетину прямих $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ та $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Розв'язання

Будемо вважати, що точці перетину у рівняннях першої прямої відповідає значення параметра $t = t_1$, а у рівняннях другої прямої – значення параметра $t = t_2$, тобто $\begin{cases} x_0 = 1 + t_1 \\ y_0 = 1 - t_1 \\ z_0 = 2 + 3t_1 \end{cases}$ та $\begin{cases} x_0 = 3 + 2t_2 \\ y_0 = -2 - 3t_2 \\ z_0 = 1 - t_2 \end{cases}$.

Координати точки перетину прямих повинні задовольняти рівнянням обох прямих, отже

$$\begin{cases} 1+t_1=3+2t_2 \\ 1-t_1=-2-3t_2 \\ 2+3t_1=1-t_2 \end{cases}; \quad \begin{cases} t_1-2t_2=2 \\ t_1-3t_2=3 \\ 3t_1+t_2=-1 \end{cases}; \quad \begin{cases} t_2=-1 \\ 3t_1+t_2=-1 \\ t_1-3t_2=3 \end{cases}; \quad \begin{cases} t_2=-1 \\ t_1=0 \end{cases}.$$

Тоді шукана точка має координати $\begin{cases} x_0=1+0 \\ y_0=1-0 \\ z_0=2+3\cdot 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=1 \\ z_0=2 \end{cases}$, тобто точка $M(1;1;2)$ є точкою перетину заданих прямих.

Зауваження. Якщо отримана система трьох рівнянь з двома змінними не має розв'язку, це означає, що прямі не перетинаються.

Задача 5. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(3;2;-1)$ перпендикулярно до прямих $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+3}{-2}$ та $\frac{x-2}{4}=y+1=\frac{z-1}{3}$.

Розв'язання

Шукана пряма перпендикулярна прямим з напрямними векторами $\overline{S_1}=(3;5;-2)$ та $\overline{S_2}=(4;1;3)$. Тоді напрямний вектор прямої можна обчислити як векторний добуток векторів $\overline{S_1}$ та $\overline{S_2}$:

$$\overline{S}=\overline{S_1}\times\overline{S_2}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=17\bar{i}-17\bar{j}-17\bar{k}.$$

Тоді канонічні рівняння прямої мають вигляд $\frac{x-3}{17}=\frac{y-2}{-17}=\frac{z+1}{-17}$ або $x-3=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-1}$.

Задача 6. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(3;0;1)$ перпендикулярно площині $2x-3y+4z-1=0$.

Розв'язання

Умовою перпендикулярності прямої та площини є колінеарність нормалі до площини та напрямного вектора прямої, тобто можна вважати, що $\overline{S} = \overline{N} = (2\,;-3\,;4)$.

Запишемо канонічні рівняння шуканої прямої: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-1}{4}$.

Задача 7. Знайти кут між прямими $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-1}{-2}$ та $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -4 + 2t \\ z = 5 - t \end{cases}$.

Розв'язання

Напрямні вектори заданих прямих – це вектори $\overline{S_1} = (2\,;5\,;-2)$ та $\overline{S_2} = (3\,;2\,;-1)$. Кут φ між прямими знайдемо з умови:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overline{S_1} \cdot \overline{S_2}\right|}{\left|\overline{S_1}\right|\left|\overline{S_2}\right|} = \frac{|2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + (-2)\cdot(-1)|}{\sqrt{2^2 + 5^2 + (-2)^2}\,\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{18}{\sqrt{462}}.$$

Отже, $\varphi = \arccos\dfrac{18}{\sqrt{462}}$.

Задача 8. Знайти кут між прямою $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ та площиною $2x - 5y + z - 2 = 0$.

Розв'язання

Знайдемо напрямний вектор прямої з умови $\overline{S} = \overline{N_1} \times \overline{N_2}$, де $\overline{N_1} = (1\,;-1\,;1)$, $\overline{N_2} = (1\,;2\,;2)$.

$$\overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$$,отже $\overline{S} = \{-4\,;-1\,;3\}$.

Обчислимо кут між прямою та площиною за формулою:

$$\sin\theta = \frac{|A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}};$$

$$\boldsymbol{sin\theta} = \frac{|2\cdot(-4)+(-5)\cdot(-1)+1\cdot 3|}{\sqrt{2^2+(-5)^2+1^2}\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+3^2}} = \frac{|-8+5+3|}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{26}} = 0,$$

тобто $\theta = 0$.

Задача 9. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ та площини $2x+3y+z-1=0$.

Розв'язання

Параметричні рівняння прямої мають вигляд $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = 6t \end{cases}$. З'ясуємо, при якому значенні параметра t точка, що належить прямій, водночас належить і площині (інакше кажучи, у якій точці пряма перетинає площину):

$2(1+t)+3(-1-2t)+(6t)-1=0$;

$2+2t-3-6t+6t-1=0$;

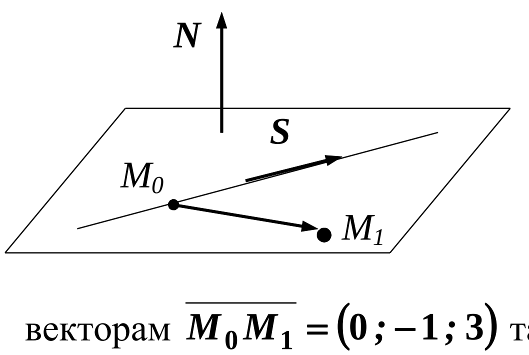
$t=1$.

Підставимо $t=1$ у параметричне рівняння прямої та одержимо координати шуканої точки:

$$\begin{cases} x = 1+1 \\ y = -1-2\cdot 1 \\ z = 6\cdot 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 6 \end{cases} \Rightarrow \quad M(2\,;-3\,;6).$$

Задача 10. Записати рівняння площини, яка містить пряму $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}$ та точку $M_1(1\,;-1\,;2)$.

Розв'язання



Пряма $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}$ проходить через точку $M_0(1\,;0\,;-1)$, яка, зрозуміло, належить також і шуканій площині. Отже, нормаль площини $\overline{N}$ буде перпендикулярною векторам $\overline{M_0M_1} = (0\,;-1\,;3)$ та $\overline{S} = (2\,;-1\,;3)$, тобто

$$\overline{N}=\overline{S}\times\overline{M_0M_1}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & -1 & 3\end{vmatrix}=0\cdot\bar{i}-6\cdot\bar{j}-2\cdot\bar{k}\,.$$

Канонічне рівняння шуканої площини має вигляд:

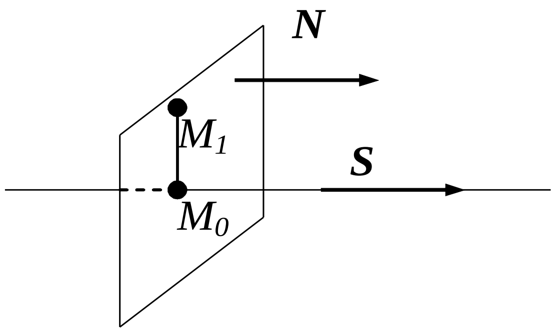
$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$;

$0(x-1)-6(y-0)-2(z+1)=0$;

$3y+z+1=0$.

Задача 11. Визначити проекцію точки $M_1(1;2;-1)$ на пряму $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-4}$ та знайти відстань від точки до прямої.

Розв'язання



Знайдемо рівняння площини, яка проходить через точку M_1 перпендикулярно заданій прямій. Можна вважати, що нормаль $\overline{N}$ до площини дорівнює напрямному вектору прямої: $\overline{N}=\overline{S}=(-1;2;-4)$.

Запишемо рівняння шуканої площини: $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$;
$-1(x-1)+2(y-2)-4(z+1)=0$; $-x+2y-4z-7=0$; $x-2y+4z+7=0$.

Параметричні рівняння заданої прямої мають вигляд $\begin{cases}x=2-t\\ y=-1+2t\\ z=-4t\end{cases}$.

З'ясуємо, при якому значенні параметра t пряма перетинає площину:

$$(2-t)-2(1-2t)+4(-4t)+7=0\Rightarrow t=\frac{11}{21}.$$

Обчислимо координати точки перетину M_0:

$$\begin{cases}x_0=2-\dfrac{11}{21}\\ y_0=-1+2\cdot\dfrac{11}{21}\\ z_0=-4\cdot\dfrac{11}{21}\end{cases}\Rightarrow\quad M_0\left(\frac{31}{21};\frac{1}{21};-\frac{44}{21}\right).$$

Пряма M_0M_1 є перпендикулярною до заданої прямої, отже, точка $M_0\left(\frac{31}{21};\frac{1}{21};-\frac{44}{21}\right)$ є шуканою проекцією точки M_1.

Відстань від точки M_1 до прямої – це відстань до проекції M_0 заданої точки на пряму, тобто

$$d(M_1)=|M_1M_0|=\sqrt{\left(\frac{31}{21}-1\right)^2+\left(\frac{1}{21}-2\right)^2+\left(-\frac{44}{21}-(-1)\right)^2}=\frac{\sqrt{2310}}{21}\text{ (од.)}$$

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Записати параметричні рівняння прямої, якій належать точки $M_1(1;2;-4)$ та $M_2(-1;2;-4)$.

Відповідь: $\begin{cases} x=t-1 \\ y=2 \\ z=-4 \end{cases}$.

Задача 2. Записати канонічні рівняння прямої $\begin{cases} 5x+y+z=0 \\ 2x+3y-2z+5=0 \end{cases}$.

Відповідь: $\frac{x}{-5}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-1}{13}$.

Задача 3. Знайти кут між прямими $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$ та $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=$ $=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$.

Відповідь: $\varphi=60^0$.

Задача 4. Знайти кут між площиною $3x-y+5=0$ та прямою $\frac{x-2}{3}=$ $=\frac{y-1}{-2}=z-1$.

Відповідь: $arcsin\frac{11\sqrt{35}}{70}$.

Задача 5. Знайти точку перетину площини $3x+y-2z=0$ та прямої $\frac{x+2}{-3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-6}{4}$.

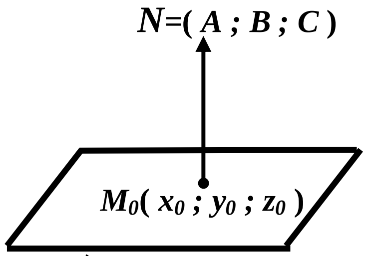
Відповідь: $(1;1;2)$.

Задача 6. Знайти проекцію точки $M(-5;7;-4)$ на пряму $\frac{x+1}{2}=$ $=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{-1}$.

Відповідь: $(1;4;-1)$.

6.3. Довідник з формулами за темою «Площина та пряма»

Площина у просторі



$\overline{N}=(A;B;C)$ – **нормальний вектор**

1) Загальне рівняння площини

$$Ax+By+Cz+D=0$$

2) Найпростіше рівняння площини

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

3) Рівняння площини, яка проходить через три точки

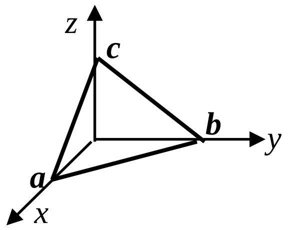
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

4) Нормальне рівняння площини

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

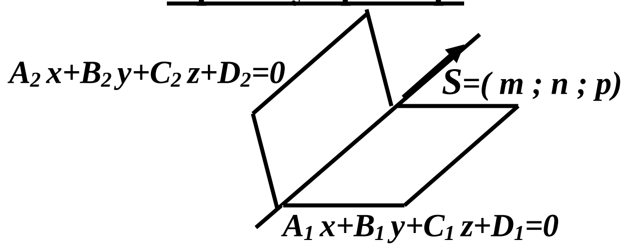
5) Рівняння у відрізкахз на осях

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$



Відстань від точки до площини

Пряма у просторі



$\overline{S}=(m;n;p)$ –**напрямний вектор**

1) Загальне рівняння прямойї

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases};$$

$$\overline{S}=\overline{N}_1\times\overline{N}_2$$

2) Рівняння прямої, яка проходить через дві точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

3) Канонічні рівняння прямої

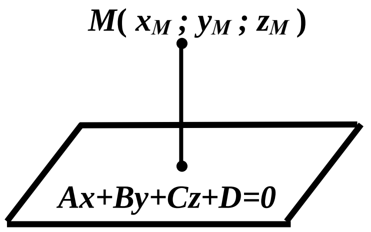
$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$$

4) Параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} x=x_1+mt \\ y=y_1+nt \\ z=z_1+pt \end{cases}$$

Кути

між площинами $\cos\varphi=\frac{\left|\overline{N}_1\cdot\overline{N}_2\right|}{\left|\overline{N}_1\right|\left|\overline{N}_2\right|}$



$$d=\frac{\left|Ax_M+By_M+Cz_M+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

між прямими $$\cos\varphi=\frac{\left|\overline{S}_1\cdot\overline{S}_2\right|}{\left|\overline{S}_1\right|\left|\overline{S}_2\right|}$$

між прямою та площиною $$\sin\varphi=\frac{\left|\overline{N}\cdot\overline{S}\right|}{\left|\overline{N}\right|\left|\overline{S}\right|}$$

Умови паралельності

площин $\overline{N}_1 \| \overline{N}_2$

прямих $\overline{S}_1 \| \overline{S}_2$

прямої та площини $\overline{S}\perp\overline{N}$

Умови перпендикулярності

площин $\overline{N}_1\perp\overline{N}_2$

прямих $\overline{S}_1\perp\overline{S}_2$

прямої талощини $\overline{S} \| \overline{N}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І І. Вища математика: навч. посібник. К.: А.С.К., 2005. – 648 с.

2. Вища математика: Збірник задач: навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін. За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. К.: Видавництво А.С.К., 2003. 480 с.

3. Тріщ Б.М. Основи вищої математики. Львів: ЛНУ, 2008. 403 с.

4. Клепко В.Ю, Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах. 2-ге видання. К.: Центр учбової літератури, 2009. 594 с.

5. Запорожченко О.Є., Сушко Л.Ф., Кочеткова І.Б. Вища математика. Частина 1: навч посібник. Дніпропетровськ: НМетАУ, 2014. 98 с.

Навчальне видання

Запорожченко Олена Євгенівна
Сазонова Марина Сергіївна
Сушко Лариса Федорівна

ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник

Електронне видання

ВНЗ «Університет імені Альфреда Нобеля».
49000, м. Дніпро, вул. Січеславська Набережна, 18.
Тел. (056) 720-71-54, e-mail: rio@duan.edu.ua
Свідоцтво ДК № 5309 від 20.03.2017 р.